MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Leipzig. und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XXVI. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1886.

Inhalt des sechsundzwanzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Ueber einige Differentialbeziehungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen.

(Erste Mittheilung.)

Von

M. Krause in Rostock.

In der Theorie der elliptischen Functionen hat sich die Differentialbeziehung, welche zwischen dem Multiplicator, dem ursprünglichen und dem transformirten Modul besteht, von fundamentaler Bedeutung gezeigt. Im 3^{ten} Bande der Acta mathematica hat der Verfasser eine Formel entwickelt, welche als Verallgemeinerung der vorhin angedeuteten Differentialbeziehung für die Thetafunctionen 2^{er} Veränderlichen gelten kann. Bei dem Versuche diese Formel anzuwenden, zeigen sich Schwierigkeiten. Es erweist sich eine grössere Mannigfaltigkeit von Beziehungen nothwendig. Es ist nicht schwer, derartige Beziehungen aus der soeben citirten Arbeit zu entwickeln. Hierbei zeigt es sich, dass an Stelle jener einen Gleichung im Gebiete der elliptischen Functionen, deren *neun* in dem Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen treten. Die von dem Verfasser in den Acta entwickelte Formel ist ein unmittelbarer Ausfluss jener neun Gleichungen. Die neun Gleichungen selbst können in mehrfache Formen gebracht werden. Es ist die Aufgabe des vorliegenden Aufsatzes diese Formen zu entwickeln.

Hierbei soll zu gleicher Zeit eine Lücke in der Theorie der Thetafunctionen zweier Veränderlichen ausgefüllt werden, welche sich bei vielen Gelegenheiten als störend erweist. Die Betrachtungen, die zu den gesuchten Formeln führen, können auf die Beziehungen gestützt werden, welche zwischen den ersten Differentialquotienten der Thetafunctionen und den Functionen selbst für die Nullwerthe der Argumente bestehen. Es finden diese Relationen sich schon in der Rosenhain'schen Arbeit und sind später in mannnigfachen Arbeiten und Formelsammlungen wieder aufgenommen und verwerthet worden. Ein Beweis findet sich in den meisten dieser Arbeiten nicht. Nur in der Arbeit von Weber über die Kummer'sche Fläche 4^{ter} Ordnung, welche sich im 84. Bande des Crelle'schen Journales findet, ist der Gang eines

Beweises kurz angedeutet, ferner giebt Thomae in seiner Arbeit „Beitrag zur Bestimmung von $\vartheta(0, \ldots, 0)$ durch die Classenmoduln algebraischer Functionen" im 71. Bande des Crelle'schen Journals einen Beweis der entsprechenden Formeln für hyperelliptische Thetafunctionen von beliebig vielen Veränderlichen. (Siehe hierüber auch Staude „Ueber die Parameterdarstellung der Verhältnisse der Thetafunctionen zweier Veränderlichen", diese Annalen Band 24, pag. 292). Im folgenden sollen nun *zwei* elementare Beweise jener wichtigen Beziehungen gegeben werden. Beide sind von dem Thomae'schen verschieden. Der eine, der erste, hat mit dem von Weber angedeuteten zwar eine gewisse Aehnlichkeit, aber doch andererseits einen so völlig verschiedenen Ausgangspunkt, dass auch seine Mittheilung bei der principiellen Bedeutung der betreffenden Formeln nicht ohne Interesse sein dürfte.

§ 1.

Zweifacher Beweis der Rosenhain'schen Differentialformeln. Bildung der Differentialquotienten der Grössen $\varkappa, \lambda, \mu$ nach den Grössen τ.

Wir beginnen mit den beiden angedeuteten Beweisen.

Der erste stützt sich auf das Additionstheorem der Thetafunctionen und auf folgende Formeln. Setzt man:

$$\begin{aligned} a &= \vartheta_5\,(2v_1, 2v_2, 4\tau_{11}, 4\tau_{12}, 4\tau_{22}),\\ b &= \vartheta_{01}(2v_1, 2v_2, 4\tau_{11}, 4\tau_{12}, 4\tau_{22}),\\ c &= \vartheta_4\,(2v_1, 2v_2, 4\tau_{11}, 4\tau_{12}, 4\tau_{22}),\\ d &= \vartheta_{23}(2v_1, 2v_2, 4\tau_{11}, 4\tau_{12}, 4\tau_{22}),\end{aligned}$$

so gelten die Gleichungen:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \vartheta_5\,(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) &= a+b+c+d,\\ \vartheta_{34}(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) &= a+b-c-d,\\ \vartheta_{12}(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) &= a-b+c-d,\\ \vartheta_0\,(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) &= a-b-c+d.\end{aligned}\right.$$

Die Richtigkeit derselben folgt unmittelbar aus den Definitionsgleichungen der Thetafunctionen. Diese Formeln sind bisher wenig beachtet worden. Sie dürften sich in der Folge von grosser Bedeutung zeigen, ähnlich wie dieses mit den entsprechenden Formeln in der Theorie der elliptischen Functionen der Fall ist. In Bezug hierauf möge auf die nachgelassene Arbeit von Jacobi über elliptische Functionen verwiesen werden und auf die Arbeiten von Weierstrass, die in neuester Zeit in den Monatsberichten der Berliner Academie erschienen sind.

Aus dem Additionstheorem der Thetafunctionen zweier Veränderlichen folgt die Formel:

$$(2) \qquad 2\vartheta_2(\vartheta_{01}^4 - \vartheta_2^4)\,\vartheta_2(2v_1, 2v_2)$$
$$= (\vartheta_{01}^2 - \vartheta_2^2)\cdot(\vartheta_5^2(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) + \vartheta_{12}^2(v_1, v_2) + \vartheta_0^2(v_1, v_2))$$
$$\cdot(\vartheta_5^2(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) - \vartheta_{12}^2(v_1, v_2) - \vartheta_0^2(v_1, v_2))$$
$$- (\vartheta_{01}^2 + \vartheta_2^2)\cdot(\vartheta_5^2(v_1, v_2) - \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) + \vartheta_{12}^2(v_1, v_2) - \vartheta_0^2(v_1, v_2))$$
$$\cdot(\vartheta_5^2(v_1, v_2) - \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) - \vartheta_{12}^2(v_1, v_2) + \vartheta_0^2(v_1, v_2)).$$

Aehnliche Ausdrücke ergeben sich für die andern Thetafunctionen, deren Argumente das doppelte der ursprünglichen sind. Es können diese Ausdrücke mit Hülfe weniger Schlüsse aus den Formeln abgeleitet werden, welche sich in der Arbeit des Verfassers über die Multiplication der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung im 17. Bande dieser Annalen pag. 452 vorfinden.

Unter Berücksichtigung der Formeln (1) folgt hieraus:

$$\vartheta_2.(\vartheta_{01}^4 - \vartheta_2^4).\vartheta_2(2v_1, 2v_2) = 16(\vartheta_{01}^2 - \vartheta_2^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(ab + cd)$$
$$- 32(\vartheta_{01}^2 + \vartheta_2^2)(ac + bd)(ad + bc).$$

Setzen wir in dieser Gleichung links und rechts an Stelle von $2v_1, 2v_2$ resp. v_1, v_2, bezeichnen ferner die Thetafunctionen mit den Moduln $4\tau_{11}$, $4\tau_{12}$, $4\tau_{22}$ durch grosse Buchstaben, so folgt:

$$(3) \qquad \vartheta_2.(\vartheta_{01}^4 - \vartheta_2^4).\vartheta_2(v_1, v_2)$$
$$= 16(\vartheta_{01}^2 - \vartheta_2^2)\cdot(O_5^2(v_1, v_2) + O_{01}^2(v_1, v_2) + O_4^2(v_1, v_2) + O_{23}^2(v_1, v_2))$$
$$\cdot(O_5(v_1, v_2).O_{01}(v_1, v_2) + O_4(v_1, v_2).O_{23}(v_1, v_2))$$
$$- 32(\vartheta_{01}^2 + \vartheta_2^2)\cdot(O_5(v_1, v_2).O_4(v_1, v_2) + O_{23}(v_1, v_2).O_{01}(v_1, v_2))$$
$$\cdot(O_5(v_1, v_2).O_{23}(v_1, v_2) + O_{01}(v_1, v_2).O_4(v_1, v_2)).$$

Durch Substitution halber Perioden, indem wir an Stelle von v_1, v_2 resp. $v_1 - \frac{1}{2}$, $v_2 - \frac{1}{2}$ setzen, folgt hieraus die Gleichung

$$(4) \qquad \vartheta_2.(\vartheta_{01}^4 - \vartheta_2^4).\vartheta_{02}(v_1, v_2)$$
$$= 16(\vartheta_{01}^2 - \vartheta_2^2)\cdot(O_0^2(v_1, v_2) + O_1^2(v_1, v_2) + O_{04}^2(v_1, v_2) + O_{14}^2(v_1, v_2))$$
$$\cdot(O_0(v_1, v_2).O_1(v_1, v_2) + O_{04}(v_1, v_2).O_{14}(v_1, v_2))$$
$$- 32(\vartheta_{01}^2 + \vartheta_2^2)\cdot(O_0(v_1, v_2).O_{04}(v_1, v_2) + O_{14}(v_1, v_2).O_1(v_1, v_2))$$
$$\cdot(O_0(v_1, v_2).O_{14}(v_1, v_2) + O_1(v_1, v_2).O_{04}(v_1, v_2)).$$

Genau so folgt die Gleichung:

$$(5)\qquad \vartheta_{01}\cdot(\vartheta_{01}^4-\vartheta_2^4)\cdot\vartheta_1(v_1,v_2)$$
$$=16(\vartheta_{01}^2-\vartheta_2^2)\cdot\left(O_0^2(v_1,v_2)+O_1^2(v_1,v_2)+O_{04}^2(v_1,v_2)+O_{14}^2(v_1,v_2)\right)$$
$$\cdot\left(O_0(v_1,v_2)\cdot O_1(v_1,v_2)+O_{04}(v_1,v_2)\cdot O_{14}(v_1,v_2)\right)$$
$$+32(\vartheta_{01}^2+\vartheta_2^2)\cdot\left(O_0(v_1,v_2)\cdot O_{04}(v_1,v_2)+O_{14}(v_1,v_2)\cdot O_1(v_1,v_2)\right)$$
$$\cdot\left(O_0(v_1,v_2)\cdot O_{14}(v_1,v_2)+O_1(v_1,v_2)\cdot O_{04}(v_1,v_2)\right).$$

Bilden wir die Functionaldeterminante von $\vartheta_{02}(v_1,v_2)$, $\vartheta_1(v_1,v_2)$, setzen $v_1=v_2=0$ und führen die Abkürzungen ein:

$$\vartheta_\alpha'(v_1)_0\cdot\vartheta_\beta'(v_2)_0-\vartheta_\alpha'(v_2)_0\cdot\vartheta_\beta'(v_1)_0=(\alpha,\beta),$$
$$O_\alpha'(v_1)_0\cdot O_\beta'(v_2)_0-O_\alpha'(v_2)_0\cdot O_\beta'(v_1)_0=(\alpha,\beta)',$$

so folgt:

$$\vartheta_2\cdot\vartheta_{01}\cdot(\vartheta_{01}^4-\vartheta_2^4)(02,1)=16\cdot16\cdot4\cdot O_0\cdot O_{14}\cdot(O_0^4-O_{14}^4)(1,04)'.$$

Unter Berücksichtigung der Thetarelation:

$$O_4\cdot O_{23}\cdot O_{04}(v_1,v_2)\cdot O_{14}(v_1,v_2)$$
$$=O_{01}\cdot O_5\cdot O_1(v_1,v_2)\cdot O_0(v_1,v_2)-O_2\cdot O_{34}\cdot O_{02}(v_1,v_2)\cdot O_{12}(v_1,v_2)$$

kann die letzte Gleichung geschrieben werden:

$$(6)\qquad \vartheta_2\cdot\vartheta_{01}\cdot(\vartheta_{01}^4-\vartheta_2^4)(02,1)$$
$$=16\cdot16\cdot4\,O_0\cdot O_{14}\cdot O_{34}\cdot O_{12}\cdot O_{03}\cdot O_2\cdot(O_0^4-O_{14}^4)\frac{(02,1)'}{O_{14}\cdot O_{03}\cdot O_4\cdot O_{23}}.$$

Nun folgt aus Gleichung (3), wenn wir an Stelle von $v_2 : v_2-\frac{1}{2}$ setzen für $v_1=v_2=0$:

$$\vartheta_2\cdot\vartheta_{01}\cdot(\vartheta_{01}^2+\vartheta_2^2)=16\,O_2\cdot O_{34}(O_{34}^2+O_2^2).$$

Genau so wird:

$$\vartheta_{03}\cdot\vartheta_4\,(\vartheta_4^2+\vartheta_{03}^2)=16\,O_{03}\cdot O_{12}(O_{12}^2+O_{03}^2),$$
$$\vartheta_{14}\cdot\vartheta_{23}(\vartheta_{23}^2+\vartheta_{14}^2)=16\,O_0\cdot O_{14}(O_{14}^4+O_0^2).$$

Mithin kann Gleichung (6) in die Form gebracht werden:

$$\frac{(02,1)}{\vartheta_{14}\cdot\vartheta_{03}\cdot\vartheta_4\cdot\vartheta_{23}}=\frac{(02,1)'}{O_{14}\cdot O_{03}\cdot O_4\cdot O_{23}}\cdot\frac{O_0^2-O_{14}^2\cdot\vartheta_{23}^2+\vartheta_{14}^2\cdot\vartheta_4^2+\vartheta_{03}^2}{4\cdot\vartheta_{01}^2-\vartheta_2^2\cdot O_{12}^2+O_{03}^2\cdot O_{34}^2+O_2^2}$$

oder da:

$$\frac{\vartheta_{23}^2+\vartheta_{14}^2\cdot\vartheta_4^2+\vartheta_{03}^2}{\vartheta_{01}^2-\vartheta_2^2}=\vartheta_5^2+\vartheta_{34}^2+\vartheta_{12}^2+\vartheta_0^2=4(O_5^2+O_{01}^2+O_4^2+O_{23}^2),$$

$$\frac{(02,1)}{\vartheta_{14}\cdot\vartheta_{03}\cdot\vartheta_4\cdot\vartheta_{23}}=\frac{(02,1)'}{O_{14}\cdot O_{03}\cdot O_4\cdot O_{23}}\,\frac{(O_5^2+O_{01}^2+O_4^2+O_{23}^2)\cdot(O_0^2-O_{14}^2)}{O_{12}^2+O_{03}^2\cdot O_{34}^2+O_2^2},$$

oder also:

$$(7) \qquad \frac{(02,1)}{\vartheta_{14}\cdot\vartheta_{03}\cdot\vartheta_{4}\cdot\vartheta_{23}} = \frac{(02,1)'}{O_{14}\cdot O_{03}\cdot O_{4}\cdot O_{23}}.$$

Damit ist der Beweis geliefert. Die linke Seite bleibt ungeändert, wenn an Stelle von τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} gesetzt wird resp. $4^n\tau_{11}$, $4^n\tau_{12}$, $4^n\tau_{22}$. Lassen wir n immer grösser und grösser werden, so folgt:

$$(8) \qquad (02,1) = \pi^2\cdot\vartheta_{14}\cdot\vartheta_{03}\cdot\vartheta_{4}\cdot\vartheta_{23}.$$

Ein zweiter Beweis stützt sich auf eine andere Form des Additionstheorems und auf die Relationen:

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1,v_2)}{\partial v_\varkappa^2} = 4\pi i\,\dfrac{\partial\vartheta_\alpha(v_1,v_2)}{\partial\tau_{\varkappa\varkappa}}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1,v_2)}{\partial v_1\partial v_2} = 2\pi i\,\dfrac{\partial\vartheta_\alpha(v_1,v_2)}{\partial\tau_{12}}, \\[2ex] \dfrac{\partial^3\vartheta_\alpha(v_1,v_2)}{\partial v_\varkappa^2\partial v_\varepsilon} = 4\pi i\,\dfrac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1,v_2)}{\partial\tau_{\varkappa\varkappa}\partial v_\varepsilon}, \\[2ex] \dfrac{\partial^3\vartheta_\alpha(v_1,v_2)}{\partial v_1\partial v_2\partial v_\varepsilon} = 2\pi i\,\dfrac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1,v_2)}{\partial\tau_{12}\cdot\partial v_\varepsilon}. \end{cases}$$

Aus der Form, welche Koenigsberger dem Additionstheorem im 64. Bande des Crelle'schen Journals giebt, (siehe auch Acta mathematica III, pag. 154 sequ.), folgt unmittelbar die Formel:

$$(10) \qquad \vartheta_2\vartheta_{23}\left(\vartheta_5(v_1,v_2)\,\frac{\partial\vartheta_3(v_1,v_2)}{\partial v_\varkappa} - \vartheta_3(v_1,v_2)\,\frac{\partial\vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_\varkappa}\right)$$
$$= \vartheta_{14}\cdot\vartheta_{02}'(v_\varkappa)\cdot\vartheta_0(v_1,v_2)\cdot\vartheta_{03}(v_1,v_2) + \vartheta_{01}\cdot\vartheta_{24}'(v_\varkappa)_0\cdot\vartheta_4(v_1,v_2)\cdot\vartheta_{34}(v_1,v_2).$$

Setzen wir:

$$\left(\frac{\partial^m\vartheta_\alpha(v_1,v_2)}{\partial v_1^r\partial v_2^{m-r}}\right)_{v_1=0,v_2=0} = \vartheta_\alpha^m(v_1^r,\ v_2^{m-r})_0,$$

$$\left(\frac{\partial^m\vartheta_\alpha(v_1,v_2)}{\partial v_\varkappa^m}\right)_{v_1=0,v_2=0} = \vartheta_\alpha^m(v_\varkappa^m)_0,$$

so folgen durch zweimalige Differentiation die folgenden sechs Formeln:

$$\vartheta_2\cdot\vartheta_{23}\cdot\vartheta_5\cdot\vartheta_3'''(v_1^3)_0$$
$$= \vartheta_2\cdot\vartheta_{23}\cdot\vartheta_5''(v_1^2)_0\cdot\vartheta_3'(v_1)_0 + \vartheta_{14}\cdot\vartheta_{02}'(v_1)_0\cdot(\vartheta_0\cdot\vartheta_{03}''(v_1^2)_0 + \vartheta_{03}\cdot\vartheta_0''(v_1^2)_0)$$
$$+ \vartheta_{01}\cdot\vartheta_{24}'(v_1)_0\cdot(\vartheta_4\cdot\vartheta_{34}''(v_1^2)_0 + \vartheta_{34}\cdot\vartheta_4''(v_1^2)_0),$$

$$\vartheta_2\cdot\vartheta_{23}\cdot\vartheta_5\cdot\vartheta_3'''(v_1^2,v_2)_0$$
$$= \vartheta_2\cdot\vartheta_{23}\cdot\vartheta_5''(v_1^2)_0\cdot\vartheta_3'(v_2)_0 + \vartheta_{14}\cdot\vartheta_{02}'(v_1)_0\cdot(\vartheta_0\cdot\vartheta_{03}''(v_1,v_2) + \vartheta_{03}\cdot\vartheta_0''(v_1,v_2))$$
$$+ \vartheta_{01}\cdot\vartheta_{24}'(v_1)_0\cdot(\vartheta_4\cdot\vartheta_{34}''(v_1,v_2)_0 + \vartheta_{34}\cdot\vartheta_4''(v_1,v_2)_0),$$

$$\vartheta_2 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_3'''(v_1, v_2^2)_0$$
$$= \vartheta_2 \cdot \vartheta_{23} (2\vartheta_5''(v_1, v_2)_0 \cdot \vartheta_5'(v_2)_0 - \vartheta_5''(v_2^2)_0 \cdot \vartheta_3'(v_1)_0)$$
$$+ \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{02}'(v_1)_0 (\vartheta_0 \cdot \vartheta_{03}''(v_2^2)_0 + \vartheta_{03} \cdot \vartheta_0''(v_2^2)_0)$$
$$+ \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{24}'(v_1)_0 (\vartheta_4 \cdot \vartheta_{34}''(v_2^2)_0 + \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4''(v_2^2)_0),$$

$$\vartheta_2 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_3'''(v_1^2, v_2)_0$$
$$= \vartheta_2 \cdot \vartheta_{23} \cdot (2\vartheta_5''(v_1, v_2)_0 \cdot \vartheta_3'(v_1)_0 - \vartheta_5''(v_1^2)_0 \cdot \vartheta_3'(v_2)_0)$$
$$+ \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{02}'(v_2)_0 \cdot (\vartheta_0 \cdot \vartheta_{03}''(v_1^2)_0 + \vartheta_{03} \cdot \vartheta_0''(v_1^2)_0)$$
$$+ \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{24}'(v_2)_0 \cdot (\vartheta_4 \cdot \vartheta_{34}''(v_1^2)_0 + \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4''(v_1^2)_0),$$

$$\vartheta_2 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_3'''(v_1, v_2^2)_0$$
$$= \vartheta_2 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5''(v_2^2)_0 \cdot \vartheta_3'(v_1)_0 + \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{02}'(v_2)_0 (\vartheta_0 \cdot \vartheta_{03}''(v_1, v_2)_0 + \vartheta_{03} \cdot \vartheta_0''(v_1, v_2)_0)$$
$$+ \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{24}'(v_2)_0 (\vartheta_4 \cdot \vartheta_{34}''(v_1, v_2)_0 + \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4''(v_1, v_2)_0),$$

$$\vartheta_2 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_3'''(v_2^3)_0$$
$$= \vartheta_2 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5''(v_2^2)_0 \cdot \vartheta_3'(v_2)_0 + \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{02}'(v_2)_0 (\vartheta_0 \cdot \vartheta_{03}''(v_2^2)_0 + \vartheta_{03} \cdot \vartheta_0''(v_2^2)_0)$$
$$+ \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{24}'(v_2)_0 (\vartheta_4 \cdot \vartheta_{34}''(v_2^2)_0 + \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4''(v_2^2)_0).$$

Es mögen dieses die Gleichungen 11 — 16 sein.
Vermöge derselben bilden wir die Ausdrücke:

$$\vartheta_{24}'(v_2)_0 \cdot \vartheta_3'''(v_1^3)_0 - \vartheta_{24}'(v_1)_0 \cdot \vartheta_3'''(v_1^2, v_2)_0,$$
$$\vartheta_{24}'(v_2)_0 \cdot \vartheta_3'''(v_1^2, v_2)_0 - \vartheta_{24}'(v_1)_0 \cdot \vartheta_3'''(v_1, v_2^2)_0,$$
$$\vartheta_{24}'(v_2)_0 \cdot \vartheta_3'''(v_1, v_2^2)_0 - \vartheta_{24}'(v_1)_0 \cdot \vartheta_3'''(v_2^3)_0.$$

Zur Bildung des ersten combiniren wir Gleichung (11) mit Gleichung (14), so wird derselbe gleich:

$$\vartheta_5''(v_1^2)_0 (\vartheta_3'(v_1)_0 \cdot \vartheta_{24}'(v_2)_0 + \vartheta_3'(v_2)_0 \cdot \vartheta_{24}'(v_1)_0) - 2\vartheta_5''(v_1, v_2)_0 \cdot \vartheta_3'(v_1)_0 \cdot \vartheta_{24}'(v_1)_0$$
$$+ \frac{\vartheta_0 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{14}}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5} \left(\frac{\vartheta_{03}''(v_1^2)_0}{\vartheta_{03}} + \frac{\vartheta_0''(v_1^2)_0}{\vartheta_0} \right) (\vartheta_{02}'(v_1)_0 \cdot \vartheta_{24}'(v_2)_0 - \vartheta_{02}'(v_2)_0 \cdot \vartheta_{24}'(v_1)_0),$$

oder da:

$$\frac{\vartheta_0 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{14}}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5} (\vartheta_{02}'(v_1)_0 \cdot \vartheta_{24}'(v_2)_0 - \vartheta_{02}'(v_2)_0 \cdot \vartheta_{24}'(v_1)_0)$$
$$= (\vartheta_3'(v_1)_0 \cdot \vartheta_{24}'(v_2)_0 - \vartheta_3'(v_2)_0 \cdot \vartheta_{24}'(v_1)_0)$$

ist, so ergiebt sich derselbe, wenn wir die frühere Bezeichnung aufnehmen, gleich:

$$\vartheta_5''(v_1^2)_0 \cdot (\vartheta_3'(v_1)_0 \cdot \vartheta_{24}'(v_2)_0 + \vartheta_3'(v_2)_0 \cdot \vartheta_{24}'(v_1)_0)$$
$$-2\vartheta_5''(v_1, v_2)_0 \cdot \vartheta_3'(v_1)_0 \cdot \vartheta_{24}'(v_1)_0 + \left(\frac{\vartheta_{03}''(v_1^2)_0}{\vartheta_{03}} + \frac{\vartheta_0''(v_1^2)_0}{\vartheta_0}\right)(3, 24).$$

Die beiden andern Ausdrücke sind analog zu bilden.

Andrerseits ist

$$(17) \qquad \vartheta_{23} . \vartheta_{34}\left(\vartheta_5(v_1, v_2)\frac{\partial\vartheta_{24}(v_1, v_2)}{\partial v_\varkappa} - \vartheta_{24}(v_1, v_2)\frac{\partial\vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_\varkappa}\right)$$
$$= \vartheta_{01} . \vartheta_3'(v_\varkappa)_0 . \vartheta_2(v_1, v_2) . \vartheta_4(v_1, v_2) - \vartheta_0 . \vartheta_{13}'(v_\varkappa)_0 . \vartheta_{12}(v_1, v_2) . \vartheta_{14}(v_1, v_2).$$

Wir operiren mit diesem Ausdrucke wie mit dem vorigen und bilden die drei Ausdrücke:

$$\vartheta_3'(v_2)_0 \cdot \vartheta_{24}'''(v_1^3)_0 - \vartheta_3'(v_1)_0 \cdot \vartheta_{24}'''(v_1^2, v_2)_0,$$
$$\vartheta_3'(v_2)_0 \cdot \vartheta_{24}'''(v_1^2, v_2)_0 - \vartheta_3'(v_1)_0 \cdot \vartheta_{24}'''(v_1, v_2^2)_0,$$
$$\vartheta_3'(v_2)_0 \cdot \vartheta_{24}'''(v_1, v_2^2)_0 - \vartheta_3'(v_1)_0 \cdot \vartheta_{24}'''(v_2^3)_0.$$

Der erste wird gleich:

$$\vartheta_5''(v_1^2)_0 (\vartheta_3'(v_1)_0 \cdot \vartheta_{24}'(v_2)_0 + \vartheta_3'(v_2)_0 \cdot \vartheta_{24}'(v_1)_0)$$
$$-2\vartheta_5''(v_1, v_2)_0 . \vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'(v_1)_0 - \frac{\vartheta_{12} . \vartheta_{14} . \vartheta_0}{\vartheta_{34} . \vartheta_{23} . \vartheta_5}\left(\frac{\vartheta_{14}''(v_1^2)_0}{\vartheta_{14}} + \frac{\vartheta_{12}''(v_1^2)_0}{\vartheta_{12}}\right)(13, 3),$$

oder da:

$$\frac{\vartheta_{12} . \vartheta_{14} . \vartheta_0}{\vartheta_{34} . \vartheta_{23} . \vartheta_5}(13, 3) = (3, 24)$$

ist, gleich:

$$\vartheta_5''(v_1^2)_0 (\vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'(v_2)_0 + \vartheta_3'(v_2)_0 . \vartheta_{24}'(v_1)_0) - \vartheta_5''(v_1, v_2)_0 . \vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'(v_1)_0$$
$$-\left(\frac{\vartheta_{14}''(v_1^2)_0}{\vartheta_{14}} + \frac{\vartheta_{12}''(v_1^2)_0}{\vartheta_{12}}\right)(3, 24).$$

Wir bilden nun die drei Ausdrücke:

$$\vartheta_{24}'(v_2)_0 . \vartheta_3'''(v_1^3)_0 - \vartheta_{24}'(v_1)_0 . \vartheta_3'''(v_1^2, v_2)_0 - \vartheta_3'(v_2)_0 . \vartheta_{24}'''(v_1^3)_0$$
$$+ \vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'''(v_1^2, v_2)_0,$$
$$\vartheta_{24}'(v_2)_0 . \vartheta_3'''(v_1^2, v_2)_0 - \vartheta_{24}'(v_1)_0 . \vartheta_3'''(v_1, v_2^2)_0 - \vartheta_3'(v_2)_0 . \vartheta_{24}'''(v_1^2, v_2)_0$$
$$+ \vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'''(v_1, v_2^2)_0,$$
$$\vartheta_{24}'(v_2)_0 . \vartheta_3'''(v_1, v_2^2)_0 - \vartheta_{24}'(v_1)_0 . \vartheta_3'''(v_2^3)_0 - \vartheta_3'(v_2)_0 . \vartheta_{24}'''(v_1, v_2^2)_0$$
$$+ \vartheta_3'(v_1)_0 . \vartheta_{24}'''(v_2^3)_0 .$$

Aus den Gleichungen (9) folgt dann, dass diese drei Ausdrücke die partiellen Differentialquotienten der Grösse

$$\vartheta_{24}'(v_2)_0 . \vartheta_3'(v_1)_0 - \vartheta_{24}'(v_1)_0 . \vartheta_3'(v_2)_0$$

nach den Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} sind; ferner lehren die zuletzt angestellten Betrachtungen, dass die Gleichungen gelten:

$$\frac{\partial \log(\vartheta_{24}'(v_2)_0 \cdot \vartheta_3'(v_1)_0 - \vartheta_{24}'(v_1)_0 \cdot \vartheta_3'(v_2)_0)}{\partial \tau_{\varkappa\epsilon}} = \frac{\partial \log(\vartheta_{12} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{14})}{\partial \tau_{\varkappa\epsilon}},$$

oder also:

$$d \log(3, 24) = d \log(\vartheta_{12} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{14}),$$

oder also:

$$(3, 24) = c \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{14},$$

oder schliesslich:

$$(3, 24) = \pi^2 \vartheta_{12} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{14}. \tag{18}$$

Damit ist auch der zweite Beweis geliefert.

Solcher Differentialbeziehungen, wie die soeben entwickelte, giebt es im Ganzen 15. Dieselben lehren, dass von den 12 ersten Differentialquotienten der ungeraden Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente nur drei von einander unabhängig sein können. Wir denken uns sämmtliche 12 Grössen durch vier Grössen $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$ ausgedrückt, zwischen denen eine Bedingungsgleichung besteht, indem wir setzen:

$$(19) \quad \begin{cases} \vartheta_{24}'(v_1)_0 = - K_{11} \dfrac{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{14}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}, \\[2ex] \vartheta_{24}'(v_2)_0 = - K_{12} \dfrac{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{14}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}, \\[2ex] \vartheta_3'(v_1)_0 = K_{21} \dfrac{\vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5^2}, \\[2ex] \vartheta_3'(v_2)_0 = K_{22} \dfrac{\vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5^2}. \end{cases}$$

Hierbei besteht dann die Relation:

$$K_{11} \cdot K_{22} - K_{12} \cdot K_{21} = K = \pi^2 \frac{\vartheta_{34}^3 \cdot \vartheta_4^3 \cdot \vartheta_5^3}{\vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{14}}. \tag{20}$$

Die Ausdrucksformen der andern Differentialquotienten folgen leicht. Wir greifen die Grössen heraus:

$$(21) \quad \begin{cases} \vartheta_1'(v_1)_0 = (K_{11} + \varkappa^2 . K_{21}) \dfrac{\vartheta_5 \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}, \\[2ex] \vartheta_1'(v_2)_0 = (\varkappa^2 . K_{22} + K_{12}) \dfrac{\vartheta_5 \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}, \\[2ex] \vartheta_{13}'(v_1)_0 = (K_{11} + \mu^2 . K_{21}) \dfrac{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}, \\[2ex] \vartheta_{13}'(v_2)_0 = (\mu^2 . K_{22} + K_{12}) \dfrac{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}. \end{cases}$$

Dabei ist gesetzt worden:

$$\varkappa^2 = \frac{\vartheta_{23}^2 . \vartheta_{01}^2}{\vartheta_4^2 . \vartheta_5^2}, \quad \lambda^2 = \frac{\vartheta_2^2 . \vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_4^2}, \quad \mu^2 = \frac{\vartheta_{01}^2 . \vartheta_2^2}{\vartheta_5^2 . \vartheta_{34}^2}.$$

Es möge in Bezug auf diese Ausdrücke auf pag. 156 im 3. Bande der Acta mathematica verwiesen werden.

Die soeben aufgestellten Ausdrucksformen sind specieller Natur, genügen aber für unseren Zweck vollkommen. In Bezug auf die allgemeine Darstellung möge u. a. auf die schon genannte Arbeit von Staude verwiesen werden.

Wenn dann v_1, v_2 die Argumente der Thetafunctionen sind, so definiren wir als Argumente der hyperelliptischen Functionen die Grössen u_1, u_2 durch die Gleichungen:

$$(22) \qquad u_1 = K_{11} . v_1 + K_{12} . v_2, \qquad u_2 = K_{21} . v_1 + K_{22} . v_2 .$$

Wir denken uns nun die Grössen $\varkappa$, λ, μ nach den Grössen $\tau_{\varkappa e}$ differencirt, so folgt (siehe Acta mathematica III, pag. 285 seq.).

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{ee}} = \frac{\varkappa}{4\pi i}(a_{ee} + b_{ee}), \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_{ee}} = \frac{\lambda}{4\pi i}(b_{ee} + c_{ee}),$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau_{ee}} = \frac{\mu}{4\pi i}(c_{ee} + a_{ee}),$$

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{12}} = \frac{\varkappa}{2\pi i}(a_{12} + b_{12}), \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_{12}} = \frac{\lambda}{2\pi i}(b_{12} + c_{12}),$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau_{12}} = \frac{\mu}{2\pi i}(c_{12} + a_{12}).$$

Dabei ist gesetzt:

$$a_{ee} = \frac{\vartheta_{01}''(v_e^2)_0}{\vartheta_{01}} - \frac{\vartheta_5''(v_e^2)_0}{\vartheta_5} = -K_{1e}^2(1-\varkappa^2+\lambda^2-\mu^2) - 2K_{1e}K_{2e}(\lambda^2-\mu^2.\varkappa^2)$$
$$-K_{2e}^2(\lambda^2.\mu^2-\mu^2.\varkappa^2+\varkappa^2.\lambda^2-\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2),$$

$$b_{ee} = \frac{\vartheta_{23}''(v_e^2)_0}{\vartheta_{23}} - \frac{\vartheta_4''(v_e^2)_0}{\vartheta_4} = -K_{1e}^2(1-\varkappa^2-\lambda^2+\mu^2) - 2K_{1e}K_{2e}(\mu^2-\varkappa^2.\lambda^2)$$
$$-K_{2e}^2(\lambda^2.\mu^2+\mu^2.\varkappa^2-\varkappa^2.\lambda^2-\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2),$$

$$c_{ee} = \frac{\vartheta_2''(v_e^2)_0}{\vartheta_2} - \frac{\vartheta_{34}''(v_e^2)_0}{\vartheta_{34}} = -K_{1e}^2(1+\varkappa^2-\lambda^2-\mu^2) - 2K_{1e}K_{2e}(\varkappa^2-\lambda^2.\mu^2)$$
$$-K_{2e}^2(-\lambda^2.\mu^2+\mu^2.\varkappa^2+\varkappa^2.\lambda^2-\varkappa^2.\lambda^2.\mu^2).$$

Die entsprechenden Formeln für den Index 12 erhalten wir, indem wir an Stelle von K_{1e}^2, $2K_{1e}.K_{2e}$, K_{2e}^2 resp. setzen

$$K_{11} . K_{12}, \quad K_{12} . K_{21} + K_{11} . K_{22}, \quad K_{21} . K_{22}.$$

Hieraus folgen die drei wichtigen Formeln:

$$
(23)\begin{cases}
\dfrac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{11}}=-\dfrac{\varkappa\varkappa_1^2}{2\pi i}\left(K_{11}^2+K_{11}.K_{21}(\lambda^2+\mu^2)+K_{21}^2.\lambda^2.\mu^2\right),\\[2ex]
\dfrac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{12}}=-\dfrac{\varkappa\varkappa_1^2}{2\pi i}\left(2K_{11}.K_{12}+(K_{12}.K_{21}+K_{11}.K_{22})(\lambda^2+\mu^2)+2K_{21}.K_{22}.\lambda^2.\mu^2\right),\\[2ex]
\dfrac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{22}}=-\dfrac{\varkappa\varkappa_1^2}{2\pi i}\left(K_{12}^2+K_{12}.K_{22}(\lambda^2+\mu^2)+K_{22}^2.\lambda^2.\mu^2\right).
\end{cases}
$$

Aus diesen drei Formeln sind die entsprechenden für λ und μ durch cyklische Vertauschung der Buchstaben $\varkappa$, λ, μ herzustellen. Dabei ist dann zu gleicher Zeit:

$$
(24)\qquad \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{11}} & \dfrac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{12}} & \dfrac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{22}}\\[2ex]
\dfrac{\partial\lambda}{\partial\tau_{11}} & \dfrac{\partial\lambda}{\partial\tau_{12}} & \dfrac{\partial\lambda}{\partial\tau_{22}}\\[2ex]
\dfrac{\partial\mu}{\partial\tau_{11}} & \dfrac{\partial\mu}{\partial\tau_{12}} & \dfrac{\partial\mu}{\partial\tau_{22}}
\end{vmatrix}
=-\frac{\varkappa.\lambda.\mu.\varkappa_1^2.\lambda_1^2.\mu_1^2.\lambda_\varkappa^2.\mu_\lambda^2.\mu_\varkappa^2.K^3}{(2i\pi)^3}.
$$

Ferner bestehen die Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
1&=\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{11}}\frac{\partial\tau_{11}}{\partial\varkappa}+\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{12}}\frac{\partial\tau_{12}}{\partial\varkappa}+\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{22}}\frac{\partial\tau_{22}}{\partial\varkappa},\\
0&=\frac{\partial\lambda}{\partial\tau_{11}}\frac{\partial\tau_{11}}{\partial\varkappa}+\frac{\partial\lambda}{\partial\tau_{12}}\frac{\partial\tau_{12}}{\partial\varkappa}+\frac{\partial\lambda}{\partial\tau_{22}}\frac{\partial\tau_{22}}{\partial\varkappa},\\
0&=\frac{\partial\mu}{\partial\tau_{11}}\frac{\partial\tau_{11}}{\partial\varkappa}+\frac{\partial\mu}{\partial\tau_{12}}\frac{\partial\tau_{12}}{\partial\varkappa}+\frac{\partial\mu}{\partial\tau_{22}}\frac{\partial\tau_{22}}{\partial\varkappa}.
\end{aligned}
$$

Hieraus sind dann die Differentialquotienten der Grössen τ zu bestimmen. Nach leichten Rechnungen ergeben sich die Beziehungen:

$$
(25)\begin{cases}
\dfrac{\partial\tau_{11}}{\partial\varkappa}=-2\pi i\,\dfrac{K_{12}^2+2\varkappa^2K_{12}.K_{22}+\varkappa^4K_{22}^2}{\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2.K^2},\\[2ex]
\dfrac{\partial\tau_{12}}{\partial\varkappa}=+2\pi i\,\dfrac{K_{11}.K_{12}+\varkappa^2(K_{12}.K_{21}+K_{22}.K_{11})+\varkappa^4K_{21}.K_{22}}{\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2.K^2},\\[2ex]
\dfrac{\partial\tau_{22}}{\partial\varkappa}=-2\pi i\,\dfrac{K_{11}^2+2\varkappa^2K_{11}.K_{21}+\varkappa^4K_{21}^2}{\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2.K^2}.
\end{cases}
$$

Die Differentialquotienten nach λ und μ sind aus den soeben entwickelten durch cyklische Vertauschung der Grössen $\varkappa$, λ, μ zu bestimmen.

Die aufgestellten Gleichungssysteme von je neun Gleichungen würden umgekehrt die Grössen K durch die Differentialquotienten der Grössen $\varkappa$, λ, μ oder der Grössen τ ausdrücken lassen. Wir gehen hierauf nicht näher ein, da wir diese Ausdrucksformen nicht brauchen.

§ 2.

Die Transformation n^{ten} Grades. Differentialbeziehungen zwischen den Multiplicatoren und Moduln.

Wir gehen jetzt zu einer beliebigen rationalen Transformation n^{ter} Ordnung über.

Die den Grössen K, $\varkappa$, λ, μ entsprechenden Grössen bezeichnen wir durch C, c, l, m, die transformirten Moduln durch τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}'. Dann finden (Acta math. III, pag. 283) die Beziehungen statt:

$$
(1)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial\tau_{11}'}{\partial\tau_{11}}=n\dfrac{C_2^2}{N^2}, & \dfrac{\partial\tau_{11}'}{\partial\tau_{12}}=-\dfrac{2nC_2.D_2}{N^2}, & \dfrac{\partial\tau_{11}'}{\partial\tau_{22}}=n\dfrac{D_2^2}{N^2},\\[2ex]
\dfrac{\partial\tau_{12}'}{\partial\tau_{11}}=n\dfrac{C_2.C_3}{N^2}, & \dfrac{\partial\tau_{12}'}{\partial\tau_{12}}=-\dfrac{n(C_2.D_3+C_3.D_2)}{N^2}, & \dfrac{\partial\tau_{12}'}{\partial\tau_{22}}=n\dfrac{D_2.D_3}{N^2},\\[2ex]
\dfrac{\partial\tau_{22}'}{\partial\tau_{11}}=n\dfrac{C_3^2}{N^2}, & \dfrac{\partial\tau_{22}'}{\partial\tau_{12}}=-\dfrac{2nC_3.D_3}{N^2}, & \dfrac{\partial\tau_{22}'}{\partial\tau_{22}}=n\dfrac{D_3^2}{N^2}.
\end{cases}
$$

Hierbei ist gesetzt:

$$
\begin{gathered}
C_2=c_2-a_2\tau_{21}-b_2\tau_{22};\quad C_3=-c_3+a_3\tau_{21}+b_3\tau_{22},\\
D_2=d_2-a_2\tau_{11}-b_2\tau_{12};\quad D_3=-d_3+a_3\tau_{11}+b_3\tau_{12},\\
N=C_3\,.\,D_2-C_2\,.\,D_3.
\end{gathered}
$$

Nennen wir v_1', v_2' die Argumente der transformirten Thetafunctionen, u_1', u_2' die Argumente der transformirten hyperelliptischen Functionen, so finden die Beziehungen statt:

$$
(2)\quad \begin{cases} u_1'=C_{11}.v_1'+C_{12}.v_2',\\ u_2'=C_{21}.v_1'+C_{22}.v_2', \end{cases}
$$

ferner:

$$
(3)\quad \begin{cases} u_1'=M_0.u_1+M_1.u_2,\\ u_2'=M_2.u_1+M_3.u_2, \end{cases}
$$

wobei die Relationen bestehen;

$$
(4)\quad \begin{aligned}
NKM_0&=n(C_{11}.C_2+C_{12}.C_3)\,K_{22}+n(C_{11}.D_2+C_{12}.D_3)\,K_{21},\\
NKM_1&=-n(C_{11}.D_2+C_{12}.D_3)\,K_{11}-n(C_{11}.C_2+C_{12}.C_3)\,K_{12},\\
NKM_2&=n(C_{21}.C_2+C_{22}.C_3)\,K_{22}+n(C_{21}.D_2+C_{22}.D_3)\,K_{21},\\
NKM_3&=-n(C_{21}.D_2+C_{22}.D_3)\,K_{11}-n(C_{21}.C_2+C_{22}.C_3)\,K_{12}.
\end{aligned}
$$

Das ganze Problem kommt nun darauf hinaus, Differentialbeziehungen zwischen den Grössen M und den Grössen $\varkappa$, λ, μ herzustellen.

Es ist:

$$
(5)\quad \frac{\partial c}{\partial\varkappa}=\frac{\partial c}{\partial\tau_{11}'}\,\frac{\partial\tau_{11}'}{\partial\varkappa}+\frac{\partial c}{\partial\tau_{12}'}\,\frac{\partial\tau_{12}'}{\partial\varkappa}+\frac{\partial c}{\partial\tau_{22}'}\,\frac{\partial\tau_{22}'}{\partial\varkappa}.
$$

$$\frac{\partial \tau'_{em}}{\partial \varkappa} = \frac{\partial \tau'_{em}}{\partial \tau_{11}} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \tau'_{em}}{\partial \tau_{12}} \frac{\partial \tau_{12}}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \tau'_{em}}{\partial \tau_{22}} \frac{\partial \tau_{22}}{\partial \varkappa} .$$

Setzen wir daher für den Augenblick:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= K_{12}^2 + 2\varkappa^2 . K_{12} . K_{22} + \varkappa^4 . K_{22}^2 , \\
Z_2 &= K_{11} . K_{12} + \varkappa^2 (K_{12} . K_{21} + K_{11} . K_{22}) + \varkappa^4 . K_{22} . K_{11} , \\
Z_3 &= K_{11}^2 + 2\varkappa^2 . K_{11} . K_{21} + \varkappa^4 . K_{21}^2 .
\end{aligned}$$

so wird:

$$(6) \left\{ \begin{aligned}
&\varkappa . \varkappa_1^2 . \mu_\varkappa^2 . \lambda_\varkappa^2 . K^2 . N^2 . \frac{\partial \tau'_{11}}{\partial \varkappa} \\
&= - 2n\pi i (C_2^2 . Z_1 + 2 C_2 . D_2 . Z_2 + D_2^2 . Z_3), \\
&\varkappa . \varkappa_1^2 . \mu_\varkappa^2 . \lambda_\varkappa^2 . K^2 . N^2 . \frac{\partial \tau'_{12}}{\partial \varkappa} \\
&= - 2n\pi i (C_2 . C_3 . Z_1 + (C_2 . D_3 + D_2 . C_3) Z_2 + D_2 . D_3 . Z_3), \\
&\varkappa . \varkappa_1^2 . \mu_\varkappa^2 . \lambda_\varkappa^2 . K^2 . N^2 . \frac{\partial \tau'_{22}}{\partial \varkappa} \\
&= - 2n\pi i (C_3^2 . Z_1 + 2 C_3 . D_3 . Z_2 + D_3^2 . Z_3),
\end{aligned} \right.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in Gl. (5) ein, so folgen die fundamentalen Beziehungen:

$$(7) \left\{ \begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial \varkappa} &= \frac{c . c_1^2}{n . \varkappa . \varkappa_1^2 . \mu_\varkappa^2 . \lambda_\varkappa^2} [M_1 - \varkappa^2 . M_0)^2 + (l^2 + m^2)(M_1 - \varkappa^2 . M_0)(M_3 - \varkappa^2 . M_2) \\
&\qquad + l^2 m^2 (M_3 - \varkappa^2 . M_2)^2], \\
\frac{\partial l}{\partial \varkappa} &= \frac{l . l_1^2}{n . \varkappa . \varkappa_1^2 . \mu_\varkappa^2 . \lambda_\varkappa^2} [(M_1 - \varkappa^2 . M_0)^2 + (m^2 + c^2)(M_1 - \varkappa^2 . M_0)(M_3 - \varkappa^2 . M_2) \\
&\qquad + m^2 c^2 (M_3 - \varkappa^2 . M_2)^2], \\
\frac{\partial m}{\partial \varkappa} &= \frac{m . m_1^2}{n . \varkappa . \varkappa_1^2 . \mu_\varkappa^2 . \lambda_\varkappa^2} [(M_1 - \varkappa^2 . M_0)^2 + (c^2 + l^2)(M_1 - \varkappa^2 . M_0)(M_3 - \varkappa^2 . M_2) \\
&\qquad + c^2 l^2 (M_3 - \varkappa^2 . M_2)^2]
\end{aligned} \right.$$

Die entsprechenden Formeln für λ und μ entstehen aus den soeben aufgestellten durch cyklische Vertauschung von $\varkappa$, λ, μ, Aus diesen neun Formeln ergiebt sich dann ohne weiteres die von dem Verfasser entwickelte Formel:

$$(8) \qquad (M_0 . M_3 - M_1 . M_2)^3 = M^3 = n^3 F \frac{\varkappa . \lambda . \mu . \varkappa_1^2 . \lambda_1^2 . \mu_1^2 . \lambda_\varkappa^2 . \mu_\lambda^2 . \mu_\varkappa^2}{c . l . m . c_1^2 . l_1^2 . m_1^2 . l_c^2 . m_c^2 . m_c^2} ,$$

$$F = \begin{vmatrix} \frac{\partial c}{\partial \varkappa} & \frac{\partial l}{\partial \varkappa} & \frac{\partial m}{\partial \varkappa} \\ \frac{\partial c}{\partial \lambda} & \frac{\partial l}{\partial \lambda} & \frac{\partial m}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial c}{\partial \mu} & \frac{\partial l}{\partial \mu} & \frac{\partial m}{\partial \mu} \end{vmatrix} .$$

An Stelle des soeben entwickelten Systems von neun Gleichungen können noch andere Systeme gesetzt werden.

In der That es ist:

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{\partial c}{\partial \varkappa}\frac{\partial \varkappa}{\partial c} + \frac{\partial c}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial c} + \frac{\partial c}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial c},\\
0 &= \frac{\partial l}{\partial \varkappa}\frac{\partial \varkappa}{\partial c} + \frac{\partial l}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial c} + \frac{\partial l}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial c},\\
0 &= \frac{\partial m}{\partial \varkappa}\frac{\partial \varkappa}{\partial c} + \frac{\partial m}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial c} + \frac{\partial m}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial c}.
\end{aligned}
$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen:

$$
(9)\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \varkappa}{\partial c} &= \frac{n}{M^2}\frac{\varkappa.\varkappa_1^2}{c.c_1^2.l_c^2.m_c^2}[(M_1+c^2.M_3)^2-(\lambda^2+\mu^2)(M_1+c^2.M_3)(M_0+c^2.M_2)\\
&\qquad + \lambda^2.\mu^2(M_1+c^2.M_3)^2],\\
\frac{\partial \lambda}{\partial c} &= \frac{n}{M^2}\frac{\lambda.\lambda_1^2}{c.c_1^2.l_c^2.m_c^2}[(M_1+c^2.M_3)^2-(\mu^2+\varkappa^2)(M_1+c^2.M_3)(M_0+c^2.M_2)\\
&\qquad + \mu^2.\varkappa^2(M_1+c^2.M_3)^2],\\
\frac{\partial \mu}{\partial c} &= \frac{n}{M^2}\frac{\mu.\mu_1^2}{c.c_1^2.l_c^2.m_c^2}[(M_1+c^2.M_3)^2-(\varkappa^2+\lambda^2)(M_1+c^2.M_3)(M_0+c^2.M_2)\\
&\qquad + \varkappa^2.\lambda^2(M_1+c^2.M_3)^2].
\end{aligned}
\right.
$$

Die entsprechenden Formeln für c und m entstehen aus den obigen durch cyklische Vertauschung von c, l, m. Es ist dieses eine *zweite* Form unseres Gleichungssystemes. Wir können dieselbe unmittelbar aus der ursprünglichen ableiten, indem wir an Stelle von:

$$\varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ c,\ l,\ m,\quad M_0,\quad M_1,\quad M_2,\quad M_3$$

resp. setzen

$$c,\ l,\ m,\ \varkappa,\ \lambda,\ \mu,\quad \frac{nM_3}{M},\quad \frac{-nM_1}{M},\quad \frac{-nM_2}{M},\quad \frac{nM_0}{M}.$$

Es möge in Bezug hierauf auf Acta mathematica III, pag. 170 verwiesen werden.

Zu einer dritten Form gelangen wir auf folgende Weise.

Aus Gleichungssystem (7) folgt unmittelbar:

$$
\begin{aligned}
&(M_1 - \varkappa^2.M_0^2)^2\\
&= \frac{n.\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2}{l_c^2.m_c^2.m_l^2}\left(m_l^2\frac{c^3}{c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa} + c_m^2\frac{l^3}{l_1^2}\frac{\partial l}{\partial \varkappa} + l_c^2\frac{m^3}{m_1^2}\frac{\partial m}{\partial \varkappa}\right)\\
&= \frac{n.\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2}{l_c^2.m_c^2.m_l^2}\sum^c m_l^2\frac{c^3}{c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa},
\end{aligned}
$$

$$(M_3 - \varkappa^2 . M_2)(M_0 . \varkappa^2 - M_1)$$

$$= \frac{n.\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2}{l_c^2.m_c^2.m_l^2}\left(m_l^2 \frac{c}{c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa} + c_m^2 \frac{l}{l_1^2}\frac{\partial l}{\partial \varkappa} + l_c^2 \frac{m}{m_1^2}\frac{\partial m}{\partial \varkappa}\right)$$

$$= \frac{n.\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2}{l_c^2.m_c^2.m_l^2} \sum^c m_l^2 \frac{c}{c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa}.$$

$$(M_3 - \varkappa^2 . M_2)^2$$

$$= \frac{n.\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda_\varkappa^2}{l_c^2.m_c^2.m_l^2}\left(m_l^2 \frac{1}{c.c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa} + c_m^2 \frac{l}{l.l_1^2}\frac{\partial l}{\partial \varkappa} + l_c^2 \frac{1}{m.m_1^2}\frac{\partial m}{\partial \varkappa}\right)$$

$$= \frac{n.\varkappa.\varkappa_1^2.\mu_\varkappa^2.\lambda^2}{l_c^2.m_c^2.m_l^2} \sum^c m_l^2 \frac{1}{c.c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa}.$$

Sechs andere Gleichungen erhält man durch cyklische Vertauschung von $\varkappa$, λ, μ.

Aus diesen neun Gleichungen greifen wir die folgenden drei heraus:

$$\frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n.\lambda_\varkappa^2.\mu_\varkappa^2.\mu_\lambda^2}(M_1^2 - 2\varkappa^2.M_1.M_0 + \varkappa^4.M_0^2) = \frac{\varkappa.\varkappa_1^2}{\mu_\lambda^2} \sum^c m_l^2 \frac{c^3}{c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa},$$

$$\frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n.\lambda_\varkappa^2.\mu_\varkappa^2.\mu_\lambda^2}(M_1^2 - 2\lambda^2.M_1.M_0 + \lambda^4.M_0^2) = \frac{\lambda.\lambda_1^2}{\varkappa_\mu^2} \sum^c m_l^2 \frac{c^3}{c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \lambda},$$

$$\frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n.\lambda_\varkappa^2.\mu_\varkappa^2.\mu_\lambda^2}(M_1^2 - 2\mu^2.M_1.M_0 + \mu^4.M_0^2) = \frac{\mu.\mu_1^2}{\lambda_\varkappa^2} \sum^c m_l^2 \frac{c^3}{c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \mu}.$$

Hieraus folgen die Formeln:

$$\tag{10} \left\{ \begin{aligned} \frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n} M_0^2 &= \varkappa.\varkappa_1^2 \sum^c m_l^2 \frac{c^3}{c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa} + \lambda.\lambda_1^2 \sum^c m_l^2 \frac{c^3}{c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \lambda} \\ &\quad + \mu.\mu_1^2 \sum^c m_l^2 \frac{c^3}{c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \mu} \\ &= \sum^\varkappa \sum^c \varkappa.\varkappa_1^2.m_l^2 \frac{c^3}{c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa}, \\ 2\frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n} M_0.M_1 &= \sum^\varkappa \sum^c \varkappa.\varkappa_1^2(\lambda^2+\mu^2).m_l^2 \frac{c^3}{c_1^3}\frac{\partial c}{\partial \varkappa}, \\ \frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n} M_1^2 &= \sum^\varkappa \sum^c \varkappa.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2.m_l^2 \frac{c^3}{c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa}. \end{aligned} \right.$$

Genau so folgen die Formeln:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n} M_2^2 &= \sum^\varkappa \sum^c \varkappa.\varkappa_1^2.m_l^2 \frac{1}{c.c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa}, \\ 2\frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n} M_2.M_3 &= \sum^\varkappa \sum^c \varkappa.\varkappa_1^2(\lambda^2+\mu^2)\frac{m_l^2}{c.c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa}, \\ \frac{l_c^2.m_c^2.m_l^2}{n} M_3^2 &= \sum^\varkappa \sum^c \varkappa.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2.m_l^2 \frac{1}{c.c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa}, \end{aligned} \right.$$

$$(10)\left\{\begin{aligned}
\frac{l_c^2.m_c^2.m_i^2}{n} M_0 . M_2 &= -\sum^{\varkappa}\sum^{c} \varkappa . \varkappa_1^2 . m_i^2 \frac{c}{c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa},\\
\frac{l_c^2.m_c^2.m_i^2}{n} (M_0 . M_3 + M_1 . M_2) &= -\sum^{\varkappa}\sum^{c} \varkappa . \varkappa_1^2 (\lambda^2+\mu^2) m_i^2 \frac{c}{c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa},\\
\frac{l_c^2.m_c^2.m_i^2}{n} M_1 . M_3 &= -\sum^{\varkappa}\sum^{c} \varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2 . m_i^2 \frac{c}{c_1^2}\frac{\partial c}{\partial \varkappa}.
\end{aligned}\right.$$

Es ist dieses eine *dritte* Form unseres ursprünglichen Gleichungssystems.

Eine vierte endlich würde sich ergeben, wenn wir in dem letzten Gleichungssysteme an Stelle von

$$\varkappa,\quad \lambda,\quad \mu,\quad c,\quad l,\quad m,\quad M_0,\quad M_1,\quad M_2,\quad M_3$$

setzen resp.

$$c,\quad l,\quad m,\quad \varkappa,\quad \lambda,\quad \mu,\quad \frac{nM_3}{M},\quad \frac{-nM_1}{M},\quad \frac{-nM_2}{M},\quad \frac{nM_0}{M}.$$

Damit sind die Fundamentalformeln entwickelt.

Dieselben lassen mannigfaltige Anwendungen zu, wie in weiteren Arbeiten nachgewiesen werden soll.

Rostock, im October 1884.

Ueber einige Differentialbeziehungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen.

(Zweite Mittheilung).

Von

Martin Krause in Rostock.

Es sollen im Folgenden einige Differentialgleichungen aufgestellt werden, denen der Zähler und der Nenner der Transformationsgleichungen im Gebiete der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung Genüge leisten. In der Theorie der elliptischen Functionen hat zuerst Jacobi auf derartige Gleichungen hingewiesen (siehe gesammelte Werke, Band I, pag. 266 sequ.). Es möge in Bezug auf dieselben auch auf die Lehrbücher über elliptische Functionen von Briot und Bouquet (II ed. pag. 527 sequ.), Cayley (pag. 224 sequ.), Enneper (pag. 372 sequ.) verwiesen werden. In dem Lehrbuche von Enneper findet sich überdies an der genannten Stelle eine dankenswerthe Litteraturangabe über diesen und einen ähnlichen Gegenstand.

Im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen sind derartige Gleichungen noch nicht aufgestellt worden, wenigstens ist dem Verfasser nichts darüber bekannt geworden.

Bei der Ableitung der Gleichungen beschränken wir uns der Einfachheit halber auf einen Repräsentanten. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass hiermit keinerlei irgend wie wesentliche Beschränkung involvirt ist.

Bemerkt möge ferner werden, dass die folgenden Betrachtungen sich wesentlich auf die Formeln stützen, die in der hier vorangehenden Arbeit gleichen Titels entwickelt worden sind.

§ 1.

Ableitung einiger Differentialgleichungen für die ursprünglichen und transformirten Thetafunctionen.

Es gelten die Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial u_1^2} = -2\sum^{\varkappa} \dfrac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial \varkappa}\, \varkappa . \varkappa_1^{\,2}, \\ \dfrac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = -\sum^{\varkappa} \dfrac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial \varkappa}\, \varkappa . \varkappa_1^{\,2}(\lambda^2+\mu^2), \\ \dfrac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial u_2^2} = -2\sum^{\varkappa} \dfrac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial \varkappa}\, \varkappa . \varkappa_1^{\,2}. \lambda^2 . \mu^2 . \end{cases}$$

In denselben ist die Summation nach $\varkappa$, λ, μ zu nehmen, es ist ferner

$$u_1 = K_{11}.v_1 + K_{12}.v_2,$$
$$u_2 = K_{21}.v_1 + K_{22}.v_2,$$

oder umgekehrt

$$K.v_1 = K_{22}.u_1 - K_{12}.u_2,$$
$$K.v_2 = -K_{21}.u_1 + K_{11}.u_2.$$

In Bezug auf diese Gleichungen möge auf eine Arbeit des Verfassers verwiesen werden, die sich im 98. Bande des Kronecker'schen Journals befindet.

Wir wollen setzen:

$$(2)\quad \begin{aligned} &\vartheta_\alpha(v_1, v_2) = f_\alpha(u_1, u_2) \quad \text{oder einfach:} \\ &\vartheta_\alpha(v_1, v_2) = f_\alpha . \end{aligned}$$

Die zu entwickelnden Formeln gelten einstweilen für *alle* Thetafunctionen. Wir wollen unter solchen Umständen den Index α zunächst fortlassen.

Nun ist:

$$\frac{\partial \vartheta(v_1, v_2)}{\partial \varkappa} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial \varkappa} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial \varkappa} + \frac{\partial f}{\partial \varkappa}$$

oder also:

$$\frac{\partial \vartheta(v_1 . v_2)}{\partial \varkappa} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\left(v_1 \frac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa} + v_2 \frac{\partial K_{12}}{\partial \varkappa}\right) + \frac{\partial f}{\partial u_2}\left(v_1 \frac{\partial K_{21}}{\partial \varkappa} + v_2 \frac{\partial K_{22}}{\partial \varkappa}\right) + \frac{\partial f}{\partial \varkappa}$$

$$= \frac{1}{K}\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1\, \varkappa_{11} + u_2 \varkappa_{12}) + \frac{1}{K}\frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1 . \varkappa_{21} + u_2 . \varkappa_{22}) + \frac{\partial f}{\partial \varkappa}$$

$$= \frac{1}{K}\sum_1^2{}^{i} \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_1 . \varkappa_{i1} + u_2 . \varkappa_{i2}) + \frac{\partial f}{\partial \varkappa} .$$

Hierbei ist gesetzt:

$$\varkappa_{11} = K_{22}\frac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa} - K_{21}\frac{\partial K_{12}}{\partial \varkappa}, \quad \varkappa_{12} = -K_{12}\frac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa} + K_{11}\frac{\partial K_{12}}{\partial \varkappa},$$

$$\varkappa_{21} = K_{22}\frac{\partial K_{21}}{\partial \varkappa} - K_{21}\frac{\partial K_{22}}{\partial \varkappa}, \quad \varkappa_{22} = -K_{12}\frac{\partial K_{21}}{\partial \varkappa} + K_{11}\frac{\partial K_{22}}{\partial \varkappa} .$$

Demgemäss erhalten wir folgende drei Differentialgleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \dfrac{2}{K}\sum\limits_1^2{}^i \dfrac{\partial f}{\partial u_i}\sum{}^\varkappa (u_1 . \varkappa_{i1} + u_2 . \varkappa_{i2})\varkappa . \varkappa_1{}^2 \\ \qquad\qquad + 2\sum{}^\varkappa \dfrac{\partial f}{\partial \varkappa}\, \varkappa . \varkappa_1{}^2 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} + \dfrac{1}{K}\sum\limits_1^2{}^i \dfrac{\partial f}{\partial u_i}\sum{}^\varkappa (u_1 . \varkappa_{i1} + u_2 . \varkappa_{i2})\varkappa . \varkappa_1{}^2(\lambda^2+\mu^2) \\ \qquad\qquad + \sum{}^\varkappa \dfrac{\partial f}{\partial \varkappa}\, \varkappa . \varkappa_1{}^2(\lambda^2+\mu^2) = 0; \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} + \dfrac{2}{K}\sum\limits_1^2{}^i \dfrac{\partial f}{\partial u_i}\sum{}^\varkappa (u_1 . \varkappa_{i1} + u_2 . \varkappa_{i2})\varkappa . \varkappa_1{}^2 . \lambda^2 . \mu^2 \\ \qquad\qquad + 2\sum{}^\varkappa \dfrac{\partial f}{\partial \varkappa}\, \varkappa . \varkappa_1{}^2 . \lambda^2 . \mu^2 = 0. \end{cases}$$

Die Summe nach $\varkappa$ ist über $\varkappa$, λ, μ zu erstrecken.

Wir setzen nun:

$$u_1' = M_0 . u_1 + M_1 . u_2,$$
$$u_2' = M_2 . u_1 + M_3 . u_2,$$

also umgekehrt:

$$M . u_1 = M_3 . u_1' - M_1 . u_2',$$
$$M . u_2 = - M_2 . u_1' + M_0 . u_2'.$$

Die transformirten Moduln mögen durch c, l, m bezeichnet werden, die den Grössen $\tau_{i\varkappa}$, v_1, v_2, K, $\varkappa$ entsprechenden Grössen durch $\tau'_{i\varkappa}$, v_1', v_2', C, c, ferner werde gesetzt — und zwar für die transformirten Moduln links und rechts:

$$(4)\quad \begin{aligned} \vartheta_\alpha(v_1', v_2') &= F_\alpha(u_1', u_2') \quad \text{oder auch} \\ \vartheta_\alpha(v_1', v_2') &= F_\alpha. \end{aligned}$$

Auch hier möge der Index α einstweilen fortgelassen werden.

Dann bleiben die Gleichungen (3) ungeändert, wenn an Stelle von:

$$f,\ u_1,\ u_2,\ \varkappa_{ij},\ \varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ K$$

gesetzt wird:

$$F,\ u_1',\ u_2',\ c_{ij},\ c,\ l,\ m,\ C.$$

Ehe wir nun weitergehen, möge an die Formeln erinnert werden, die in der in der Einleitung citirten Arbeit enthalten sind. Aus denselben ergeben sich unmittelbar die drei Gleichungen:

$$(5)\quad \begin{cases} 2M_0^2\sum{}^c \dfrac{\partial \varkappa}{\partial c}\, c . c_1{}^2 + 2M_0 . M_2\sum{}^c \dfrac{\partial \varkappa}{\partial c}\, c . c_1{}^2(m^2+l^2) \\ \qquad + 2M_2^2\sum{}^c \dfrac{\partial \varkappa}{\partial c}\, c . c_1{}^2 . m^2 . l^2 = 2n . \varkappa . \varkappa_1{}^2, \\ 2M_0 . M_1\sum{}^c \dfrac{\partial \varkappa}{\partial c}\, c . c_1{}^2 + (M_0 . M_3 + M_1 . M_2)\sum{}^c \dfrac{\partial \varkappa}{\partial c}\, c . c_1{}^2(m^2+l^2) \\ \qquad + 2M_2 . M_3\sum{}^c \dfrac{\partial \varkappa}{\partial c}\, c . c_1{}^2 . m^2 . l^2 = n\, \varkappa . \varkappa_1{}^2(\lambda^2+\mu^2), \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} 2M_1^2 \sum^c \frac{\partial \varkappa}{\partial c}\, c.c_1^2 + 2M_1.M_3 \sum^c \frac{\partial \varkappa}{\partial c}\, c.c_1^2.m^2.l^2 \\ \qquad\qquad + \; 2M_3^2 \sum^c \frac{\partial \varkappa}{\partial c}\, c.c_1^2.m^2.l^2 = 2n.\varkappa.\varkappa_1^2.\lambda^2.\mu^2, \end{cases}$$

und sechs weitere, wenn auf $\varkappa$, λ, μ die cyklischen Vertauschungen angewandt werden.

Mit Hülfe dieser Beziehungen sollen die Gleichungen, denen die Grösse F Genüge leistet, transformirt werden.

Wir setzen:

$$X_1 = \frac{2}{C} \sum_1^2{}^i \frac{\partial F}{\partial u_i'} \sum^c (u_1'.c_{i1} + u_2'.c_{i2}) c.c_1^2 \quad + 2\sum^c \frac{\partial F}{\partial c} c.c_1^2,$$

$$X_2 = \frac{1}{C} \sum_1^2{}^i \frac{\partial F}{\partial u_i'} \sum^c (u_1'.c_{i1} + u_2'.c_{i2}) c.c_1^2(m^2+l^2) + \sum^c \frac{\partial F}{\partial c} c.c_1^2(m^2+l^2),$$

$$X_3 = \frac{2}{C} \sum_1^2{}^i \frac{\partial F}{\partial u_i'} \sum^c (u_1'.c_{i1} + u_2'.c_{i2}) c.c_1^2.m^2.l^2 + 2\sum^c \frac{\partial F}{\partial c} c.c_1^2.m^2.l^2.$$

Die Summation nach c ist über c, l, m zu erstrecken.

Bei dieser Bezeichnungsweise können die drei Gleichungen, denen die Grösse F Genüge leistet, geschrieben werden:

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} M_3^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2} M_3.M_2 + \frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2} M_2^2 = -X_1.M^2, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} M_3.M_1 - \frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2}(M_3.M_0 + M_2.M_1) + \frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2} M_2.M_0 = X_2.M^2, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} M_1^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2} M_1.M_0 + \frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2} M_0^2 = -X_3.M^2. \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem können wir als lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten $\frac{\partial^2 F}{\partial u_i^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2}$ ansehen. Die Auflösung ergiebt die Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} + M_0^2.X_1 + 2M_0.M_2.X_2 + M_2^2.X_3 = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2} + M_0.M_1.X_1 + (M_0.M_3 + M_1.M_2)X_2 + M_2.M_3.X_3 = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2} + M_1^2.X_1 + 2M_1.M_3.X_2 + M_3^2.X_3 = 0. \end{cases}$$

Nun ist:

$$\frac{\partial F}{\partial u_1'} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial u_1'} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial u_1'} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{M_3}{M} - \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{M_2}{M},$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_2'} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial u_2'} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial u_2'} = -\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{M_1}{M} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{M_0}{M},$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \sum^{\varkappa} \frac{\partial F}{\partial \varkappa} \frac{\partial \varkappa}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial c}$$

$$= \sum^{\varkappa} \frac{\partial F}{\partial \varkappa} \frac{\partial \varkappa}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial u_1} \left(u_1' \frac{\partial \frac{M_3}{M}}{\partial c} - u_2' \frac{\partial \frac{M_1}{M}}{\partial c} \right)$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial u_2} \left(-u_1' \frac{\partial \frac{M_2}{M}}{\partial c} + u_2' \frac{\partial \frac{M_0}{M}}{\partial c} \right)$$

und ähnliche Formeln ergeben sich für die Differentialquotienten nach l und m.

Hieraus folgt, dass wir die erste der Gleichungen (7) schreiben können.

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} + 2 \sum_1^{2} {}^{i} \frac{\partial F}{\partial u_i} (u_1 . a_{i1} + u_2 . a_{i2}) + 2 \sum^{\varkappa} \frac{\partial F}{\partial \varkappa} \alpha_\varkappa = 0.$$

Es handelt sich darum, die Werthe der Grössen a_{ij} und $\alpha_\varkappa$, α_λ, α_μ zu bestimmen. Für $\alpha_\varkappa$ ergiebt sich unmittelbar der Werth:

$$M_0^2 \sum^{c} \frac{\partial \varkappa}{\partial c} c . c_1^2 + M_0 . M_2 \sum^{c} \frac{\partial \varkappa}{\partial c} c . c_1^2 (m^2 + l^2) + M_2^2 \sum^{c} \frac{\partial \varkappa}{\partial c} c . c_1^2 . m^2 . l^2$$

d. h.

$$\alpha_\varkappa = n \varkappa . \varkappa_1^2 .$$

Genau so folgt:

$$\alpha_\lambda = n \lambda . \lambda_1^2 , \quad \alpha_\mu = n \mu . \mu_1^2$$

Der Werth von a_{11} nimmt die Form an:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{C . M} \sum^{c} \Bigg[M_3 (M_0 . c_{11} + M_2 . c_{12}) - M_1 (M_0 . c_{21} + M_2 . c_{22})$$

$$+ C . M \left(M_0 \frac{\partial \frac{M_3}{M}}{\partial c} - M_2 \frac{\partial \frac{M_1}{M}}{\partial c} \right) \Bigg] G_c$$

wobei:

$$G_c = M_0^2 . c . c_1^2 + M_0 . M_2 . c . c_1^2 (m^2 + l^2) + M_2^2 . c . c_1^2 . m^2 . l^2$$

ist.

Die Summe ist nach c über c, l, m zu nehmen.

Wir wollen nun für den Augenblick setzen:

$$c'_{11} = C_{22} \frac{\partial C_{11}}{\partial \varkappa} - C_{21} \frac{\partial C_{12}}{\partial \varkappa} \text{ etc. etc.}$$

Führen wir dann in dem Ausdrucke von a_{11} an Stelle der Differentialquotienten nach c, l, m die Differentialquotienten nach $\varkappa$, λ, μ ein, so ergiebt sich unter Rücksichtnahme auf die aufgestellten Fundamentalformeln:

$$\alpha_{11} = \frac{n}{CM} \sum^{\varkappa} \Big[M_3 (M_0 . c'_{11} + M_2 . c'_{12}) - M_1 (M_0 . c'_{21} + M_2 . c'_{22})$$
$$+ C.M \left(M_0 \frac{\partial \frac{M_3}{M}}{\partial \varkappa} - M_2 \frac{\partial \frac{M_1}{M}}{\partial \varkappa} \right) \Big] \varkappa . \varkappa_1^2,$$

wobei die Summe jetzt über $\varkappa, \lambda, \mu$ zu nehmen ist.

Diesen Ausdruck können wir in die Form bringen:

$$a_{11} = \frac{n}{CM} \sum^{\varkappa} \Big[M_3 (M_0 . c'_{11} + M_2 . c'_{12}) - M_1 (M_0 . c'_{21} + M_2 . c'_{22})$$
$$+ C \left(M_1 \frac{\partial M_2}{\partial \varkappa} - M_3 \frac{\partial M_0}{\partial \varkappa} \right) \Big] \varkappa . \varkappa_1^2 .$$

Bis hierher gelten die Betrachtungen ganz allgemein. Wir beschränken uns jetzt auf einen Repräsentanten, nämlich:

$$\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Für denselben wird:

$$(9) \quad \begin{cases} K . M_0 = n (C_{11} . K_{22} - C_{12} . K_{21}), & K . M_2 = n (C_{21} . K_{22} - C_{22} . K_{21}), \\ K \; M_1 = n (C_{12} . K_{11} - C_{11} . K_{12}), & K . M_3 = n (C_{22} . K_{11} - C_{21} . K_{12}). \end{cases}$$

Mit Hülfe einfacher Schlüsse folgt dann:

$$a_{11} = \frac{n}{K} \sum^{\varkappa} \varkappa . \varkappa_1^2 . \varkappa_{11} .$$

Ganz analog sind die drei andern Grössen a_{ij} zu bestimmen. Ganz analog ferner sind die beiden andern Gleichungen zu transformiren. Es ergiebt sich dann das wichtige Resultat, dass die Gleichungen, denen die Grösse F Genüge leistet, in die Form gebracht werden können:

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} + \dfrac{2n}{K} \displaystyle\sum_1^{2} {}^{i} \dfrac{\partial F}{\partial u_i} \sum^{\varkappa} (u_1 . \varkappa_{i1} + u_2 . \varkappa_{i2}) \, \varkappa . \varkappa_1^2 \\ \qquad + 2n \displaystyle\sum^{\varkappa} \dfrac{\partial F}{\partial \varkappa} \, \varkappa . \varkappa_1^2 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2} + \dfrac{n}{K} \displaystyle\sum_1^{2} {}^{i} \dfrac{\partial F}{\partial u_i} \sum^{\varkappa} (u_1 . \varkappa_{i1} + u_2 . \varkappa_{i2}) \, \varkappa . \varkappa_1^2 (\lambda^2 + \mu^2) \\ \qquad + n \displaystyle\sum^{\varkappa} \dfrac{\partial F}{\partial \varkappa} \, \varkappa . \varkappa_1^2 (\lambda^2 + \mu^2) = 0, \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} + \frac{2n}{K}\sum_1^2{}^i \frac{\partial F}{\partial u_i} \sum^{\varkappa} (u_1 . \varkappa_{i1} + u_2 . \varkappa_{i2})\, \varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2 \\ \qquad + 2n \sum^{\varkappa} \frac{\partial F}{\partial \varkappa}\, \varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2 = 0. \end{cases}$$

Es unterscheiden sich diese Gleichungen von denen, welchen die Function f Genüge leistet, nur dadurch, dass bei einer Reihe von Gliedern der Factor n hinzutritt.

§ 2.

Ableitung von Differentialgleichungen für den Zähler und Nenner der Transformationsgleichungen.

Wir wollen uns nun zunächst mit der Transformation der ersten der drei Gleichungen (10) beschäftigen.

Die Gleichung kann in die Form gebracht werden:

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \log F}{\partial u_1^2} + \left(\frac{\partial \log F}{\partial u_1}\right)^2 + \frac{2n}{K}\sum_1^2{}^i \frac{\partial \log F}{\partial u_i} \sum^{\varkappa} (u_1 . \varkappa_{i1} + u_2 . \varkappa_{i2})\, \varkappa . \varkappa_1^2$$
$$+ 2n \sum^{\varkappa} \frac{\partial \log F}{\partial \varkappa}\, \varkappa . \varkappa_1^2 = 0,$$

denn es ist:

$$\frac{\partial^2 \log F}{\partial u_1^2} + \left(\frac{\partial \log F}{\partial u_1}\right)^2 = \frac{1}{F}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2}.$$

Genau so folgt für f die Gleichung:

$$(12) \quad \frac{\partial^2 \log f}{\partial u_1^2} + \left(\frac{\partial \log f}{\partial u_1}\right)^2 + \frac{2}{K}\sum_1^2{}^i \frac{\partial \log f}{\partial u_i} \sum^{\varkappa} (u_1 . \varkappa_{i1} + u_2 . \varkappa_{i2})\, \varkappa . \varkappa_1^2$$
$$+ 2 \sum^{\varkappa} \frac{\partial \log f}{\partial \varkappa}\, \varkappa . \varkappa_1^2 = 0.$$

Wir setzen nun:

$$(13) \qquad W_\alpha = \frac{F_\alpha}{f_\alpha^n}$$

und lassen einstweilen den Index α fort, dann erhalten wir für W die Gleichung:

$$(14) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial u_1^2} + 2n \frac{\partial W}{\partial u_1}\,\frac{\partial \log f}{\partial u_1} + \frac{2n}{K}\sum_1^2{}^i \frac{\partial W}{\partial u_i} \sum^{\varkappa} (u_1 . \varkappa_{i1} + u_2 . \varkappa_{i2})\varkappa . \varkappa_1^2$$
$$+ 2n \sum^{\varkappa} \frac{\partial W}{\partial \varkappa}\, \varkappa\, \varkappa_1^2 + n(1-n)\, W \frac{\partial^2 \log f}{\partial u_1^2} = 0.$$

Wir wollen jetzt unter $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$, $\vartheta_\beta(v_1, v_2)$, $\vartheta_\gamma(v_1, v_2)$, $\vartheta_\delta(v_1, v_2)$ vier Thetafunctionen verstehen, die mit einander ein Göpel'sches Quadrupel bilden und setzen:

$$(15) \qquad x_1 = \frac{f_\beta}{f_\alpha}, \quad x_2 = \frac{f_\gamma}{f_\alpha}, \quad x_3 = \frac{f_\delta}{f_\alpha}.$$

Es kann dann W als Function von $x_1, x_2, x_3, \varkappa, \lambda, \mu$ angesehen werden und zwar wird:

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = \sum^r \frac{\partial W}{\partial x_r}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_i}\right), \qquad \frac{\partial W}{\partial \varkappa} = \left(\frac{\partial W}{\partial \varkappa}\right) + \sum^r \frac{\partial W}{\partial x_r}\left(\frac{\partial x_r}{\partial \varkappa}\right),$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_1^2} = \sum^r \frac{\partial^2 W}{\partial x_r^2}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 W}{\partial x_r \partial x_s}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial x_s}{\partial u_1}\right) + \sum^r \frac{\partial W}{\partial x_r}\left(\frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1^2}\right).$$

Führen wir den Index α ein, so nimmt die Gleichung für W_α die Form an:

$$\begin{aligned}
&\sum^r \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r^2}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r \partial x_s}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial x_s}{\partial u_1}\right) \\
&\quad + 2n\sum^\varkappa \frac{\partial W_\alpha}{\partial \varkappa}\varkappa . \varkappa_1^2 + n(1-n) W_\alpha \frac{\partial^2 \log f_\alpha}{\partial u_1^2} \\
&\quad + \quad \sum^r \frac{\partial W_\alpha}{\partial x_r}\Bigg[\frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1^2} + 2n \frac{\partial \log f_\alpha}{\partial u_1}\frac{\partial x_r}{\partial u_1} \\
&\quad + \frac{2n}{K}\sum_1^{2\,i} \frac{\partial x_r}{\partial u_i}\sum^\varkappa (u_1 . \varkappa_{i1} + u_2 . \varkappa_{i2})\varkappa . \varkappa_1^2 + 2n\sum^\varkappa \frac{\partial x_r}{\partial \varkappa}\varkappa . \varkappa_1^2\Bigg] = 0 .
\end{aligned}$$

Nun genügen die Grössen $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma, f_\delta$ der Gleichung (12). Hieraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \log x_1}{\partial u_1^2} + \left(\frac{\partial \log f_\beta}{\partial u_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \log f_\alpha}{\partial u_1}\right)^2 \\
&+ \frac{2}{K}\sum_1^{2\,i} \frac{\partial \log x_1}{\partial u_i}\sum^\varkappa (u_1 \, \varkappa_{i1} + u_2 . \varkappa_{i2})\varkappa . \varkappa_1^2 + 2\sum^\varkappa \frac{\partial \log x_1}{\partial \varkappa}\varkappa . \varkappa_1^2 = 0,
\end{aligned}$$

oder also:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \log x_1}{\partial u_1^2} + \left(\frac{\partial \log x_1}{\partial u_1}\right)^2 + 2\frac{\partial \log f_\alpha}{\partial u_1}\frac{\partial \log x_1}{\partial u_1} \\
&+ \frac{2}{K}\sum_1^{2\,i} \frac{\partial \log x_1}{\partial u_i}\sum^\varkappa (u_1 . \varkappa_{i1} + u_2 . \varkappa_{i2})\varkappa . \varkappa_1^2 + 2\sum^\varkappa \frac{\partial \log x_1}{\partial \varkappa}\varkappa . \varkappa_1^2 = 0,
\end{aligned}$$

oder also:

$$\begin{aligned}
(16) \qquad &\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2} + 2\frac{\partial \log f_\alpha}{\partial u_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \frac{2}{K}\sum^\varkappa \frac{\partial x_1}{\partial u_i}(u_1 . \varkappa_{i1} + u_2 . \varkappa_{i2})\varkappa . \varkappa_1^2 \\
&+ 2\sum^\varkappa \frac{\partial x_1}{\partial \varkappa}\varkappa . \varkappa_1^2 = 0.
\end{aligned}$$

Die analogen Gleichungen gelten für x_2 und x_3.

Berücksichtigen wir diese drei Gleichungen, so nimmt die Gleichung für W_α die Form an:

$$\sum^r \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r^2}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)^2 - 2\sum \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r \partial x_s}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial x_s}{\partial u_1}\right) + \sum^r \frac{\partial W_\alpha}{\partial x_r}(1-n)\frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1^2}$$
$$+ 2n\sum^\varkappa \frac{\partial W_\alpha}{\partial \varkappa}\varkappa . \varkappa_1^2 + n(1-n)\, W\, \frac{\partial^2 \log f_\alpha}{\partial u_1^2} = 0.$$

Genau so ergeben sich die Gleichungen:

$$\sum^r \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r^2}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_2}\right) + \sum \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r \partial x_s}\left(\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial x_s}{\partial u_2}\right) + \left(\frac{\partial x_r}{\partial u_2}\right)\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)\right)$$
$$+ \sum^r \frac{\partial W_\alpha}{\partial x_r}(1-n)\frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1 \partial u_2} + n\sum^\varkappa \frac{\partial W_\alpha}{\partial \varkappa}\varkappa . \varkappa_1^2(\lambda^2 + \mu^2)$$
$$+ n(1-n)\, W\, \frac{\partial^2 \log f_\alpha}{\partial u_1 \partial u_2} = 0,$$

$$\sum^r \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r^2}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_2}\right)^2 + \sum \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r \partial x_s}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_2}\right)\left(\frac{\partial x_s}{\partial u_2}\right) + \sum^r \frac{\partial W_\alpha}{\partial x_r}(1-n)\frac{\partial^2 x_r}{\partial u_2^2}$$
$$+ 2n\sum^\varkappa \frac{\partial W_\alpha}{\partial \varkappa}\varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2 + n(1-n)\, W\, \frac{\partial^2 \log f_\alpha}{\partial u_2^2} = 0,$$

Diese drei Gleichungen mögen das Gleichungssystem (17) bilden. Ihnen leistet die Function genüge:

$$W_\alpha = \frac{F_\alpha(u_1', u_2')}{f_\alpha(u_1, u_2)^n} = \frac{\vartheta_\alpha(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})}{\vartheta_\alpha(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})^n}.$$

Die Gleichungen erhalten eine bessere Form, wenn wir:

(18)
$$Z_\alpha = W_\alpha . \vartheta_\alpha^{n-1} \quad \text{setzen, d. h.}$$
$$Z_\alpha = \frac{\vartheta_\alpha(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})\,\vartheta_\alpha^{n-1}}{\vartheta_\alpha(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})^n}.$$

Zu dem Behuf setzen wir:

(19)
$$\frac{\partial^2 \log f_\alpha}{\partial u_i^2} = \frac{1}{\vartheta_\alpha}\left(\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial u_i^2}\right)_{v_1=v_2=0} + f_{ii}^\alpha,$$
$$\frac{\partial^2 \log f_\alpha}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{1}{\vartheta_\alpha}\left(\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial u_1 \partial u_2}\right)_{v_1=v_2=0} + f_{12}^\alpha.$$

Es ist nun:

$$\frac{\partial W_\alpha}{\partial \varkappa} = \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \varkappa}\frac{1}{\vartheta_\alpha^{n-1}} + (1-n)\, Z_\alpha \frac{1}{\vartheta_\alpha^n}\frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \varkappa}$$

und ähnliche Gleichungen ergeben sich für λ und μ. Nun gelten die Gleichungen (1) für alle Werthe von v_1, v_2, also auch für $v_1 = v_2 = 0$. Nehmen wir das hinzu, so ergeben sich für Z_α die Differentialgleichungen:

$$\sum^r \frac{\partial^2 Z}{\partial x_r^2}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r \partial x_s}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial x_s}{\partial u_1}\right) + \sum^r \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_r}(1-n)\frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1^2}$$
$$+ 2n\sum^\varkappa \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \varkappa}\varkappa . \varkappa_1^2 + n(1-n) . Z_\alpha . f_{11}^\alpha = 0,$$

$$\sum^r \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r^2}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_2}\right) + \sum \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r \partial x_s}\left(\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial x_s}{\partial u_2}\right) + \left(\frac{\partial x_r}{\partial u_2}\right)\left(\frac{\partial x_s}{\partial u_1}\right)\right)$$
$$+ \sum^r \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_r}(1-n)\frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1 \partial u_2}$$
$$+ n\sum^\varkappa \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \varkappa}\varkappa . \varkappa_1^2(\lambda^2+\mu^2) + n(1-n) . Z_\alpha . f_{12}^\alpha = 0,$$

$$\sum^r \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r^2}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_2}\right)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial x_r \partial x_s}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_2}\right)\left(\frac{\partial x_s}{\partial u_2}\right) + \sum^r \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_r}(1-n)\frac{\partial^2 x_r}{\partial u_2^2}$$
$$+ 2n\sum^\varkappa \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \varkappa}\varkappa . \varkappa_1^2 . \lambda^2 . \mu^2 + n(1-n) . Z_\alpha . f_{22}^\alpha = 0.$$

Es ist dieses das Gleichungssystem (20).

Damit sind wir am Ziele. In einer früheren Arbeit, die sich im 25. Bande dieser Annalen befindet, ist gezeigt worden, dass und wie die Grössen

$$\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_i}\right)^2, \ \left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_2}\right), \ \left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial x_s}{\partial u_2}\right) + \left(\frac{\partial x_r}{\partial u_2}\right)\frac{\partial x_s}{\partial u_1}, \ \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_i^2}, \ \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1 \partial u_2}$$

sich als ganze rationale Functionen der Grössen x_r darstellen lassen. Die Coefficienten haben eine bestimmte Form und sind wirklich berechnet worden. Diese Ausdrücke sind ziemlich complicirt und mögen daher nicht wieder aufgenommen werden. Das analoge gilt von den Grössen f_{ii}^α, f_{12}^α.

Diese Differentialgleichungen, denen zunächst ein grosses theoretisches Interesse zukommt, lassen eine unmittelbare practische Anwendung auf die Multiplication der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung zu. Es befindet sich über dieselbe eine Arbeit des Verfassers im 17ten Bande dieser Annalen. Die Anwendung unserer Differentialgleichungen giebt für die Coefficienten in den Multiplicationsgleichungen eine Reihe von Recursionsformeln.

Rostock, den 11. Januar 1885.

Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raums.

Von

Hermann Schubert in Hamburg.

Um durch Anwendung des Princips von der Erhaltung der Anzahl (Kalkül der abzähl. Geom., § 4) die Zahl der Strahlen zu finden, welche vier gegebene Strahlen schneiden, ertheilt man diesen die besondere Lage, dass zwei von ihnen sich schneiden, und ebenso der dritte den vierten schneidet, beachtet dann, dass die gestellte Bedingung sowohl von dem Verbindungsstrahle der beiden Schnittpunkte, wie auch von dem Schnittstrahle der beiden Schnittebenen, also von *zwei* Strahlen erfüllt wird, und schliesst hieraus, dass, wie auch die vier gegebenen Strahlen liegen mögen, die gesuchte Zahl immer gleich zwei sein muss, wenn sie überhaupt endlich bleibt. Der wesentlich algebraische Charakter des hierbei angewendeten Princips führte mich auf den Gedanken, dasselbe auch auf die Gebilde des n-dimensionalen Raums, oder, was dasselbe ist, auf Gleichungssysteme zwischen n Variabeln anzuwenden. Dadurch kann man, wenn man die diese Gleichungssysteme constituirenden Gleichungen sämmtlich linear sein lässt, alle *fundamentalen Anzahlen des n-dimensionalen Raums* erhalten, d. h. alle Anzahlen für den n-dimensionalen Raum, deren entsprechende in unserm Raum beispielsweise angeben, wie viel Ebenen durch drei gegebene Punkte gehen, wie viel Strahlen durch einen gegebenen Punkt gehen und dabei zwei gegebene Strahlen schneiden, wie viel Strahlen vier gegebene Strahlen schneiden, u. s. w. Für den Punkt werden diese Anzahlen, auch im n-dimensionalen Raume, sämmtlich gleich 1, weil ein System von n linearen Gleichungen zwischen n Unbekannten immer nur durch eine einzige Wurzelgruppe befriedigt wird. Für den Strahl, die Ebene und höher-stufige, lineare Gebilde werden aber jene Anzahlen im Allgemeinen Functionen von n.

Im Folgenden sind nun einerseits zwei Formeln (§ 4) entwickelt, welche von den eben genannten Functionen die auf den *Strahl* be-

züglichen sämmtlich ohne Weiteres ergeben; andererseits sind auch die begrifflichen Grundlagen (§ 3) ausgebaut, auf denen man die Ableitung auch derjenigen Functionen von n unternehmen kann, welche die fundamentalen Anzahlen für die Ebene und höherstufige, lineare Gebilde ausdrücken. § 1 enthält einige Bemerkungen über die angewandte Terminologie und § 2 einige auf lineare Punkträume bezügliche, allgemeine Wahrheiten. Endlich sind in § 5 und § 6 grössere Beispiele für die durch § 4 ermöglichte Berechnung der fundamentalen Anzahlen des Strahls durchgeführt, und zwar in § 5 eine geometrisch und algebraisch ausgesprochene, n-dimensionale Erweiterung des Satzes, dass es in unserm Raume *zwei* Strahlen giebt, die vier gegebene Strahlen schneiden*).

§ 1.

Terminologie.

Wenn man in unserm Raume *drei* Arten von *Hauptelementen*, nämlich Punkte, Strahlen und Ebenen annimmt, so hat man in einem n-dimensionalen, linearen Raume n Arten von Hauptelementen zu unterscheiden, je nachdem man nämlich zwischen n Variabeln n, $n-1$, $n-2$, u. s. w. lineare Gleichungen bestehen lässt. Da ein System von $n-a$ Gleichungen zwischen n Variabeln durch ∞^a Werthgruppen der n Variabeln befriedigt wird, *so soll ein durch $n-a$ lineare Gleichungen zwischen n Variabeln definirtes Gebilde* ein (einem n-dimensionalen Raume angehöriges) a-stufiges Hauptelement oder *ein a-dimensionaler, linearer Raum genannt, und im Folgenden immer kurz mit $[a]$ bezeichnet werden.* Obwohl wir bei unsern auf einen n-dimensionalen Raum bezüglichen Betrachtungen naturgemäss nicht geometrisch, sondern nur algebraisch denken können, so wollen wir doch, der Kürze wegen, die bequemere geometrische Sprechweise benutzen, und z. B. sagen, dass ein $[a]$ in einem $[b]$ *liegt* ($a \leq b$), oder was dasselbe ist, dass ein $[b]$ einen $[a]$ *enthält*, oder durch einen $[a]$ *hindurchgeht*, wenn

*) Nachträglich bemerke ich, dass das durch eine Specialisirung der F. (5) des § 5 entstehende, hier auf Seite 22 oben ausgesprochene Resultat schon von Herrn Franz Meyer in Tübingen in anderem Zusammenhange (Math. Ann. Bd. 21, S. 132) gefunden ist. Eine Verallgemeinerung dieses Resultats vom Strahl auf höherstufige Hauptelemente habe ich schon in den Mitth. d. Hamb. Math. Ges. vom April 1884, zunächst ohne Beweis, ausgesprochen. Herr Stephanos, der in seiner Thèse vom Juli 1884 von invariantentheoretischer Seite her auch zu dem Resultat des Herrn Meyer gelangt, erwies mir die Ehre, dort auf meine Verallgemeinerung aufmerksam zu machen. Der Beweis des allgemeineren Resultats steckt in einer dritten Abhandlung über abzählende Geometrie, mit deren Redaction ich noch beschäftigt bin.

wir *meinen*, dass die ∞^a Werthgruppen der n Variabeln, welche dem den $[a]$ definirenden Gleichungssysteme genügen, sämmtlich zu den ∞^b Werthgruppen gehören, welche das den $[b]$ definirende Gleichungssystem befriedigen. Von den in den folgenden Betrachtungen erwähnten linearen Räumen soll immer, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt ist, angenommen werden, dass sie zugleich alle in demselben $[n]$ liegen, oder, algebraisch ausgedrückt, von den jene Räume definirenden Gleichungssystemen soll angenommen werden, dass sie zwischen denselben n Variabeln bestehen.

Indem wir wiederum eine in der Geometrie übliche Redeweise nachahmen, werden wir auch sagen, dass ein Strahl einen $[a]$ *schneidet*, wenn es eine Werthgruppe der n Variabeln giebt, welche sowohl die $n-1$ den Strahl constituirenden Gleichungen, wie auch die $n-a$ den $[a]$ konstituirenden Gleichungen befriedigt.

§ 2.

Allgemeine Sätze über lineare Räume und ihre Dimensionen.

Durch Abzählung der wesentlichen Constanten der in Betracht kommenden Gleichungssysteme, sowie durch den Satz, dass p lineare Gleichungen mit p Unbekannten nur eine einzige Wurzelgruppe liefern, gelangt man zu folgenden Wahrheiten*):

I) *Sind ein $[a]$ und ein $[b]$ beliebig gegeben, und ist $a+b \leqq n-1$, so giebt es immer einen und nur einen $[a+b+1]$, welcher den $[a]$ und den $[b]$ zugleich enthält.* Allgemeiner: Es giebt immer einen und nur einen $[a_1+a_2+\cdots+a_p+p-1]$ der durch p beliebig gegebene lineare Räume mit den Dimensionen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ zugleich hindurchgeht, wo $a_1+a_2+\cdots+a_p \leqq n-p+1$ sein muss.

II) *Ein $[a]$ und ein $[b]$ haben, wenn $a+b \geqq n$ ist, einen und nur einen $[a+b-n]$ gemeinsam*, d. h. es giebt einen und nur einen $[a+b-n]$, welcher in dem $[a]$ und in dem $[b]$ zugleich liegt. Allgemeiner: p beliebige lineare Räume mit den Dimensionen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ haben, wenn $a_1+a_2+\cdots+a_p \geqq (p-1)\,n$ ist, einen und nur einen $[a_1+a_2+\cdots+a_p-(p-1)\,n]$ gemeinsam.

III) *Wenn ein $[a]$ und ein $[b]$ so liegen, dass sie einen $[c]$, aber nicht unendlich viele $[c]$, gemeinsam haben, so giebt es immer einen und nur einen $[a+b-c]$, welcher den $[a]$ und den $[b]$ zugleich enthält.*

---

*) Einen Theil dieser Wahrheiten (I und II) hat u. a. Herr Veronese in der Einleitung zu einer inhaltreichen Abhandlung (Math. Ann., Bd. 19, S. 161) zusammengestellt, welche die projectiven Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen mit Hülfe des Princips des Projicirens und Schneidens behandelt.

Als specieller Fall, nämlich für $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ steckt hierin das Axiom, dass zwei sich schneidende Strahlen zugleich in einer und derselben Ebene liegen.

IV) *Damit es für einen* $[a]$ *eine* z*-fache Bedingung wird, mit einem* $[b]$ *einen* $[c]$, *aber nicht unendlich viele* $[c]$, *gemeinsam zu haben, muss*

$$z = (c + 1)(n + c - a - b)$$

sein. Natürlich ist hierbei $c \geq a + b - n$ gedacht (vgl. II). Beispielsweise ergiebt sich für $n = 4$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, dass $z = 1$ ist; d. h. in einem vierdimensionalen Raume erfüllt ein Strahl schon eine einfache Bedingung, wenn er eine gegebene Ebene überhaupt schneidet.

Aus Satz IV folgt Satz II, wenn man $z = 0$ setzt. Von sonstigen speciellen Fällen des Satzes IV sind für uns namentlich die folgenden drei wichtig:

V) Aus IV folgt für $b = c = a$: *Die Constantenzahl eines* $[a]$ *ist gleich* $(a + 1)(n - a)$. Hiernach ist z. B. die Constantenzahl eines Punktes gleich n, eines Strahles gleich $2(n - 1)$, einer Ebene gleich $3(n - 2)$ u. s. w., und, dual entsprechend, eines $[n - 1]$ gleich n, eines $[n - 2]$ gleich $2(n - 1)$, eines $[n - 3]$ gleich $3(n - 2)$ u. s. w.

VI) Aus IV folgt, dass, wenn $z = 1$, $c = 0$ ist, $b = n - a - 1$ sein muss, d. h.: *Es ist für einen* $[a]$ *eine einfache Bedingung, mit einem gegebenen* $[n - a - 1]$ *einen Punkt gemeinsam zu haben.*

VII) Aus IV folgt, dass, wenn $z = 2$, $c = 0$ ist, $b = n - a - 2$ sein muss, d. h.: *Es ist für einen* $[a]$ *eine zweifache Bedingung, mit einem gegebenen* $[n - a - 2]$ *einen Punkt gemeinsam zu haben.*

Da nach Satz V ein Strahl durch $2(n - 1)$ einfache Bedingungen, oder durch $n - 1$ zweifache Bedingungen bestimmt ist, so ergeben sich aus VI und VII für $a = 1$ noch die folgenden beiden Sätze:

VIII) *Es giebt eine endliche Anzahl von Strahlen, von denen jeder jeden von* $2(n - 1)$ *gegebenen* $[n - 2]$ *schneidet.*

IX) *Es giebt eine endliche Anzahl von Strahlen, von denen jeder jeden von* $n - 1$ *gegebenen* $[n - 3]$ *schneidet.*

Die in VIII und IX erwähnten endlichen Anzahlen sind bezw. in § 5 und in § 6 berechnet.

§ 3.

Aufzählung und Bezeichnung der Grundbedingungen und Grundgebilde für einen linearen, n-dimensionalen Raum.

Die Zahl der Punkte, welche in unserm Raume zugleich eine gegebene einfache Bedingung y und eine gegebene, von y unabhängige, zweifache Bedingung z erfüllen, ist bekanntlich gleich dem Producte

der beiden Zahlen, von denen die eine angiebt, wie viel Punkte y erfüllen, und auf einer gegebenen Geraden liegen, die andere angiebt, wie viel Punkte z erfüllen und auf einer gegebenen Ebene liegen; denn eine Fläche $p$ten Grades schneidet eine in allgemeiner Lage zu ihr befindliche Curve $q$ten Grades in $p \cdot q$ Punkten. Analoge Sätze (*Charakteristiken-Sätze*) gelten bekanntlich (vgl. Kalkül der abzähl. Geom. S. 47, 62, 283) auch für den Strahl und die Ebene, nur dass für den Strahl, falls zwei zweifache Bedingungen gegeben sind, eine Summe von zwei Producten auftritt, wie zuerst Herr Halphen (Comptes rendus, 1872) bemerkte. Die Bedingungen, welche in allen den Producten, von denen in diesen Charakteristiken-Sätzen die Rede ist, auftreten, und welche also für die Hauptelemente unseres Raumes in der angedeuteten Weise *charakteristisch* sind, habe ich (Kalkül d. abzähl. Geom., S. 4) *Grundbedingungen* genannt. Da nun auch für die Hauptelemente eines $[n]$, wie ich in einer andern Abhandlung zeigen werde, Charakteristikensätze und deshalb Grundbedingungen existiren, und da in den folgenden Paragraphen die für weitere Untersuchungen wichtige Vorfrage: „wie viel Hauptelemente giebt es, die gegebene Grundbedingungen erfüllen?", vorläufig freilich nur für den Strahl, erledigt wird, so wollen wir jetzt die Grundbedingungen der Hauptelemente eines $[n]$ zusammenstellen, und durch zweckmässige Symbole dem Bedingungscalcül zugänglich machen.

Für den *Punkt* bezeichne (k) die ihm auferlegte Bedingung, dass er in einem $[k]$ liegen soll, also z. B. (0), dass er gegeben sei, (2), dass er in einer gegebenen Ebene liege, $(n-1)$, dass er in einem $[n-1]$ liege, endlich noch (n) die selbstverständliche oder nullfache Bedingung, dass er überhaupt in dem $[n]$ liege, den wir unseren Betrachtungen zu Grunde legen. Die $n+1$ Bedingungen:

$$(0),\ (1),\ (2),\ (3),\ \ldots,\ (n-1),\ (n)$$

sind die sämmtlichen Grundbedingungen des Punktes, und zwar ist die Bedingung (b), wie sich aus § 2, IV für $a=0$, $c=0$ ergiebt, $(n-b)$-fach, so dass es immer nur eine einzige Grundbedingung von vorgeschriebener Dimension giebt. In analoger Weise erhält man als Grundbedingungen des *Strahls* zunächst diejenigen n, welche aussagen, dass der Strahl in einem 1- bis n-stufigen Hauptelement liege. Dass aber zu den so erhaltenen Bedingungen noch andere Grundbedingungen hinzuzuzählen sind, erkennt man schon aus unserm dreidimensionalen Raume, wo z. B. auch die Bedingung, dass der Strahl einem Strahlbüschel angehöre, d. h. in einer Ebene liege und dabei durch einen in dieser Ebene gegebenen Punkt gehe, Grundbedingung ist. Dem Verfasser ist es nun gelungen, zu erkennen, dass *das Symbol*

$$(a,\ b),$$

wo $b \gtreqless n$ und $a < b$ ist, die sämmtlichen Grundbedingungen des Strahls darstellt, wenn (a, b) die Bedingung bedeutet, dass der Strahl in einem gegebenen $[b]$ liege, und dabei einen gegebenen in $[b]$ liegenden $[a]$ schneide, d. h. mit diesem $[a]$ einen und nur einen Punkt gemeinsam habe. Es bedeuten hiernach z. B.:

$(0, 2)$, dass der Strahl einem gegebenen Strahlbüschel angehören soll,

$(1, 2)$, dass der Strahl in einer gegebenen Ebene liegen soll,

$(1, 3)$, dass der Strahl eine gegebene Gerade schneiden und dabei ganz in einem gegebenen, diese Gerade enthaltenden $[3]$ liegen soll,

$(n-2, n)$, dass der Strahl einen gegebenen $[n-2]$ schneiden soll,

$(n-2, n-1)$, dass der Strahl ganz in einem gegebenen $[n-1]$ liegen soll.

Man beachte bei der Uebersetzung dieser Bedingungssymbole, dass, wenn in (a, b) die Zahl b gleich der Dimension n des der Betrachtung zu Grunde liegenden linearen Raums $[n]$ ist, die Bedingung (a, n) nur ausspricht, dass der Strahl (a, n) einen gegebenen $[a]$ schneiden soll, da das Liegen in $[n]$ selbstverständlich ist. Ferner beachte man, dass, wenn in (a, b) die Zahl a nur um 1 kleiner als b ist, die Bedingung $(b-1, b)$ nur ausspricht, dass der Strahl in einem gegebenen $[b]$ liegen soll, da dann das Schneiden von $[b-1]$ selbstverständlich ist, wie aus § 2, II hervorgeht, wenn man die dort genannten Buchstaben n, a, b bezw. gleich b, 1, $b-1$ setzt. Die Bedingung $(n-1, n)$, welche hiernach von jedem Strahle selbstverständlich erfüllt wird, nehmen wir trotzdem in das Register der Grundbedingungen mit auf. Wir erhalten dann:

erstens n Grundbedingungen (a, b), wo $a = 0$ ist, nämlich:

$$(0, 1),\ (0, 2),\ (0, 3),\ \ldots,\ (0, n-1),\ (0, n);$$

zweitens $n-1$ Grundbedingungen (a, b), wo $a = 1$ ist, nämlich:

$$(1, 2),\ (1, 3),\ \ldots,\ (1, n-1),\ (1, n);$$

. . . .

$(n-1)$-tens 2 Grundbedingungen (a, b), wo $a = n-2$ ist, nämlich:

$$(n-2, n-1) \text{ und } (n-2, n);$$

n-tens 1 Grundbedingung (a, b), wo $a = n-1$ ist, nämlich:

$$(n-1, n).$$

Demnach ist die Anzahl aller Grundbedingungen des Strahls gleich der Summe der ganzen Zahlen von 1 bis n, d. h. gleich dem Binomialcoefficienten $(n+1)_2 = \frac{1}{2} n (n+1)$.

Um die Dimension d jeder der erhaltenen $\frac{1}{2}n(n+1)$ Grundbedingungen (p, q) durch p, q und n auszudrücken, bestimmen wir zunächst mit Hülfe von § 2, IV die Dimension z der Bedingung, dass ein Strahl in einem $[q]$ liege. Hierfür erhalten wir, indem wir in jener Formel IV des § 2 $n = n$, $a = 1$, $b = q$, $c = 1$ setzen, $z = 2(n-q)$. Hierzu haben wir noch die Dimension z' der Bedingung zu addiren, dass in einem $[q]$ ein Strahl mit einem in dem $[q]$ liegenden $[p]$ einen Punkt gemeinsam habe. Wir setzen also zweitens in jener Formel $n = q$, $a = 1$, $b = p$, $c = 0$, $z = z'$, und erhalten $z' = q - 1 - p$. *Demnach hat die Bedingung* (p, q) *die Dimension:*

$$d = 2(n-q) + q - 1 - p = 2n - 1 - p - q$$

Ist $p = 0$, $q = 1$, so kommt $d = 2n - 2$, d. h., dass ein Strahl gegeben ist, ist eine $(2n-2)$-fache Bedingung, ein Resultat, das auch aus § 2, V ersichtlich ist. Ist $p = n - 1$, $q = n$, so kommt $d = 0$, d. h. die Bedingung $(n-1, n)$ ist nullfach. Beispielsweise stellen wir noch die Grundbedingungen des Strahls im fünfdimensionalen linearen Raume, nach ihren Dimensionen geordnet, zusammen:

1 nullfache: (4, 5); 1 einfache: (3, 5); 2 zweifache: (2, 5) u. (3, 4); 2 dreifache: (1, 5) u. (2, 4); 3 vierfache: (0, 5) u. (1, 4) u. (2, 3); 2 fünffache: (0, 4) u. (1, 3); 2 sechsfache: (0, 3) u. (1, 2); 1 siebenfache: (0, 2); 1 achtfache: (0, 1).

Die eben für den Strahl angestellten Betrachtungen lassen sich ohne Schwierigkeit auf die Ebene und überhaupt auf alle Hauptelemente übertragen. *Für die Ebene erhält man die sämmtlichen Grundbedingungen aus dem Symbol* (a, b, c), *wo* $c \overline{\gtrless} n$ *und* $a < b < c$ *ist, wenn* (a, b, c) *die Bedingung bedeutet, dass, wenn ein* $[c]$, *in demselben ein* $[b]$ *und in letzterem ein* $[a]$ *gegeben ist, die Ebene mit dem* $[c]$ *alle ihre Punkte, mit dem* $[b]$ *die Punkte einer Geraden, und mit dem* $[a]$ *einen Punkt gemeinsam haben soll.* Es giebt hiernach $n-1$ Bedingungen $(0, 1, c)$, $n-2$ Bedingungen $(0, 2, c)$, u. s. w., also überhaupt so viel Bedingungen $(0, b, c)$, wie der Binomialcoefficient n_2 angiebt. Ebenso erhält man, dass es $(n-1)_2$ Bedingungen, $(1, b, c)$, $(n-2)_2$ Bedingungen $(2, b, c)$ u. s. w. giebt. Die Ebene besitzt also im Ganzen $n_2 + (n-1)_2 + (n-2)_2 + \cdots + 2_2$ Grundbedingungen, d. h. so viel, wie der Binomialcoefficient $(n+1)_3 = \frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$ angiebt. Die Dimension der Bedingung (a, b, c) erhält man, ähnlich wie oben die Dimension der Bedingung (p, q), aus § 2, IV gleich $3n - 3 - a - b - c$.

So weitergehend gelangt man zu der Erkenntniss, dass sich jedem Hauptelemente $[k]$ $(n+1)_{k+1} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!\,(k+1)!}$ Grundbedingungen auferlegen lassen, welche sämmtlich aus dem Symbol

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k+1}),$$

wo $a_{k+1} \overline{\overline{<}} n$, und $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{k+1}$ ist, hervorgehen, wenn man unter $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k+1})$ versteht, dass $k+1$ Hauptelemente $[a_1], [a_2], [a_3], \cdots, [a_{k+1}]$ gegeben sind, wo immer $[a_i]$ in $[a_{i+1}]$ liegt, und dass dann das Hauptelement $[k]$ mit $[a_1]$ einen Punkt, mit $[a_2]$ eine Gerade, und überhaupt mit $[a_i]$ einen $[i-1]$ gemeinsam haben soll. Für die Dimension der Grundbedingung $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k+1})$ ergiebt sich aus § 2, IV:

$$(k+1)\,n - \frac{1}{2}\,k(k+1) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k+1}).$$

Da in jedem $[n]$ zwischen den Hauptelementen $[k]$ einerseits und den Hauptelementen $[n-k-1]$ andererseits eine ebensolche Verwandtschaft besteht, wie die ist, welche man in unserm Raume Dualität oder Reciprocität nennt, so muss auch die Anzahl der $[k]$ auferlegbaren Grundbedingungen mit der Anzahl der $[n-k-1]$ auferlegbaren Grundbedingungen übereinstimmen. In der That ist diess auch aus der Gleichheit der Binomialcoefficienten $(n+1)_{k+1}$ und $(n+1)_{n-k-1+1}$ ersichtlich.

Da man in der dreidimensionalen synthetischen Geometrie die Gesammtheit der eine gegebene Grundbedingung erfüllenden Hauptelemente ein Grundgebilde dieses Hauptelementes nennt, so soll auch in einem $[n]$ eine solche Gesammtheit *Grundgebilde* heissen. Die Grundgebilde des Punktes sind die Hauptelemente selbst. Für dieselben haben wir die Bezeichnung $[0], [1], [2], \ldots, [n]$ eingeführt. Dem entsprechend soll auch für den Strahl das Zeichen $[a, b]$ das Grundgebilde bedeuten, welches aus allen die Grundbedingung (a, b) erfüllenden Strahlen besteht, und überhaupt für das Hauptelement $[k]$ mit $[a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}]$ das Grundgebilde bezeichnet werden, das aus allen die Bedingung $(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$ erfüllenden Hauptelementen $[k]$ besteht. Um die Stufe s der Grundgebilde zu bestimmen, beachten wir, dass, wenn die Constantenzahl eines Gebildes c ist, immer ∞^{c-d} solcher Gebilde eine gegebene d-fache Bedingung erfüllen. Demgemäss erhalten wir die Stufe s des Grundgebildes $[a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}]$, wenn wir in $s = c - d$ die Constantenzahl $c = (k+1)\,(n-k)$ (§ 2, V) und die Dimension

$$d = (k+1)\,n - \frac{1}{2}\,k(k+1) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1})$$

setzen. So ergiebt sich, dass *das Grundgebilde* $(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$ *immer* $\left[a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} - \frac{1}{2}\,k\,(k+1)\right]$*-stufig ist.* Beispielsweise folgen hier für einen vierdimensionalen, linearen Raum die 10 Grundgebilde des Strahls und die 10 Grundgebilde der Ebene, nach

ihren Stufen geordnet, und zwar so, dass immer je zwei sich dual entsprechende Grundgebilde zusammenstehen:

1) nullstufig: [0,1] und [0,1,2]: Strahl selbst bezw. Ebene selbst;
2) einstufig: [0,2] und [0,1,3]: Strahlbüschel bezw. Ebenenbüschel;
3) zweistufig: [0,3] und [0,2,3]: Strahlbündel bezw. Ebenenbündel;
4) zweistufig: [1,2] und [0,1,4]: Strahlen in einer Ebene bezw. Ebenen durch eine Gerade im [4];
5) dreistufig: [0,4] und [1,2,3]: Strahlen durch einen Punkt im [4] bezw. Ebenen in einem [3];
6) dreistufig: [1,3] und [0,2,4]: Strahlen, die in einem [3] liegen und eine im [3] befindliche Gerade schneiden, bezw. Ebenen die in dem [4] liegend, durch die Strahlen eines Strahlbüschels gehen;
7) vierstufig: [1,4] und [1,2,4]: Strahlen, die, im [4] liegend, eine Gerade schneiden, bezw. Ebenen, die im [4] eine Ebene in geraden Linien schneiden;
8) vierstufig: [2,3] und [0,3,4]: Strahlen, die in einem [3] liegen, bezw. Ebenen, die, im [4] liegend, durch einen Punkt gehen;
9) fünfstufig: [2,4] und [1,3,4]: Strahlen, die im [4] liegend, eine Ebene schneiden, bezw. Ebenen, die, im [4] liegend, eine Gerade schneiden;
10) sechsstufig: [3,4] und [2,3,4]: Strahlen des [4] bezw. Ebenen des [4].

Wenn man zu den hier aufgeführten Grundgebilden noch die Grundgebilde des Punktes und die ihnen dual entsprechenden Grundgebilde des [3] hinzufügt, und dann die Elemente von je zwei gleichstufigen Grundgebilden *projectiv* (in allgemeinerem Sinne, so dass z. B. auch collinear und correlativ unter den Begriff projectiv fallen) zuordnet, so gelangt man durch die Schnitte oder die Verbindungen entsprechender Elemente zu Gebilden zweiten und höheren Grades im [4], deren Eigenschaften man dann aus der Art der Erzeugung in ähnlicher Weise ableiten kann, wie diess in der dreidimensionalen synthetischen Geometrie üblich ist. Doch möchte ich nicht hier, sondern bei einer andern Gelegenheit auf diese Erweiterung der synthetischen Geometrie näher eingehen.

§ 4.

Auffindung aller fundamentalen Anzahlen des Strahls in einem n-dimensionalen linearen Raume.

Um Anzahlen für algebraische Gebilde unseres dreidimensionalen Raumes bestimmen zu können, muss man vor allem die *fundamentalen*

Anzahlen desselben kennen, d. h. *die Zahlen, welche zählen, wie viel Hauptelemente gegebene Grundbedingungen erfüllen.* Diese Zahlen kann man mit Benutzung der in § 3 eingeführten Symbole für Grundbedingungen angeben, wie folgt*):

Für den Punkt ist:

$$(0) = 1; \quad (2)(1) = 1; \quad (2)^3 = 1;$$

Für den Strahl ist:

$$(0, 1) = 1; \quad (1, 3)(0, 2) = 1; \quad (1, 2)^2 = 1; \quad (0, 3)^2 = 1;$$
$$(1, 2)(0, 3) = 0; \quad (1, 2)(1, 3)^2 = 1; \quad (0, 3)(1, 3)^2 = 1; \quad (1, 3)^4 = 2;$$

Für die Ebene ist:

$$(0, 1, 2) = 1; \quad (0, 2, 3)(0, 1, 3) = 1; \quad (0, 2, 3)^3 = 1.$$

Von diesen Anzahlen wird freilich in unserer dreidimensionalen Geometrie nicht viel geredet, da dieselben grösstentheils gleich 1 sind, und durch unsere räumliche Anschauung leicht erkennbar sind. Dagegen sind die Anzahlen, welche in einem n-dimensionalen linearen Raume jenen Anzahlen entsprechen, im Allgemeinen nicht so leicht erkennbar. Da dieselben aber für einen $[n]$ dieselbe fundamentale Rolle spielen, wie jene Anzahlen für unsern [3], so wollen wir hier die Wege betreten, welche zu ihrer Berechnung und zu der Ableitung der Functionen führen, durch die sie von der Dimension n abhängen.

Zunächst ist klar, dass für jedes Hauptelement $[k]$ die Grundbedingung, welche die höchste Dimension hat, von einem einzigen Gebilde $[k]$ erfüllt wird; denn diese Grundbedingung sagt nichts weiter aus, als dass das Hauptelement $[k]$ vollständig gegeben ist. Wir haben also für jedes $[k]$:

$$(1) \qquad (0, 1, 2, \cdots, k-1, k) = 1.$$

Was den *Punkt* anbetrifft, so ergiebt sich, dass für ihn auch jedes *beliebige Product* von Grundbedingungen gleich 1 zu setzen ist; natürlich muss die Dimensionssumme eines solchen Productes gleich der Constantenzahl n des Punktes sein, damit es überhaupt Sinn hat, ein solches Product *gleich einer Zahl* zu setzen. Soll nämlich ein Punkt die Grundbedingung (a) und die Grundbedingung (b) zugleich erfüllen,

---

*) Man erinnere sich aus meinem Bedingungscalcül (Kalkül d. abz. Geom., § 2, § 3), dass erstens das *Product* mehrerer Bedingungen die Bedingung bezeichnet, welche ausspricht, dass jene Bedingungen *zugleich* erfüllt werden sollen, dass zweitens eine einem Gebilde von der Constantenzahl c auferlegte c-fache Bedingung *gleich der Anzahl* der Gebilde gesetzt wird, die diese Bedingung erfüllen, und dass drittens eine lineare Gleichung zwischen d-fachen Bedingungen, die einem solchen Gebilde auferlegt sind, aussprechen soll, dass aus ihr eine richtige Zahlengleichung entsteht, wenn man jede dieser d-fachen Bedingungen mit einer und derselben $(c-d)$-fachen Bedingung multiplicirt, und für die erhaltenen c-fachen Bedingungsproducte die zugehörigen Anzahlen einsetzt.

also sowohl auf einem gegebenen $[a]$, als auch auf einem gegebenen $[b]$ liegen, so muss er auf dem Hauptelement liegen, das $[a]$ und $[b]$ gemeinsam ist, also nach § 2, II auf einem $[a+b-n]$. Deshalb ist immer:

$$(a)(b) = (a+b-n), \tag{2}$$

also allgemein:

$$(a_1)(a_2)(a_3)\cdots(a_p) = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p - np + n). \tag{3}$$

Ist nun die Summe der Dimensionen der gegebenen Grundbedingungen (a_1), (a_2), (a_3), ..., (a_p), d. h. die Summe $(n-a_1) + (n-a_2) + \cdots + (n-a_p)$ gleich der Constantenzahl n des Punktes, so erscheint auf der rechten Seite der Gleichung (3) die Bedingung (0), wofür nach (1) die Zahl 1 zu setzen ist.

In derselben Weise kann man nun auch für ein *beliebiges* Hauptelement $[k]$ jedes Product von Grundbedingungen, dessen Dimensionssumme gleich seiner Constantenzahl $(k+1)(n-k)$ ist, durch die $(k+1)(n-k)$-fache Grundbedingung ausdrücken, also, da letztere nach 1) gleich der Zahl 1 ist, die zugehörige Anzahl berechnen, sobald es für diesen $[k]$ gelingt, das Product zweier beliebiger Grundbedingungen d-ter und e-ter Dimension durch die $(d+e)$-fachen Grundbedingungen auszudrücken, oder, anders ausgedrückt, sobald es für diesen $[k]$ gelingt, eine der Formel (2) analoge Formel aufzustellen. Diese Aufgabe hat der Verfasser für den *Strahl* in voller Allgemeinheit erledigt. Wir schreiten daher jetzt dazu, für den Strahl das Analogon der Formel (2) abzuleiten, oder, genauer gesprochen, die zusammengesetzte Grundbedingung $(a, \alpha)(b, \gamma)$ durch einfache Grundbedingungen auszudrücken.

Wir betrachten zunächst die aus den Grundbedingungen (a, n) und (b, n) zusammengesetzte Bedingung $(a, n)(b, n)$, wo $a \overline{<} b$ sein mag. Da (a, n) eine $(n-a-1)$-fache, (b, n) eine $(n-b-1)$-fache Bedingung ist, wie aus § 3 hervorgeht, so ist $(a, n)(b, n)$ eine $(2n-a-b-2)$-fache Bedingung. Es handelt sich also darum, die Bedingung $(a, n)(b, n)$, welche verlangt, dass ein Strahl sowohl einen gegebenen $[a]$ wie auch einen gegebenen $[b]$ schneiden soll, durch $(2n-a-b-2)$-fache Grundbedingungen auszudrücken. *Im Fall* $a + b \overline{>} n - 1$ *ist*, gelingt dies auf folgende Weise. Wir specialisiren (vgl. Einleitung) die Lage der gegebenen Hauptelemente $[a]$ und $[b]$, die im allgemeinen einen $[a+b-n]$ gemeinsam haben (§ 2, II), dahin, dass sie einen $[a+b-n+1]$ gemeinsam haben. Dann wissen wir aus § 2, III, dass es einen $[n-1]$ giebt, der sie beide enthält. Die Bedingung $(a, n)(b, n)$ ist daher jetzt auf zweierlei Weise und *nur* auf zweierlei Weise erfüllbar, erstens dadurch, dass ein Strahl den $[a+b-n+1]$ schneidet, zweitens dadurch, dass ein Strahl in

dem $[n-1]$ liegt, und dabei den $[a]$ und den $[b]$, die gleichfalls in dem $[n-1]$ liegen, schneidet. Die erstgenannte Bedingung ist durch $(a+b-n+1, n)$ zu bezeichnen, die zweitgenannte Bedingung stimmt mit der gegebenen Bedingung $(a, n)\,(b, n)$ überein, nur mit dem Unterschiede, dass der Strahl nicht allein in dem unsern Betrachtungen zu Grunde liegenden $[n]$, sondern auch in *einem und demselben* $[n-1]$ liegen soll. Wir bezeichnen daher die zweitgenannte Bedingung mit $(a, \overline{n-1})\,(b, \overline{n-1})$, wo die Ueberstreichung von $n-1$ andeuten soll, dass in den beiden Bedingungssymbolen ein und derselbe $[n-1]$ gedacht werden soll. *Ueberhaupt wollen wir mit* $(a, \overline{m})\,(b, \overline{m})$ *die Bedingung bezeichnen, dass ein Strahl in einem* $[m]$ *liegen soll, und dabei einen* $[a]$ *und einen* $[b]$, *die gleichfalls beide in diesem* $[m]$ *liegen, schneiden soll.* Man beachte, dass die Factoren $(a, \overline{m})$ und $(b, \overline{m})$ des Bedingungsproducts $(a, \overline{m})\,(b, \overline{m})$, wenn $m < n$ ist, von einander abhängig sind. Wir erhalten nach Einführung dieser Bezeichnung:

$$(a, n)\,(b, n) = (a+b-n+1, n) + (a, \overline{n-1})\,(b, \overline{n-1}), \tag{4}$$

und auf dieselbe Weise, indem wir nur die obige Betrachtung für den $[n-1]$ statt des $[n]$ wiederholen:

$$(a, \overline{n-1})\,(b, \overline{n-1}) = (a+b-n+2, n-1) + (a, \overline{n-2})\,(b, \overline{n-2}),$$

und weiter:

$$(a, \overline{n-2})\,(b, \overline{n-2}) = (a+b-n+3, n-2) + (a, \overline{n-3})\,(b, \overline{n-3}),$$

So fortfahrend, müssen wir einmal zu einer Gleichung kommen, wo links $(a, \overline{b+1})\,(b, \overline{b+1})$ erscheint. Diese Bedingung aber wird schon von jedem Strahle erfüllt, der, in dem $[b+1]$ liegend, überhaupt nur mit dem $[a]$ einen Punkt gemein hat, da mit dem in $[b+1]$ liegenden $[b]$ *jeder* in $[b+1]$ liegende Strahl immer einen Punkt gemein haben muss, weil (§ 2, II) $1+b-(b+1)=0$ ist. Es ist also

$$(a, \overline{b+1})\,(b, \overline{b+1}) = (a, b+1).$$

Wir haben demnach:

$$\begin{aligned}
(a, n)\,(b, n) &= (a+b-n+1, n) + (a, \overline{n-1})\,(b, \overline{n-1}),\\
(a, \overline{n-1})\,(b, \overline{n-1}) &= (a+b-n+2, n-1) + (a, \overline{n-2})\,(b, \overline{n-2}),\\
(a, \overline{n-2})\,(b, \overline{n-2}) &= (a+b-n+3, n-2) + (a, \overline{n-3})\,(b, \overline{n-3}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(a, \overline{b+2})\,(b, \overline{b+2}) &= (a-1, b+2) + (a, \overline{b+1})\,(b, \overline{b+1}),\\
(a, \overline{b+1})\,(b, \overline{b+1}) &= (a, b+1).
\end{aligned}$$

Durch Addition dieser $n - b$ Gleichungen erhält man die *gesuchte, für* $a + b \geqq n - 1$ *gültige Formel:*

$$(5)\quad (a, n)(b, n) = (a+b-n+1, n) + (a+b-n+2, n-1) + (a+b-n+3, n-2) + \cdots + (a, b+1),$$

wo

$$a \leqq b$$

gedacht ist.

Genau genommen, hat man noch zu prüfen, ob auch nicht durch die Lage-Specialisirungen der gegebenen $[a]$ und $[b]$ eine Bedingung hervorgerufen ist, die von geringerer Dimension ist, als $(a, n)(b, n)$, und deshalb bei Anwendung der Formel unendlich viele Strahlen liefern würde. Dies ist aber nicht der Fall, da alle Bedingungen der rechten Seite der Formel (5) die Dimension $2n - a - b - 2$, also dieselbe Dimension, wie $(a, n)(b, n)$ haben. Beispielsweise setzen wir in (5) $b = n - 2$. Dann kommt für $a + n - 2 \geqq n - 1$, d. h. $a \geqq 1$, und für $a \leqq n - 2$:

$$(a, n)(n-2, n) = (a-1, n) + (a, n-1).$$

Ist hier, noch specieller, $n = 3$ und $a = 1$, so kommt:

$$(1, 3)^2 = (0, 3) + (1, 2)$$

eine Formel, welche den bekannten Satz ausspricht, dass in unserm Raum die Zahl derjenigen Strahlen eines zweistufigen Strahlsystems, welche zwei gegebene Gerade schneiden, gleich der Summe der beiden Zahlen ist, von denen die eine angiebt, wieviel Strahlen des Strahlsystems durch einen gegebenen Punkt gehen, die andere angiebt, wieviel solche Strahlen in einer gegebenen Ebene liegen.

Da die Formel (5) nur für $a + b \geqq n - 1$ bewiesen ist, so untersuchen wir zweitens den Fall, dass in $(a, n)(b, n)$ $a + b \leqq n - 1$ ist. Dann giebt es nach § 2, I einen $[a + b + 1]$, der die gegebenen Hauptelemente $[a]$ und $[b]$ zugleich enthält. Demgemäss können wir mit Benutzung der bei der Ableitung von (5) eingeführten Bezeichnungsweise schreiben:

$$(6)\qquad (a, n)(b, n) = (a, \overline{a+b+1})\,(b, \overline{a+b+1}).$$

Das Product auf der rechten Seite dieser Gleichung können wir nun aber nach Formel (5) auflösen, indem wir uns dort statt des vorausgesetzten $[n]$ einen $[a + b + 1]$ denken. Dadurch wird $(a+b-n+1, n)$ zu $(0, a+b+1)$, $(a+b-n+2)$ zu $(1, a+b)$, u. s. w., endlich $(a, b + 1)$ bleibt $(a, b + 1)$. So erhält man die *gesuchte, für* $a + b \leqq n - 1$ *gültige Formel:*

$$(7)\quad (a, n)(b, n) = (0, a+b+1) + (1, a+b) + (2, a+b-1) + \cdots + (a, b+1),$$

wo wieder $a \leqq b$ gedacht ist.

Beispielsweise setzen wir $n = 5$, $a = 2$, $b = 2$, und erhalten:

$$(2, 5)^2 = (0, 5) + (1, 4) + (2, 3),$$

d. h. in Worten: In einem fünfdimensionalen, linearen Raume ist die Zahl derjenigen Strahlen eines vierstufigen Strahlsystems, welche zwei gegebene Ebenen schneiden, gleich der Summe von drei Zahlen, von denen die erste angiebt, wieviel Strahlen durch einen gegebenen Punkt gehen, die zweite angiebt, wieviel Strahlen eine gegebene Gerade schneiden, und dabei in einem gegebenen durch diese Gerade gehenden vierdimensionalen, linearen Raume liegen, die dritte angiebt, wieviel Strahlen in einem gegebenen dreidimensionalen Raume liegen.

Wir gehen nun zu dem allgemeinen Fall über, indem wir statt $(a, n)(b, n)$ die Bedingung $(a, \alpha)(b, \beta)$ betrachten. Dieselbe setzt voraus, dass ein $[\alpha]$ und in demselben ein $[a]$ gegeben ist, dass ferner ein $[\beta]$ und in demselben ein $[b]$ gegeben ist, und verlangt dann, dass ein Strahl sowohl in dem $[\alpha]$, wie in dem $[\beta]$ liege, und ausserdem sowohl den $[a]$ wie den $[b]$ schneide. Da der Strahl sowohl in $[\alpha]$ wie in $[\beta]$ liegen soll, so muss er in dem $[\alpha + \beta - n]$ liegen, der nach § 2, II dem $[\alpha]$ und dem $[\beta]$ gemeinsam ist. Ein solcher, ganz in $[\alpha + \beta - n]$ liegender Strahl soll nun aber auch mit $[a]$ einen Punkt gemeinsam haben. Dies kann er, da $[a]$ zwar in $[\alpha]$, aber nicht in $[\alpha + \beta - n]$ liegt, nur dadurch, dass er das Hauptelement, welches, in $[\alpha]$ liegend, dem $[a]$ und dem $[\alpha + \beta - n]$ gemeinsam ist, schneidet. Letztere haben aber nach § 2, II einen $[a + \alpha + \beta - n - \alpha]$, d. h. einen $[a + \beta - n]$ gemeinsam. Analog haben $[b]$ und $[\alpha + \beta - n]$ einen $[b + \alpha - n]$ gemeinsam. Die zusammengesetzte Bedingung $(a, \alpha)(b, \beta)$ wird also dadurch, und nur dadurch erfüllt, dass ein ganz in dem $[\alpha + \beta - n]$ liegender Strahl mit den in diesem $[\alpha + \beta - n]$ liegenden Hauptelementen $[a + \beta - n]$ und $[b + \alpha - n]$ je einen Punkt gemeinsam hat. Demgemäss können wir, mit Benutzung der bei der Ableitung von Formel (5) eingeführten Bezeichnungsweise, schreiben:

$$(8) \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (a + \beta - n, \overline{\alpha + \beta - n})(b + \alpha - n, \overline{\alpha + \beta - n}).$$

Das die rechte Seite dieser Gleichung bildende Product können wir nun nach Formel (5) oder Formel (7) auflösen, wenn wir uns dort statt des vorausgesetzten $[n]$ einen $[\alpha + \beta - n]$ denken. Die Formel (5) ist anzuwenden, wenn $(a + \beta - n) + (b + \alpha - n) \geqq (\alpha + \beta - n) - 1$ ist, d. h., wenn $a + b \geqq n - 1$ ist. Die Formel (7) ist anzuwenden, wenn $(a + \beta - n) + (b + \alpha - n) \leqq (\alpha + \beta - n) - 1$ ist, d. h., wenn $a + b \leqq n - 1$ ist. Wir ersetzen also in den Formeln (5) und (7) n durch $\alpha + \beta - n$, a durch $a + \beta - n$, und b durch $b + \alpha - n$. Dadurch erhalten wir:

Erstens: Für $\boldsymbol{a + b \geqq n - 1}$ und $\boldsymbol{a + \beta \leqq b + \alpha}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
(9) \quad \boldsymbol{(a, \alpha)(b, \beta)} &= \boldsymbol{(a + b - n + 1, \alpha + \beta - n)} \\
&+ \boldsymbol{(a + b - n + 2, \alpha + \beta - n - 1)} \\
&+ \boldsymbol{(a + b - n + 3, \alpha + \beta - n - 2)} \\
&+ \cdots + \boldsymbol{(a + \beta - n, b + \alpha - n + 1)};
\end{aligned}
$$

Zweitens: Für $\boldsymbol{a + b \leqq n - 1}$ und $\boldsymbol{a + \beta \leqq b + \alpha}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
(10) \quad \boldsymbol{(a, \alpha)(b, \beta)} &= \boldsymbol{(0, a + b + \alpha + \beta - 2n + 1)} \\
&+ \boldsymbol{(1, a + b + \alpha + \beta - 2n)} \\
&+ \boldsymbol{(2, a + b + \alpha + \beta - 2n - 1)} \\
&+ \cdots + \boldsymbol{(a + \beta - n, b + \alpha - n + 1)}.
\end{aligned}
$$

Die erste dieser beiden Hauptformeln enthält rechts $\beta - b$ Glieder, die zweite $a + \beta - n + 1$ Glieder. Beide Formeln werden congruent, wenn $a + b = n - 1$ ist. Wenn man die Formel (9) auf den Fall, in welchem $a + b < n - 1$ ist, und für welchen sie also oben nicht bewiesen ist, anwenden wollte, so erhielte man zuerst Bedingungssymbole (p, q), in denen p negativ ist, und die also sinnlos sind, dann aber würden die Glieder der rechten Seite von Formel (10) folgen. Man kann daher die Unterscheidung der beiden Fälle $a + b \geqq n - 1$ und $a + b \leqq n - 1$ fallen lassen, und immer nur die Formel (9) anwenden, wenn man dabei die *Vorschrift beachtet, dass die sinnlosen Bedingungssymbole (p, q), wo p negativ ist, gleich Null zu setzen sind.* Man erhält so, falls man noch, was für die Anwendung zweckmässig ist, die Addenden der rechten Seite von Formel (9) in umgekehrter Reihenfolge schreibt; die folgende Regel:

11) *Um die $(4n - 2 - p - \pi - q - \varkappa)$-fache, zusammengesetzte Bedingung $(p, \pi)(q, \varkappa)$ durch $(4n - 2 - p - \pi - q - \varkappa)$-fache, Grundbedingungen auszudrücken, entscheide man zuerst, ob $p + \varkappa$ kleiner, gleich oder grösser als $q + \pi$ ist. Im ersten Falle setze man $p = a$, $\pi = \alpha$, $q = b$, $\varkappa = \beta$, im dritten Falle setze man umgekehrt $q = a$, $\varkappa = \alpha$, $p = b$, $\pi = \beta$. Im zweiten Falle sind beide Einsetzungen gestattet. Darauf setze man die vorgelegte, zusammengesetzte Bedingung gleich*

$$
\begin{aligned}
(a + \beta - n, b + \alpha - n + 1) &+ (a + \beta - n - 1, b + \alpha - n + 2) \\
&+ (a + \beta - n - 2, b + \alpha - n + 3) + \cdots,
\end{aligned}
$$

nehme aber als letztes Glied dieser Summandenreihe das Glied

$$(a + b - n + 1, \alpha + \beta - n).$$

Erscheint schon vor diesem Gliede das Bedingungssymbol

$$(0, a + b + \alpha + \beta - 2n + 1),$$

so wird man von selbst dieses als den letzten Summanden betrachten,

da die etwa nachfolgenden sinnlos werden würden. Ist schon $a+\beta-n$ *negativ, so erscheinen lauter sinnlose Symbole, d. h. die vorgelegte Bedingung ist unerfüllbar.* Es ist z. B. in einem [9]:

$$(5,8)\,(4,9) = (4,9)\,(5,8) = (3,6) + (2,7) + (1,8);$$
$$(5,8)\,(6,7) = (3,6);$$
$$(3,7)\,(4,9) = (4,9)\,(3,7) = (2,4) + (1,5) + (0,6);$$
$$(1,8)\,(7,9) = (1,7) + (0,8);$$
$$(5,9)\,(2,3) = 0.$$

Aus unserer Hauptregel (11) entnehmen wir noch, wegen der Anwendungen in § 5 die folgenden speciellen Fälle:

Ist $a \geqq 1$ und $a \leqq \alpha - 2$, so kommt:

$$(a, \alpha)\,(n-2, n) = (a, \alpha - 1) + (a - 1, \alpha);$$

Ist $a \geqq 1$ und $a = \alpha - 1$, so kommt:

$$(\alpha - 1, \alpha)\,(n-2, n) = (n-2, n)\,(\alpha - 1, \alpha) = (\alpha - 2, \alpha);$$

Ist $a = 0$ und $\alpha \geqq 2$, so kommt:

$$(0, \alpha)\,(n-2, n) = (0, \alpha - 1);$$

Ist $a = 0$ und $\alpha = 1$, so kommt:

$$(0, 1)\,(n-2, n) = (n-2, n)\,(0, 1) = 0.$$

Diese Regeln kann man zu der einen Regel zusammenfassen, dass immer

$$(a, \alpha)\,(n-2, n) = (a, \alpha - 1) + (a - 1, \alpha) \tag{12}$$

ist, wenn man die durch Anwendung dieser Formel etwa entstehenden, sinnlosen Bedingungssymbole gleich Null setzt. Die Sinnlosigkeit einer Bedingung (p, q) *kann dabei erstens dadurch herbeigeführt werden, dass* p *negativ wird, zweitens auch dadurch, dass* $p = q$ *wird.*

Wegen der Anwendung in § 6 betrachten wir noch die Zusammensetzung einer beliebigen Grundbedingung (a, α) mit der zweifachen Grundbedingung $(n-3, n)$. Hier kann man die Unterscheidung von Fällen wenn auch nicht unterlassen, so doch beschränken, wenn man wieder die Vorschrift beachtet, dass etwa auftretende sinnlose Bedingungssymbole gleich Null zu setzen sind. *Bei Festhaltung dieser Vorschrift erhält man nämlich:*

$$\left\{\begin{aligned}&(\alpha - 1, \alpha)\,(n-3, n) = (\alpha - 3, \alpha), \text{ und für } a \leqq \alpha - 2:\\ &(a, \alpha)\,(n-3, n) = (a, \alpha - 2) + (a - 1, \alpha - 1) + (a - 2, \alpha).\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Die durch die Hauptregel (11) geleistete Darstellung einer aus zwei Grundbedingungen zusammengesetzten Bedingung durch einfache Grundbedingungen, hat man nur wiederholt anzuwenden, um auch das Product von drei und mehr Grundbedingungen als Summe von einfachen Grundbedingungen zu erhalten, wie folgende Beispiele zeigen, die sich wieder auf einen [9] beziehen sollen:

$$(7,9)(5,8)(6,7) = (7,9)(3,6) = (3,6)(7,9) = (3,5) + (2,6),$$

oder:

$$(7,9)(5,8)(6,7) = [(5,7)+(4,8)](6,7) = (3,5) + (2,6),$$

oder:

$$(7,9)(5,8)(6,7) = (5,7)(5,8) = (3,5) + (2,6);$$

$$\begin{aligned}(1,8)(7,9)(6,9) &= [(1,7)+(0,8)](6,9) = [(1,5)+(0,6)] + (0,6)\\ &= (1,5) + 2\,.\,(0,6),\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}(1,8)(7,9)(6,9) &= (1,8)[(6,8)+(5,9)] = [(0,6)] + [(1,5)+(0,6)]\\ &= (1,5) + 2\,.\,(0,6).\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}(1,8)(7,9)(6,9) &= (7,9)[(1,6)+(0,7)] = [(1,5)+(0,6)] + [(0,6)]\\ &= (1,5) + 2\,.\,(0,6).\end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned}(1,8)(7,9)(6,9)\,(6,8) &= [(1,5)+2\,.\,(0,6)](6,8) = (0,3) + 2\,.\,0 = (0,3),\\ (1,8)(7,9)(6,9)^2(6,8) &= (0,3)(6,9) = (0,1);\\ (5,8)(4,9)(7,9)^2 &= [(3,6)+(2,7)+(1,8)]\,[(6,9)+(7,8)]\\ &= [(3,4)+(2,5)+(1,6)+(2,5)+(1,6)+(0,7)\\ &\qquad +(1,6)+(0,7)]\\ &\quad + [(2,5)+(1,6)+(0,7)]\\ &= (3,4) + 3\,.\,(2,5) + 4\,.\,(1,6) + 3\,.\,(0,7),\\ (5,8)(4,9)(7,9)^2(3,8) &= [(3,4)+3\,.\,(2,5)+4\,.\,(1,6)+3\,.\,(0,7)](3,8)\\ &= 0 + 3\,.\,0 + 4\,.\,(0,1) + 3\,.\,0 = 4\,.\,(0,1);\\ (0,9)(6,9)^4 &= (0,7)(6,9)^3 = (0,5)(6,9)^2 = (0,3)(6,9) = (0,1);\\ (4,9)^4 = [(4,9)^2]^2 &= [(4,5)+(3,6)+(2,7)+(1,8)+(0,9)]^2\\ &= (4,5)^2 + (3,6)^2 + (2,7)^2 + (1,8)^2 + (0,9)^2\\ &\quad + 2\,.\,(4,5)(3,6) + 2\,.\,(4,5)(2,7) + \cdots\\ &= (0,1)+(0,1)+(0,1)+(0,1)+(0,1)+2.0+2.0+\cdots\\ &= 5.(0,1).\end{aligned}$$

Diese Beispiele zeigen dreierlei: erstens, dass mit Hülfe der Hauptregel (11) jede beliebige, aus Grundbedingungen zusammengesetzte Bedingung schliesslich in eine Summe von nicht-zusammengesetzten Grundbedingungen verwandelt werden kann, zweitens, dass man, falls die zusammengesetzte Grundbedingung mehr als zwei Grundbedingungen enthält, meist auf mehreren Wegen zu dieser Summe gelangen, also Controlen der Rechnung erhalten kann, drittens dass man, falls die Dimension der zusammengesetzten Bedingung gleich der Constantenzahl $2(n-1)$ des Strahles ist, zuletzt $x \cdot (0,1)$ *erhalten muss, wo x eine nicht nega-*

tive ganze Zahl ist. Da nun aber die $2(n-1)$-fache Grundbedingung $(0,1)$ von einem einzigen Strahle (F. 1) erfüllt wird, so *ist x die Anzahl der Strahlen, welche die gegebene, zusammengesetzte Bedingung erfüllen. Damit ist also die Aufgabe, die Anzahl derjenigen Strahlen zu finden, welche beliebige, gegebene Grundbedingungen erfüllen, vollständig gelöst.* Beispielsweise übersetzen wir zwei von den in den obigen Beispielen erhaltenen Anzahlresultaten in Worte:

$$(5,8)\,(3,8)\,(4,9)\,(7,9)^2 = 4\,.\,(0,1) = 4 \text{ bedeutet:}$$

Es giebt in einem [9] 4 *Strahlen, von denen jeder in einem gegebenen* [8] *liegt, und einen gegebenen, in* [8] *liegenden* [5] *schneidet, ferner in einem andern gegebenen* [8] *liegt, und einen gegebenen, in diesem* [8] *liegenden* [3] *schneidet, ferner einen gegebenen* [4] *und zwei gegebene* [7] *schneidet.*

$$(4,9)^4 = 5\,.\,(0,1) = 5 \text{ bedeutet:}$$

Es giebt in einem [9] 5 *Strahlen, von denen jeder jeden von vier gegebenen* [4] *schneidet.*

Zum Schluss stellen wir noch für den vierdimensionalen, linearen Raum die fundamentalen Anzahlen des Strahls zusammen:

$$(0,1)=1;\ (0,2)(2,4)=1;\ (0,3)(1,4)=1;\ (0,3)(2,3)=0;\ (1,2)(1,4)=0;$$
$$(1,2)(2,3)=1;$$
$$(0,4)^2=1;\ (0,4)(1,3)=0;\ (1,3)^2=1;$$
$$(0,3)(2,4)^2=1;\ (1,2)(2,4)^2=1;\ (0,4)(1,4)(2,4)=1;\ (0,4)(2,3)(2,4)=0;$$
$$(1,3)(1,4)(2,4)=1;\ (1,3)(2,3)(2,4)=1;\ (1,4)^3=1;\ (1,4)^2(2,3)=1;$$
$$(1,4)(2,3)^2=0;\ (2,3)^3=1;$$
$$(0,4)(2,4)^3=1;\ (1,3)(2,4)^3=2;\ (1,4)^2(2,4)^2=2;\ (1,4)(2,3)(2,4)^2=1;$$
$$(2,3)^2(2,4)^2=1;$$
$$(1,4)(2,4)^4=3;\ (2,3)(2,4)^4=2;\ (2,4)^6=5.$$

§ 5.

Zahl der Strahlen eines $[n]$, welche die einfache Bedingung, einen gegebenen $[n-2]$ zu schneiden, beliebig oft, und ausserdem eine beliebige Grundbedingung erfüllen.

Durch wiederholte Anwendung der Regel (12) des § 4 erhält man nach und nach:

$$(n-2,n) = (n-2,n);$$
$$(n-2,n)^2 = (n-3,n) + (n-2,n-1);$$
$$(n-2,n)^3 = (n-4,n) + 2(n-3,n-1);$$
$$(n-2,n)^4 = (n-5,n) + 3(n-4,n-1) + 2(n-3,n-2);$$

$$
\begin{aligned}
(n-2, n)^5 &= (n-6, n) + 4(n-5, n-1) + 5(n-4, n-2);\\
(n-2, n)^6 &= (n-7, n) + 5(n-6, n-1) + 9(n-5, n-2)\\
&\quad + 5(n-4, n-3);\\
(n-2, n)^7 &= (n-8, n) + 6(n-7, n-1) + 14(n-6, n-2)\\
&\quad + 14(n-5, n-3);\\
(n-2, n)^8 &= (n-9, n) + 7(n-8, n-1) + 20(n-7, n-2)\\
&\quad + 28(n-6, n-3) + 14(n-5, n-4);\\
(n-2, n)^9 &= (n-10, n) + 8(n-9, n-1) + 27(n-8, n-2)\\
&\quad + 48(n-7, n-3) + 42(n-6, n-4);
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Man erkennt hieraus ohne Weiteres, dass die e-te Potenz von $(n-2, n)$ gleich einer Summe von gewissen Vielfachen der Bedingungen

$$(n-e-1, n), \ (n-e, n-1), \ (n-e+1, n-2), \ldots$$

ist, und dass die letzte dieser Bedingungen $\left(n-\frac{1}{2}e-1, \ n-\frac{1}{2}e\right)$ heisst, wenn e gerade ist, dagegen $\left(n-\frac{e+3}{2}, \ n-\frac{e-1}{2}\right)$ heisst, wenn e ungerade ist. Bezeichnet man also den Coefficienten des k-ten Addenden der Summe, welche gleich $(n-2, n)^e$ ist, mit $\varphi(e, k)$, so ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
(1) \quad (n-2, n)^e = {} & \varphi(e,1).(n-e-1,n)+\varphi(e,2).(n-e,n-1)\\
& + \varphi(e,3).(n-e+1, n-2)\\
& + \varphi(e,4).(n-e+2, n-3)+\cdots,
\end{aligned}
$$

welche Summe soweit fortzusetzen ist, bis eine Grundbedingung (a, b) erscheinen würde, bei der $a \geqq b$ wäre, und die also sinnlos würde. Das letzte Glied heisst also $\varphi\left(e, \frac{1}{2}e+1\right)\cdot\left(n-\frac{1}{2}e-1, \ n-\frac{1}{2}e\right)$, wenn e gerade ist, und $\varphi\left(e, \frac{e+1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{e+3}{2}, \ n-\frac{e-1}{2}\right)$, wenn e ungerade ist. Es handelt sich nun noch darum, den Coefficienten $\varphi(e, k)$ allgemein durch e und k auszudrücken. Um dies zu erreichen, beachten wir, dass die obigen Coefficienten nach folgendem *Bildungsgesetze* entstehen. Es ist immer:

erstens: $\varphi(e, 1) = 1$,

zweitens: $\varphi(e, k) = \varphi(e-1, k) + \varphi(e-1, k-1)$,

drittens: $\varphi\left(e, \frac{1}{2}e+1\right) = \varphi\left(e-1, \frac{1}{2}e\right)$, wenn e gerade ist.

Es ist also $\varphi(e, k)$ so zu bestimmen, dass diesen drei Bedingungen genügt wird. Der zweiten Bedingung genügt bekanntlich jeder *Binomialcoefficient* von der Form $(e \pm c)_{k \pm d}$, wo c und d ganze Zahlen

sind, und deshalb auch jede Summe von Vielfachen solcher Binomialcoefficienten mit der Basis $e+c$. Um auch der ersten Bedingung zu genügen, ist es am einfachsten, $(e+c)_{k-1}$ mit einer algebraischen Summe von Vielfachen von Binomialcoefficienten additiv zusammenzusetzen, welche sämmtlich die Basis $(e+c)$ haben, und deren Index kleiner als $k-1$ ist. Aus den hiernach noch möglichen Functionen haben wir dann eine solche herauszusuchen, durch welche auch der dritten der obigen Bedingungen genügt wird. So erhält man:

$$(2) \qquad \varphi(e,k) = (e-1)_{k-1} - (e-1)_{k-3}$$

oder Functionen, die wegen der Sätze über Binomialcoefficienten mit dieser identisch werden. Die erhaltene Function formen wir noch in folgender Weise um:

$$\varphi(e,k) = (e-1)_{k-1} - (e-1)_{k-3} = \frac{(e-1)!}{(k-1)!(e-k)!} - \frac{(e-1)!}{(k-3)!(e-k+2)!}$$

$$= \frac{(e-1)!}{(k-1)!(e-k+2)!}\left[(e-k+1)(e-k+2)-(k-1)(k-2)\right]$$

$$= \frac{e!}{(k-1)!(e-k+1)!}\cdot\frac{e-2k+3}{e-k+2},$$

also:

$$(3) \qquad \varphi(e,k) = e_{k-1}\cdot\frac{e-2k+3}{e-k+2}.$$

Demnach lässt sich die e-te Potenz der einfachen Grundbedingung $(n-2,n)$ *auf folgende Weise durch die e-fachen Grundbedingungen ausdrücken:*

$$(4) \qquad (n-2,n)^e = (n-e-1,n) + e_1\cdot\frac{e-1}{e}\cdot(n-e,n-1)$$
$$+ e_2\cdot\frac{e-3}{e-1}\cdot(n-e+1,n-2)$$
$$+ e_3\cdot\frac{e-5}{e-2}\cdot(n-e+2,n-3)+\cdots,$$

welche Summe abzubrechen ist, sobald ein sinnloses Bedingungssymbol erscheint, oder, was auf dasselbe hinauskommt, sobald ein Coefficient Null oder negativ wird.

Mit Hülfe dieser Formel kann man z. B. die *Anzahl* der Strahlen, welche die beliebige Grundbedingung (a,α) erfüllen und zugleich die Grundbedingung $(n-2,n)$ $(a+\alpha-1)$-mal erfüllen, direct durch a und α ausdrücken. Zu diesem Zwecke hat man in (4) $e=a+\alpha-1$ zu setzen, und jede der Grundbedingungen $(n-e-1,n)$, $(n-e,n-1)$, $(n-e+1,n-2)$ u. s. w. mit (a,α) zusammenzusetzen. Die so erhaltenen zusammengesetzten Bedingungen werden aber sämmtlich unerfüllbar, mit Ausnahme von $(n-\alpha,n-a)$ (a,α), wofür sich nach § 4 (0,1) ergiebt. Es ist also, da $(0,1)=1$ ist, die gesuchte Anzahl gleich dem Coefficienten, mit dem in (4) die Grundbedingung $(n-\alpha,n-a)$

multiplicirt erscheint. Es ist dies der Coefficient des $(a+1)$-ten Addenden, also

$$e_a \cdot \frac{e-2a+1}{e-a+1},$$

wo

$$e = a + \alpha - 1$$

ist, d. h.

$$\frac{(a+\alpha-1)!}{a!(\alpha-1)!} \frac{\alpha-a}{\alpha} = \frac{(a+\alpha)!}{a!\,\alpha!} \cdot \frac{\alpha-a}{\alpha+a} = (\alpha+a)_a \cdot \frac{\alpha-a}{\alpha+a},$$

also:

$$(5) \qquad (a, \alpha)\,(n-2, n)^{a+\alpha-1} = \frac{\alpha-a}{\alpha+a} \cdot (\alpha+a)_a.$$

Demnach ist immer $\frac{\alpha-a}{\alpha+a} \cdot (\alpha+a)_a$ *die Anzahl der Strahlen, welche in einem* $[n]$ *einen gegebenen* $[a]$ *schneiden, dabei in einem durch* $[a]$ *gehenden* $[\alpha]$ *liegen, und ausserdem* $(\alpha+a-1)$ *beliebig gegebene* $[n-2]$ *schneiden.* Es ergiebt sich hieraus z. B. für $a=0$, $\alpha=2$, dass es $\frac{2-0}{2+0} \cdot (2+0)_0 = 1$ Strahl giebt, der in unserm Raume in einem gegebenen Strahlbüschel liegt und zugleich eine gegebene Gerade schneidet; ferner für $a=1$, $\alpha=4$, dass es in einem vierdimensionalen, linearen Raume $\frac{4-1}{4+1} \cdot (4+1)_1 = 3$ Strahlen giebt, die eine gegebene Gerade und vier gegebene Ebenen schneiden, ein Resultat, das schon am Schluss von § 4 vorkommt. Bemerkenswerth ist der Fall, wo $a=0$ und α beliebig ist. Dann erhält man $\frac{\alpha-0}{\alpha+0} \cdot (\alpha+0)_0 = 1$. Es giebt also in jedem $[n]$ immer nur einen einzigen Strahl, der durch einen gegebenen Punkt geht, in einem beliebigen, diesen Punkt enthaltenden $[\alpha]$ liegt, und $\alpha-1$ gegebene $[n-2]$ schneidet, gleichviel wie gross α ist.

Schliesslich bestimmen wir noch die Zahl $(n-2, n)^{2n-2}$, d. h. die Anzahl der Strahlen, welche in einem $[n]$ *nur* die einfache Grundbedingung hinlänglich oft, d. h. $(2n-2)$ mal, erfüllen. Man kann diese Zahl erstens aus (5) entnehmen, indem man sich unter (a, α) die nullfache Grundbedingung $(n-1, n)$ vorstellt, zweitens auch aus (5), indem man sich unter (a, α) die einfache Grundbedingung $(n-2, n)$ vorstellt, drittens aus (1), indem man $e = 2n-2$ setzt. Je nachdem man den ersten, zweiten oder dritten Weg einschlägt, erhält man für die gesuchte Zahl:

$$(6) \qquad \frac{1}{2n-1} \cdot (2n-1)_{n-1} \quad \text{oder} \quad \frac{2}{2n-2} \cdot (2n-2)_{n-2} \quad \text{oder}$$

$$(0,1) \cdot \varphi(2n-2, n) = (2n-2)_{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Alle drei Resultate erweisen sich als identisch und ergeben den Satz:

Die Anzahl der Strahlen, welche in einem n-dimensionalen, linearen Raume jeden von $2n-2$ beliebig gegebenen $(n-2)$-dimensionalen, linearen Räumen zu schneiden vermögen, beträgt $\frac{(2n-1)_n}{2n-1}$ *).

Es wird vielleicht nicht überflüssig sein, dieses Resultat auch *in algebraischer Form* auszusprechen Dass in einem $[n]$ $2n-2$ lineare Räume $(n-2)$-ter Dimension gegeben sind, bedeutet algebraisch, dass $2n-2$ Systeme von je zwei Gleichungen zwischen n Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ von der Form:

$$\begin{cases} x_1 = a + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_n x_n, \\ x_1' = a' + a_2' x_2 + a_3' x_3 + \cdots + a_n' x_n \end{cases}$$

gegeben sind. Wenn nun ein gesuchter Strahl einen solchen $(n-2)$-dimensionalen Raum schneiden soll, so heisst dies, dass ein System von $n-1$ Gleichungen von der Form:

$$\begin{cases} x_2 = -y_2 x_1 + z_2, \\ x_3 = -y_3 x_1 + z_3, \\ \vdots \\ x_n = -y_n x_1 + z_n \end{cases}$$

mit dem jenen Raum darstellenden Gleichungssysteme eine Werthgruppe der $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ gemeinsam haben soll. Hierzu ist erforderlich, dass zwischen den $2n-2$ Grössen $y_2, y_3, \ldots, y_n, z_2, z_3, \ldots, z_n$ eine Gleichung besteht. Man erhält dieselbe durch Elimination der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus den $2+(n-1)$ Gleichungen der beiden Systeme in folgender Form:

$$(7) \qquad \frac{a + a_2 z_2 + a_3 z_3 + \cdots + a_n z_n}{1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \cdots + a_n y_n} = \frac{a' + a_2' z_2 + a_3' z_3 + \cdots + a_n' z_n}{1 + a_2' y_2 + a_3' y_3 + \cdots + a_n' y_n}.$$

Da eine solche Bedingungsgleichung für jeden der $2n-2$ linearen Räume stattfinden muss, so erhalten wir aus (6) den Satz:

Einem System von $2n-2$ Gleichungen, welche alle die Form der in (7) angeführten Gleichungen haben, wird durch $\frac{(2n-1)_n}{2n-1}$ *Werthgruppen der $2n-2$ Unbekannten $y_2, y_3, \ldots, y_n, z_2, z_3, \ldots, z_n$ genügt.*

§ 6.

Zahl der Strahlen eines $[n]$, welche die zweifache Bedingung, einen gegebenen $[n-3]$ zu schneiden, beliebig oft, und ausserdem eine beliebige Grundbedingung erfüllen.

Durch wiederholte Anwendung der Regel (13) des § 4 erhält man nach und nach:

---

*) Wegen dieser Anzahl vergl. die Anmerkung auf Seite 27.

$$
\begin{aligned}
(n-3,n) &= (n-3,n);\\
(n-3,n)^2 &= (n-5,n) + (n-4,n-1) + (n-3,n-2);\\
(n-3,n)^3 &= (n-7,n) + 2(n-6,n-1) + 3(n-5,n-2)\\
&\quad + (n-4,n-3);\\
(n-3,n)^4 &= (n-9,n) + 3(n-8,n-1) + 6(n-7,n-2)\\
&\quad + 6(n-6,n-3) + 3(n-5,n-4);\\
(n-3,n)^5 &= (n-11,n) + 4(n-10,n-1) + 10(n-9,n-2)\\
&\quad + 15(n-8,n-3) + 15(n-7,n-4)\\
&\quad + 6(n-6,n-5);\\
(n-3,n)^6 &= (n-13,n) + 5(n-12,n-1) + 15(n-11,n-2)\\
&\quad + 29(n-10,n-3) + 40(n-9,n-4)\\
&\quad + 36(n-8,n-5) + 15(n-7,n-6);
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Hieraus ersieht man ohne Weiteres:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad (n-3,n)^e &= \psi(e,1)(n-2e-1,n) + \psi(e,2)(n-2e,n-1)\\
&\quad + \psi(e,3)(n-2e+1,n-2) + \psi(e,4)(n-2e+2,n-3)\\
&\quad + \cdots + \psi(e,e+1)(n-e-1,n-e),
\end{aligned}
$$

wo $\psi(e,k)$ den Coefficienten des k-ten Addenden der Summe bezeichnet, die gleich $(n-3,n)^e$ ist. Es handelt sich also nur noch darum, den Coefficienten $\psi(e,k)$ allgemein durch e und k auszudrücken. Zu diesem Zwecke beachten wir das Bildungsgesetz, nach welchem die obigen Coefficienten entstehen. Dieses lässt sich ausdrücken, wie folgt:

erstens: $\psi(e,1) = 1$,

zweitens: $\psi(e,2) = e-1$,

drittens: $\psi(e,k) = \psi(e-1,k) + \psi(e-1,k-1) + \psi(e-1,k-2)$ für $3 \overline{\overline{<}}\, k \,\overline{\overline{<}}\, e$,

viertens: $\psi(e,e+1) = \psi(e-1,e-1)$.

Eine Ueberlegung, ähnlich der, welche in § 5 einen Ausdruck für $\varphi(e,k)$ liefert, führt dazu, dass diesen vier Bedingungen genügt wird, wenn gesetzt wird:

$$(2)\quad \psi(e,k) = (e+k-3)_{e-2} - e_1\,.\,(e+k-6)_{e-2} + e_2\,.\,(e+k-9)_{e-2} - \cdots,$$

welche Reihe von selbst abbricht, sobald die Basen $e+k-3p$ der Binomialcoefficienten $(e+k-3p)_{e-2}$ kleiner als der Index $e-2$ werden. Wir beweisen zunächst, dass dieser Ausdruck von $\psi(e,k)$ der dritten der obigen vier Bedingungen genügt. Zu diesem Zweck addiren wir die drei Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\psi(e-1,k) &= (e+k-4)_{e-3} - (e-1)_1\,.\,(e+k-7)_{e-3}\\
&\quad + (e-1)_2\,.\,(e+k-10)_{e-3} - \cdots,
\end{aligned}
$$

$$\psi(e-1, k-1) = (e+k-5)_{e-3} - (e-1)_1 \,.\, (e+k-8)_{e-3}$$
$$+ (e-1)_2 \,.\, (e+k-11)_{e-3} - \cdots,$$
$$\psi(e-1)\; k-2) = (e+k-6)_{e-3} - (e-1)_1 \,.\, (e+k-9)_{e-3}$$
$$+ (e-1)_2 \,.\, (e+k-12)_{e-3} - \cdots.$$

Die Summe der drei ersten Glieder rechts giebt nach einem bekannten Satze über Binomialcoefficienten: $(e+k-3)_{e-2} - (e+k-6)_{e-2}$; die Summe der drei zweiten Glieder rechts giebt analog:

$$-(e-1)_1\,[(e+k-6)_{e-2} - (e+k-9)_{e-2}],$$

die Summe der drei dritten Glieder giebt ebenso:

$$+(e-1)_2\,[(e+k-9)_{e-2} - (e+k-12)_{e-2}], \text{ u. s. w.}$$

Demnach ist:

$$\psi(e-1, k) + \psi(e-1, k-1) + \psi(e-1, k-2)$$
$$= (e+k-3)_{e-2} - [1 + (e-1)_1]\,(e+k-6)_{e-2}$$
$$+ [(e-1)_1 + (e-1)_2]\,(e+k-9)_{e-2}$$
$$- [(e-1)_2 + (e-1)_3]\,(e+k-12)_{e-2} + \cdots$$
$$= (e+k-3)_{e-2} - e_1 \,.\, (e+k-6)_{e-2} + e_2 \,.\, (e+k-9)_{e-2}$$
$$- e_3 \,.\, (e+k-12)_{e-2} + \cdots,$$

welcher Ausdruck gleich $\psi(e, k)$ ist. Dass ferner durch den Ausdruck in (2) auch der ersten und zweiten Bedingung genügt wird, ergiebt sich daraus, dass für $k = 1$ und $k = 2$ alle auf das erste Glied folgenden Glieder Null werden, und dass das erste Glied zu $(e-2)_{e-2} = 1$ bezw. zu $(e-1)_{e-2} = e-1$ wird. Um die vierte Bedingung zu beweisen, beachten wir, dass die Gleichung

$$\psi(e, k) = \psi(e-1, k) + \psi(e-1, k-1) + \psi(e-1, k-2)$$

oben für jedes k bewiesen ist, und dass man dieselbe deshalb auch auf Coefficienten anwenden kann, die Null oder negativ werden. Wir können demzufolge die Coefficienten in den Ausdrücken für die Potenzen von $(n-3, n)$ sämmtlich auch dadurch erhalten, dass wir der Formel (2) die Werthe von $\psi(2, k)$ für alle möglichen positiven k entnehmen, und dann nur die erste, zweite und dritte Bedingung anwenden. So ergiebt sich die Coefficiententafel:

$e=2$:	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	..
$e=3$:	1	2	3	1	-1	-3	-2	-1	0	0	0	0	0	..
$e=4$:	1	3	6	6	3	-3	-6	-6	-3	-1	0	0	0	..
$e=5$:	1	4	10	15	15	6	-6	-15	-15	-10	-4	-1	0	..
$e=6$:	1	5	15	29	40	36	15	-15	-36	-40	-29	-15	-5	..
$e=7$:	1	6	21	49	84	105	91	36	-36	-91	-105	-84	-49	..
$e=8$:	1	7	28	76	154	238	280	232	91	-91	-232	-280	-238	

Da nun einmal in der ersten Horizontalreihe die Coefficienten 1, 1, 1, -1, -1, -1, 0, 0, ... heissen, so muss in der zweiten Reihe der fünfte Coefficient das Negative des vierten, der sechste das Negative des dritten, u. s. w. sein. Aus dieser Eigenschaft der dritten Reihe folgt dann die analoge Eigenschaft der vierten Reihe u. s. f. Es ist also immer $\psi(e, k) = -\psi(e, 2e-k+3)$, und speciell $\psi(e-1, e) = -\psi(e-1, e+1)$. Hieraus folgt aber bei Anwendung der dritten Bedingung die Richtigkeit der vierten Bedingung; denn

$$\psi(e, e+1) = \psi(e-1, e+1) + \psi(e-1, e) + \psi(e-1, e-1)$$

wird wegen der eben bewiesenen Relation zu $\psi(e,e+1) = \psi(e-1, e-1)$.

Die Formel (1), deren Coefficienten nunmehr durch e ausgedrückt sind, multipliciren wir jetzt mit der beliebigen Grundbedingung (a, α), und bestimmen dabei e so, dass die Dimension von $(n-3, n)^e\,(a, \alpha)$ gleich der Constantenzahl $2n-2$ des Strahls wird. Dadurch erhalten wir $2e + 2n - 1 - a - \alpha = 2n - 2$, also $e = \frac{a+\alpha-1}{2}$. Von den entstandenen $(2n-2)$-fachen, zusammengesetzten Grundbedingungen $(a, \alpha)\,(n-2e-1, n)$, $(a, \alpha)\,(n-2e, n-1)$ u. s. w. werden nun sämmtliche unerfüllbar, ausser $(a, \alpha)\,(n-\alpha, n-a) = (0, 1)$. Deshalb ist die Zahl $(a, \alpha)\,(n-3, n)^{\frac{a+\alpha-1}{2}}$ gleich dem Coefficienten

$$\psi\left(\frac{a+\alpha-1}{2}, a+1\right),$$

für welchen sich aus (2) ergiebt:

$$(3)\quad \left(\frac{3a+\alpha-5}{2}\right)_{\frac{a+\alpha-5}{2}} - \left(\frac{a+\alpha-1}{2}\right)_1 \cdot \left(\frac{3a+\alpha-11}{2}\right)_{\frac{a+\alpha-5}{2}} \\ + \left(\frac{a+\alpha-1}{2}\right)_2 \cdot \left(\frac{3a+\alpha-17}{2}\right)_{\frac{a+\alpha-5}{2}} + \cdots$$

Wir benutzen ferner die Formeln (1) und (2), um, mit Hülfe von § 5, Formel (5), *die Anzahl der Strahlen zu berechnen, welche die Bedingung* $(n-3, n)$ *e-mal und die Bedingung* $(n-2, n)\,(2n-2-2e)$-*mal erfüllen.* Für diese Anzahl erhält man:

$$(4)\quad (2n-2e-1)_n \cdot \frac{2e+1}{2n-2e-1} + [(e-1)_{e-2}] \cdot (2n-2e-1)_{n-1} \cdot \frac{2e-1}{2n-2e-1} \\ + [e_{e-2}] \cdot (2n-2e-1)_{n-2} \cdot \frac{2e-3}{2n-2e-1} \\ + [(e+1)_{e-2} - e_1 \cdot (e-2)_{e-2}] \cdot (2n-2e-1)_{n-3} \cdot \frac{2e-5}{2n-2e-1} \\ + [(e+2)_{e-2} - e_1 \cdot (e-1)_{e-2}] \cdot (2n-2e-1)_{n-4} \cdot \frac{2e-7}{2n-2e-1} + \cdots$$

Schliesslich setzen wir in (1) $e = n-1$ oder in (3) $a = n-1$, $\alpha = n$, und erhalten dadurch:

$$(5) \quad \psi(n-1, n) \text{ oder } (2n-4)_{n-3} - (n-1)_1 (2n-7)_{n-3} + (n-1)_2 (2n-10)_{n-3} - \cdots,$$

was nach Formel (2) identisch ist. Dieses Resultat lautet in Worten:

Die Anzahl derjenigen Strahlen eines n-dimensionalen, linearen Raumes, welche jeden von $n-1$ beliebig gegebenen $(n-3)$-dimensionalen Räumen schneiden, beträgt:

$$(2n-4)_{n-3} - (n-1)_1 (2n-7)_{n-3} + (n-1)_2 (2n-10)_{n-3} - (n-1)_3 (2n-13)_{n-3} + \cdots,$$

also z. B. für $n = 9$:

$$14_6 - 8_1 \cdot 11_6 + 8_2 \cdot 8_6 = 91.$$

In derselben Weise, wie für den Strahl habe ich auch für die Ebene und für beliebig-stufige Hauptelemente einen Theil der Grundlagen zur Berechnung der zugehörigen fundamentalen Anzahlen festgestellt. Doch werde ich in der Abhandlung, welche ich zunächst veröffentlichen werde, nicht diese Erweiterung des Inhalts der vorliegenden Abhandlung zeigen, sondern die hier gewonnenen Resultate, namentlich den Inhalt von § 3 und § 4, dazu benutzen, um die Tangentensingularitäten eines in einem $[n]$ liegenden, $(n-1)$-stufigen, punktallgemeinen Raumes *m-ten Grades*, also n-dimensionale Verallgemeinerungen von gewissen vielstudierten Theilen der Flächentheorie, anzahlgeometrisch zu behandeln.

Hamburg, October 1884.

Die n-dimensionale Verallgemeinerung der Anzahlen für die vielpunktig berührenden Tangenten einer punktallgemeinen Fläche m-ten Grades.

Von

Hermann Schubert in Hamburg.

Für eine in unserm dreidimensionalen Raume liegende, punktallgemeine Fläche m-ten Grades sind die Anzahlen, welche angeben, wie viel vierpunktig berührende Tangenten eine gegebene Gerade schneiden, oder ihren Berührungspunkt auf einer gegebenen Ebene haben, und wie viel Tangenten fünfpunktig berühren, sowie alle verwandten Singularitätenzahlen gewisse ganze Functionen von m, die z. B. in den genannten Fällen von Salmon und vom Verfasser (vgl. im „Kalkül der abzähl. Geometrie": § 33 und Literaturverz. S. 341) bestimmt sind. Die Coefficienten dieser ganzen Functionen sind bestimmte rationale Zahlen, denen man nicht ansehen kann, in welcher Weise sie von der Dimension drei des Raumes und von der Natur der betreffenden Singularitäten abhängen. Um diess deutlich zu erkennen, und um zugleich die Anwendbarkeit meiner Abzählungsmethode auch bei Zugrundelegung eines n-dimensionalen, linearen Raumes zu zeigen, löse ich hier (§ 6, F. 2) in voller Allgemeinheit die folgende Aufgabe:

Für einen in einem n-dimensionalen linearen Raume liegenden, $(n-1)$-dimensionalen, punktallgemeinen Raum m-ten Grades R_{n-1}^m die Anzahl derjenigen Geraden durch m und n auszudrücken, welche den R_{n-1}^m in $i+1$ unendlich nahen Punkten berühren, dabei selbst eine beliebige gegebene Grundbedingung erfüllen, und auch ihren Berührungspunkt eine solche erfüllen lassen.

Was hier unter Grundbedingung zu verstehen ist, geht aus § 3 meiner der vorliegenden Abh. hier vorangestellten Abhandlung „Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raums"*) hervor. Dort sind auch die sämmtlichen Grundbedingungen des Punktes und des Strahles zusammengestellt und mit leicht verständ-

---

*) Diese Abhandlung nenne ich im Folgenden abkürzend „Fund. Anz." Von den Resultaten der „Fund. Anz." benutze ich hier namentlich die dort in § 4 bewiesenen wichtigen Formeln (9) und (10), welche für den Strahl jede aus zwei Grundbedingungen zusammengesetzte Bedingung durch nicht-zusammengesetzte Bedingungen ausdrücken.

lichen Symbolen bezeichnet. Da ich diese Symbole auch in der vorliegenden Abhandlung anwende, so wiederhole ich hier, was sie bedeuten:

Das Symbol $[a]$ bedeutet einen a-dimensionalen, linearen Raum, und dem entsprechend das Symbol (a) die Bedingung, dass ein Punkt in einem gegebenen $[a]$ liegen soll;

das Symbol $[a, \alpha]$ bedeutet die Gesammtheit der Strahlen, welche, ganz in einem gegebenen $[\alpha]$ liegend, einen in diesem $[\alpha]$ befindlichen, gegebenen $[a]$ schneiden, d. h. einpunktig treffen, und dem entsprechend das Symbol (a, α) die Bedingung, dass ein Strahl einer gegebenen Gesammtheit (a, α) angehört*).

Einen a-dimensionalen Raum, der m-ten *Grades ist*, d. h. der m mit einem gegebenen $[n-a]$ Punkte gemein hat, bezeichne ich mit R_a^m. Die Dimension des linearen Raumes, in dem die erörterten Gebilde liegend gedacht werden sollen, ist immer n, wenn nicht eine andere Dimension ausdrücklich gesagt ist.

Das Hauptziel der vorliegenden Abhandlung ist die in § 4, § 5 und § 6 bewerkstelligte Lösung der oben ausgesprochenen Aufgabe. Um jedoch die in dieser Aufgabe angestrebte Anzahl ermitteln zu können, hat man zwei allgemeine Formeln nöthig. Die erste dieser Formeln (§ 1) ist die n-dimensionale Verallgemeinerung der von mir in § 7 (S. 25) meines „Calcüls" abgeleiteten, und als „Incidenzformel zwischen Punkt und Strahl" bezeichneten Formel. Die zweite Formel (§ 2), die man nöthig hat, ist die n-dimensionale Verallgemeinerung der von mir in § 14 (S. 44) meines „Calcüls" abgeleiteten und als „Coincidenzformel des Punktpaares" bezeichneten Formel. Aus beiden Formeln habe ich noch viele andere Incidenz- und Coincidenzformeln abgeleitet; von diesen sind jedoch hier, der Kürze wegen, nur diejenigen entwickelt, welche in den folgenden Paragraphen Anwendung finden. Der letzte Paragraph enthält einige naheliegende Specialisirungen des in § 6 gewonnenen allgemeinen Resultats.

Um möglichst kurz zu sein, und um Complicationen zu vermeiden, habe ich nur solche Tangenten berücksichtigt, welche einen R_{n-1}^m an *einer* Stelle $(i+1)$-punktig berühren, und sonst $m-i-1$ einfache Schnittpunkte besitzen. Ich bemerke jedoch, dass ohne weitere, theoretische Schwierigkeit sich in ähnlicher Weise auch alle Anzahlen ermitteln lassen, welche auf solche Tangenten Bezug nehmen, die an einer Stelle k_1-punktig, an einer zweiten Stelle k_2-punktig, an einer dritten Stelle k_3-punktig u. s. w. berühren.

*) Die Gebilde $[a]$ bezw. $[a, \alpha]$ nenne ich *Grundgebilde* des Punktes bezw. des Strahls, und die Bedingungen (a) bezw. (a, α) nenne ich *Grundbedingungen* des Punktes bezw. des Strahls. (Fund. Anz. § 3).

§ 1.

Die grundlegende Incidenzformel zwischen Punkt und Strahl.

Dem Gebilde, welches aus einem Strahle g und einem darauf befindlichen Punkte p besteht, und welches desshalb (nach „Fund. Anz.", § 3) die Constantenzahl $(2n-2)+1=2n-1$ hat, sei die zusammengesetzte Bedingung

$$(a, n)(n-1)$$

auferlegt, d. h. die Bedingung, dass der Strahl g einen gegebenen $[a]$ schneiden soll, und dass zugleich der Punkt p in einem gegebenen $[n-1]$ liegen soll. Da diese Bedingung die Dimension $(2n-1-a-n)+(n-n+1)$ oder $n-a$ hat, so ist durch sie und eine beliebige, hinzutretende und von ihr unabhängige $(2n-1-n+a)$-fache, d. h. $(n+a-1)$-fache, algebraische Bedingung Z eine endliche Anzahl von Gebilden bestimmt. Nach dem Princip von der Erhaltung der Anzahl bleibt diese endliche Anzahl erhalten oder wird unendlich, wenn man den beiden, die Bedingung $(a, n)(n-1)$ definirenden linearen Räumen $[a]$ und $[n-1]$ die allgemeine Lage zu einander nimmt und eine specielle Lage zu einander ertheilt. Desshalb legen wir den Raum $[a]$ in den Raum $[n-1]$. Jetzt ist die gestellte Bedingung $(a, n)(n-1)$ nur auf zweierlei Weise erfüllbar, entweder dadurch, dass der Punkt p in dem Raume $[a]$ liegt, oder dadurch, dass der Strahl g in dem Raume $[n-1]$ liegt, und dabei den in dem $[n-1]$ liegenden $[a]$ schneidet. Im ersten Falle erfüllt das aus p und g bestehende Gebilde die Bedingung (a), im zweiten Falle die Bedingung $(a, n-1)$. Da nun beide Bedingungen, (a), und $(a, n-1)$, die Dimension $n-a$, also dieselbe Dimension wie $(a, n)(n-1)$ haben, so ist die oben erwähnte, endliche Anzahl durch die Lagespecialisirung nicht unendlich geworden, und es ergiebt sich desshalb die wichtige Formel:

$$(a, n)(n-1) = (a) + (a, n-1).$$

Hierbei kann a jede der ganzen Zahlen von 0 bis $n-2$ sein. Der höchste Werth aber, den a haben kann, damit (a, n) Sinn behält, ist $n-1$. Auch in diesem Falle ist die Incidenzformel (1) noch wichtig, wenn man das dann auftretende, sinnlose Symbol $(n-1, n-1)$ gleich null setzt. Es kommt nämlich dann, da $(n-1, n)$ selbstverständlich immer erfüllt wird, $(n-1)=(n-1)$. Für $a=n-2$ ergiebt sich speciell: $(n-2, n)(n-1)=(n-2)+(n-2, n-1)$. Setzt man ferner in Formel (1) $n=3$ und dann $a=1$ oder $a=0$, so ergeben sich die Incidenzformeln, welche ich in meinem Kalcül der abzähl. Geom. (§ 7) in der Form $pg=p^2+g_e$ bezw. $pg_p=p^3+g_s$ geschrieben habe.

Die obige Incidenzformel lautet in Worten:

Die Anzahl derjenigen, aus einem Strahl g und einem darauf befindlichen Punkte p bestehenden Gebilde, welche eine beliebige, algebraische, $(n + a - 1)$-fache Bedingung Z erfüllen, ihren Strahl g einen gegebenen a-dimensionalen, linearen Raum $[a]$ schneiden lassen, und dabei auch ihren Punkt p auf einem gegebenen $(n - 1)$-dimensionalen, linearen Raume $[n - 1]$ besitzen, ist gleich der Summe der beiden Zahlen, von denen die eine angiebt, wie viel solcher Gebilde die Bedingung Z erfüllen und ihren Punkt p auf einem gegebenen $[a]$ besitzen, die andere angiebt, wie viel solcher Gebilde die Bedingung Z erfüllen, und die Eigenschaft haben, dass ihr Strahl g in einem gegebenen $[n - 1]$ liegt und dabei einen in dem $[n - 1]$ befindlichen, gegebenen $[a]$ schneidet.

Aus der obigen grundlegenden Incidenzformel lassen sich durch Multiplication mit den auf p und g bezüglichen Grundbedingungen, bei Benutzung der in § 4 der „Fund. Anz.“ für die Multiplication von Grundbedingungen aufgestellten Hauptformeln, alle übrigen Incidenzformeln ableiten.

§ 2.

Die grundlegende Coincidenzformel für Punktepaare.

Der Correspondenzsatz, welcher in unserm dreidimensionalen Raume für die Punkte einer Geraden, die Strahlen eines Strahlbüschels und die Ebenen eines Ebenenbüschels besteht, gilt auch für die Elemente jedes einstufigen Grundgebildes, das in einem n-dimensionalen, linearen Raume $[n]$ liegt. Um diess für die ∞^1 Räume $[n - 1]$ einzusehen, welche einen und denselben festen $[n - 2]$ gemeinsam haben, denke man sich in dem $[n]$ eine beliebige, feste Gerade g, und deren Punkte als ihre Schnittpunkte mit den ∞^1 Räumen $[n - 1]$, so dass sich jedem $[n - 1]$ ein Punkt auf g als Schnittpunkt zuordnet. Wenn nun einem $[n - 1]$ β andere $[n - 1]$ in gewisser Weise entsprechen, und umgekehrt α Räume $[n - 1]$ einem dieser β $[n - 1]$ entsprechen, so ist dadurch auch eine Correspondenz (α, β) zwischen den zugeordneten Punkten von g festgestellt. Da nun $\alpha + \beta$ Punkte auf g liegen, welche durch diese Correspondenz sich selbst entsprechen, so giebt es auch $\alpha + \beta$ durch den festen $[n - 2]$ gehende $[n - 1]$, die sich selbst entsprechen. Durch diese Erkenntniss sind wir im Stande, die allgemeine Formel für die Coincidenz von Punkten abzuleiten. Wir denken uns zu diesem Zwecke ein einstufiges System von Gebilden (Punktepaaren], deren jedes aus zwei Punkten p und p' und ihrer Verbindungsgeraden g besteht. Es bezeichne $(n - 1)$ die Zahl derjenigen Gebilde dieses Systems, welche ihren Punkt p auf einem ge-

gebenen $[n-1]$ haben, $(n-1)'$ die Zahl derjenigen Gebilde dieses Systems, welche ihren Punkt p' auf einem gegebenen $[n-1]$ haben, und $(n-2, n)$ die Zahl derjenigen Gebilde dieses Systems, welche ihre Verbindungsgerade einen gegebenen $[n-2]$ schneiden lassen. Legt man nun durch einen festen $[n-2]$ und je zwei einem und demselben Gebilde angehörige Punkte p und p' je zwei $(n-1)$-dimensionale lineare Räume, so entsteht eine Correspondenz zwischen den ∞^1 durch den $[n-2]$ gehenden Räumen. Diese Correspondenz führt nach dem Obigen zu

$$(n-1)+(n-1)'$$

sich selbst entsprechenden Räumen, Wenn aber ein solcher Raum sich selbst entspricht, so kann diess nur von zweierlei herrühren, erstens davon, dass die Verbindungsgerade eines Punktepaares den festen $[n-2]$ schneidet, zweitens davon, dass in einem Punktepaare die Punkte p und p' zusammenfallen. Demnach erhält man als *Coincidenzformel für Punktepaare:*

$$(n-1)+(n-1)'-(n-2, n)=\varepsilon,$$

wo ε die Zahl derjenigen Gebilde des vorausgesetzten einstufigen Systems bedeutet, auf denen die Punkte p und p' zusammenfallen.

Aus dieser grundlegenden Coincidenzformel lassen sich durch Multiplication mit den auf p, p' und g bezüglichen Grundbedingungen, bei Benutzung der Incidenzformeln (§ 1), alle übrigen Coincidenzformeln ableiten. Eine derselben folgt in § 3.

§ 3.

Schnitt einer Linienfläche mit einem $(n-1)$-dimensionalen Raum m-ten Grades.

Obwohl auch rein algebraisch erkannt werden kann, dass ein $(n-1)$-dimensionaler Punktraum m-ten Grades eine Linienfläche m'-ten Grades in einer Curve $(m.m)'$-ten Grades schneidet, ziehen wir es vor, diesen im Folgenden (§ 4) zur Anwendung kommenden Satz mit Hilfe der in § 2 abgeleiteten Punktepaar-Formel zu beweisen. Zu diesem Zwecke multipliciren wir die letztere mit der auf den Verbindungsstrahl g der Punkte p und p' bezüglichen Bedingung $(0, n)$, und erhalten:

$$(0, n)(n-1)+(0, n)(n-1)'-(n-2, n)(0, n)=\varepsilon(0, n).$$

Statt $(0, n)(n-1)$ kann man nach § 1 : $(0)+(0, n-1)$ setzen, und ebenso $(0)'+(0, n-1)$ statt $(0, n)(n-1)'$. Ferner kann man nach der in § 4 der „Fund. Anz.“ abgeleiteten Formel $(n-2, n)(0, n)$ gleich $(0, n-1)$ setzen. Diese Einsetzungen ergeben:

$$(0)+(0)'+(0, n-1)=\varepsilon(0, n).$$

Diese Formel kann in Worten folgendermassen ausgesprochen werden:

Zwischen den ∞^n Punkten eines n-dimensionalen, linearen Raumes bestehe eine Correspondenz derartig, dass jedem beliebigen Punkte in gewisser Weise β Punkte entsprechen, und dass umgekehrt jedem dieser β Punkte α Punkte entsprechen. Ferner habe das n-stufige System der Verbindungsgeraden je zweier einander entsprechender Punkte die Eigenschaft, dass in einem gegebenen $(n-1)$-dimensionalen, linearen Raume γ solcher Verbindungsgeraden durch einen in diesem Raume gegebenen Punkt gehen. Dann ist

$$\alpha + \beta + \gamma$$

die Zahl der Punkte, denen ein entsprechender Punkt derartig unendlich nahe liegt, dass die Verbindungsgerade der beiden unendlich nahen Punkte durch einen beliebig gegebenen Punkt geht. Zu dieser Zahl gehören also auch die vollen Coincidenzen, d. h. solche Paare unendlich naher Punkte, bei denen die Richtung der Verbindungsgeraden völlig unbestimmt wird.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man leicht die Zahl x der gemeinsamen Punkte eines $(n-1)$-dimensionalen Raumes m-ten Grades R_{n-1}^m und einer Curve (ein-dimensionaler Raum) m'-ten Grades $R_1^{m'}$ bestimmen, indem man jeden Punkt von $R_1^{m'}$ mit jedem Punkte von R_{n-1}^m zu einem Punktepaar zusammenfasst. Dann sind die Symbole (0) und $(0)'$ der obigen Formel gleich null zu setzen. Um das Symbol $(0, n-1)$ zu bestimmen, bringen wir den die Bedingung $(0, n-1)$ definirenden $[n-1]$ zum Schnitt mit $R_1^{m'}$. Da $R_1^{m'}$ m'-ten Grades ist, so schneidet der $[n-1]$ den $R_1^{m'}$ in m' Punkten. Jeden derselben verbinden wir mit dem durch die Bedingung $(0, n-1)$ gegebenen Punkte. Da jede der so erhaltenen m' Verbindungsgeraden den R_{n-1}^m in m Punkten schneidet, so giebt es $m \, . \, m'$ Punktepaare, welche die Bedingung $(0, n-1)$ erfüllen. Ferner wird das Coincidenzsymbol $\varepsilon(0, n)$ durch jeden Punkt erfüllt, der zugleich auf R_{n-1}^m und auf $R_1^{m'}$ liegt. Da ausserdem keine einander entsprechenden Punkte unendlich nahe liegen, so ist $\varepsilon(0, n) = x$. *Wir erhalten also* $m \, . \, m'$ *für die Zahl* x *der gemeinsamen Punkte eines* R_{n-1}^m *und eines* $R_1^{m'}$. Hieraus ergiebt sich die Bestimmung des Grades der Schnittcurve eines R_{n-1}^m und einer Fläche $R_2^{m'}$ m'-ten Grades in folgender Weise. Man nehme einen beliebigen $[n-1]$ an. Derselbe schneidet den R_{n-1}^m in einem R_{n-2}^m und den $R_2^{m'}$ in einem $R_1^{m'}$. Dieser R_{n-2}^m und dieser $R_1^{m'}$ schneiden sich aber in $m \, . \, m'$ Punkten, wie aus dem eben bewiesenen Satze hervorgeht, wenn man sich statt des dabei

vorausgesetzten $[n]$ den $[n-1]$ denkt. Es liegen also auf einem beliebig angenommenen $[n-1]$: $m \,.\, m'$ gemeinsame Punkte des R^m_{n-1} und des $R^{m'}_2$, d. h. beide *schneiden sich in einer Curve vom Grade* $m \,.\, m'$. Da nun auch ein einstufiges System von *Strahlen*, unter denen m' einen gegebenen $[n-2]$ schneiden, ein zweistufiges Punktsystem (Fläche) m'-ten Grades bildet, so ergiebt sich der Satz:

Ein $(n-1)$-*dimensionaler Raum* m-*ten Grades schneidet eine Linienfläche (einstufiges System von Strahlen)* m'-*ten Grades in einer Curve (einstufiges System von Punkten), deren Grad* $m \,.\, m'$ *ist, d. h., von deren Punkten in einem beliebig gegebenen* $(n-1)$-*dimensionalen, linearen Raume* $m \,.\, m'$ *Punkte liegen.*

§ 4.

Zahl der $(i+1)$-punktig berührenden Tangenten in einem einstufigen Systeme von i-punktig berührenden Tangenten.

Wir legen allen folgenden Betrachtungen einen punktallgemeinen, $(n-1)$-dimensionalen Raum zu Grunde, der mit einer beliebig gegebenen Geraden m Punkte gemein hat, und den wir desshalb m-ten Grades nennen und mit R^m_{n-1} bezeichnen. Unter den sämmtlichen ∞^{2n-2} Geraden muss es ein $(2n-i-1)$-stufiges System von solcher Beschaffenheit geben, dass von den m Schnittpunkten, welche jede Gerade dieses Systems auf dem R^m_{n-1} besitzt, i unendlich nahe sind, d. h., dass jede Gerade dieses Systems i-punktig berührt. Aus diesem System denken wir uns durch eine hinzutretende $(2n-i-2)$-fache Bedingung ein einstufiges System $\sum_1$ von i-punktigen Tangenten g ausgeschieden, und auf jedem der Strahlen von $\sum_1$ den Berührungspunkt b mit jedem der $m-i$ einfachen Schnittpunkte c zu einem Punktepaar zusammengefasst. Auf das so erhaltene einstufige System von Punktepaaren wenden wir die Coincidenzformel für Punktepaare (§ 2) an, und erhalten:

$$(m-i)\,b + c - (m-i)\,g = \varepsilon,$$

wenn b die Zahl derjenigen Strahlen von $\sum_1$ bedeutet, deren Berührungspunkt auf einem gegebenen $[n-1]$ liegt, c die Zahl derjenigen Strahlen von $\sum_1$, bei denen irgend einer der einfachen Schnittpunkte auf einem gegebenen $[n-1]$ liegt, g die Zahl der-

jenigen Strahlen von $\sum_1$, welche einen gegebenen $[n-2]$ schneiden, und ε die Zahl derjenigen Strahlen von $\sum_1$, bei denen im Berührungspunkte nicht bloss i, sondern $i+1$ Punkte unendlich nahe liegen.

Die Zahl e lässt sich mit Hilfe des am Schluss von § 3 bewiesenen Satzes durch die Zahlen b, g, m, i ausdrücken. Nach diesem Satze müssen nämlich von den ∞^1 Schnittpunkten des R_{n-1}^m mit der Linienfläche der i-punktigen Tangenten $m \,.\, g$ in einem gegebenen $[n-1]$ liegen. Da diese ∞^1 Schnittpunkte aber keine andern Punkte, als die Berührungspunkte und die einfachen Schnittpunkte der i-punktigen Tangenten sein können, und da jeder Berührungspunkt i Schnittpunkte des R_{n-1}^m mit der Linienfläche in sich vereinigt, so erhalten wir:

$$m \cdot g = i \cdot b + e.$$

Den aus dieser Gleichung resultirenden Werth von e setzen wir in die obige Gleichung ein, und bekommen:

$$\varepsilon = (m-i)\,b + m \cdot g - i \cdot b - (m-i)\,g,$$

oder:

$$\varepsilon = (m-2i) \cdot b + i \cdot g. \tag{1}$$

Diese Formel bezieht sich auf jedes beliebige einstufige Strahlsystem, das in dem $(2n-i-1)$-stufigen Systeme der i-punktigen Tangenten enthalten ist. Wenn wir also erstens durch das Symbol ε_p die Bedingung bezeichnen, dass eine Gerade des $[n]$ den zu Grunde gelegten R_{n-1}^m p-punktig berühre, zweitens durch das Symbol (q) die Bedingung, dass der Berührungspunkt einer solchen Geraden in einem gegebenen $[q]$ liege, drittens durch das Symbol (v, w) die Bedingung, dass eine solche Gerade in einem gegebenen $[w]$ liege, und dabei einen in dem $[w]$ liegenden, gegebenen $[v]$ schneide, so können wir die Formel (1) folgendermassen schreiben:

$$\varepsilon_{i+1} = (m-2i) \cdot \varepsilon_i(n-1) + i \cdot \varepsilon_i(n-2, n). \tag{2}$$

Multipliciren wir diese Formel mit dem Product der auf die i-punktigen Tangenten bezüglichen Bedingung (a, α) und der auf deren Berührungspunkte bezüglichen Bedingung $(n-a-\alpha+i+1)$, so erhalten wir rechts und links $(2n-2)$-fache Bedingungen, also *Anzahlen*, nämlich:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i+1}(a,\alpha)(n-a-\alpha+i+1) = (m-2i)\cdot \varepsilon_i(a,\alpha)(n-a-\alpha+i+1)(n-1) \\ + i \cdot \varepsilon_i(a,\alpha)(n-a-\alpha+i+1)(n-2,n).\end{aligned} \tag{3}$$

Ist nun $n-a-\alpha+i+1 = n$, d. h. $a+\alpha = i+1$, so entsteht aus (3):

$$\varepsilon_{i+1}(a,\alpha) = (m-2i) \cdot \varepsilon_i(a,\alpha)\,(n-1) + i \cdot \varepsilon_i(a,\alpha)\,(n-2,n).$$

Hieraus ergiebt sich durch Anwendung der Formel (12) in § 4 der „Fund. Anz." die Formel:

$$(4)\quad \varepsilon_{i+1}(a,\alpha) = (m-2i)\cdot\varepsilon_i(a,\alpha)(n-1) + i\cdot\varepsilon_i(a-1,\alpha) + i\cdot\varepsilon_i(a,\alpha-1),\ \text{falls}\ a+\alpha = i+1\ \text{ist.}$$

Ist aber $n-a-\alpha+i+1<n$, d. h. $a+\alpha>i+1$, so kann man in (3):

$$(n-a-\alpha+i+1) = (n-a-\alpha+i+2)(n-1)$$
(Fund. Anz., § 4, F. (2))

setzen und auf das dann entstehende Symbol die in § 1 entwickelte Incidenzformel $(n-1)(n-2,n) = (n-2)+(n-2,n-1)$ anwenden. Dadurch erhält man zunächst:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i+1}(a,\alpha)(n-a-\alpha+i+1) = (m-2i)\cdot\varepsilon_i(a,\alpha)(n-a-\alpha+i+1)(n-1)\\ + i\cdot\varepsilon_i(a,\alpha)(n-a-\alpha+i+2)(n-2)\\ + i\cdot\varepsilon_i(a,\alpha)(n-a-\alpha+i+2)(n-2,n-1).\end{aligned}$$

Beachtet man nun hoch, dass $(n-a-\alpha+i+1)(n-1)$ ebensowohl wie $(n-a-\alpha+i+2)(n-2)$ nach „Fund. Anz.", § 4, F. (2) gleich $n-a-\alpha+i$ werden, und dass nach „Fund. Anz.", § 4, F. (11) $(a,\alpha)(n-2,n-1) = (a-1,\alpha-1)$ ist, so erhält man schliesslich:

$$(5)\quad \varepsilon_{i+1}(a,\alpha)(n-a-\alpha+i+1) = (m-i)\cdot\varepsilon_i(a,\alpha)(n-a-\alpha+i) + i\cdot\varepsilon_i(a-1,\alpha-1)(n-a-\alpha+i+2),$$
falls $a+\alpha>i+1$ ist.

Diese Formel, welche in einfachster Weise die Bestimmung der Anzahlen für $(i+1)$-punktige Tangenten auf die Anzahlen für i-punktige Tangenten zurückführt, lautet in Worten:

Die Anzahl derjenigen Geraden, welche einen $(n-1)$-dimensionalen, punktallgemeinen Raum m-ten Grades R^m_{n-1} in $i+1$ unendlich nahen Punkten berühren, ferner in einem gegebenen $[\alpha]$ liegen, einen in diesem $[\alpha]$ liegenden, gegebenen $[a]$ schneiden, und ihren Berührungspunkt auf einem gegebenen $[n-a-\alpha+i+1]$ besitzen, ist gleich der Summe zweier Summanden von folgender Beschaffenheit. Der erste Summand ist das $(m-i)$-fache der Anzahl derjenigen Geraden, welche den R^m_{n-1} in i unendlich nahen Punkten berühren, in einem gegebenen $[\alpha]$ liegen, einen in diesem $[\alpha]$ liegenden, gegebenen $[a]$ schneiden, und ihren Berührungspunkt auf einem gegebenen $[n-a-\alpha+i)$ besitzen. Der zweite Summand ist das i-fache der Anzahl derjenigen Geraden, welche den R^m_{n-1} in i unendlich nahen Punkten berühren, in einem ge-

gebenen $[\alpha - 1]$ *liegen, einen in diesem* $[\alpha - 1]$ *liegenden, gegebenen* $[a - 1]$ *schneiden, und ihren Berührungspunkt auf einem gegebenen* $[n - a - \alpha + i + 2]$ *besitzen.*

§ 5.

Ableitung der allgemeinen Formel, welche die gesuchten Zahlen durch i, m, n ausdrückt.

Die sämmtlichen Anzahlen, deren Bestimmung das Hauptziel (vgl. Einleitung) dieser Abhandlung ist, erhält man nach einander vermittelst der Formeln (4) und (5) des vorigen Paragraphen, sobald jede durch das Symbol $\varepsilon_1(a, \alpha)(n - a - \alpha + 1)$ ausgedrückte Anzahl berechnet vorliegt, d. h. jede Anzahl, welche angiebt, wie viel Gerade des $[n]$ eine beliebige gegebene Grundbedingung (a, α) erfüllen, und dabei den R^m_{n-1} so treffen, dass einer ihrer m Schnittpunkte auf einem gegebenen $[n - a - \alpha + 1]$ liegt. Um diese Anzahl aus der Definition des R^m_{n-1} abzuleiten, beachten wir, dass einer der m Schnittpunkte nicht bloss auf dem gegebenen $[n - a - \alpha + 1]$, sondern auch, wegen der Bedingung (a, α), auf einem gegebenen (α) liegen muss. Der Schnittpunkt muss also auf dem Schnitt des $[n - a - \alpha + 1]$ und des $[\alpha]$, d. h. auf einem $[- a + 1]$ liegen. Dieser Raum kann, da a doch nicht negativ sein darf, nur noch einen Punkt oder eine Gerade darstellen, je nachdem nämlich $a = 1$ oder $a = 0$ ist. Ist er ein Punkt, so ist die gestellte Bedingung $(a, \alpha)(n - a - \alpha + 1)$ unerfüllbar, weil dieser Punkt, als Schnitt des beliebigen $[n - a - \alpha + 1]$ und des beliebigen $[\alpha]$ im Allgemeinen nicht zugleich Punkt des R^m_{n-1} zu sein braucht. Ist jener Raum $[- a + 1]$ aber eine Gerade, also $a = 0$, so schneidet dieselbe den R^m_{n-1} in m Punkten, und die Verbindungslinie jedes dieser m Punkte mit dem durch $a = 0$ gegebenen Punkte, erfüllt die gestellte Bedingung. Es ist demnach immer:

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon_1(0, \alpha)(n - \alpha + 1) = m, \\ \varepsilon_1(a, \alpha)(n - a - \alpha + 1) = 0, \quad \text{falls } a > 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich nun vermittelst der Formeln (4) und (5) des vorigen Paragraphen die auf ε_2 bezüglichen Zahlen, nämlich aus (4) für $i = 1$:

$$\varepsilon_2(0, 2) = (m - 2) \cdot m + 1 \cdot 0 + 1 \cdot m = m(m - 1);$$

ferner aus (5) für $i = 1$:

$\varepsilon_2(0, \alpha)(n - \alpha + 2) = (m - 1)\ m + 1 \cdot 0 = m(m - 1)$ für $\alpha > 2$,

und $\varepsilon_2(1, \alpha)(n - \alpha + 1) = (m - 1) \cdot 0 + 1 \cdot m = m$ für $\alpha > 1$,

endlich $\varepsilon_2(a, \alpha)(n - a - \alpha + 2) = (m - 1) \,.\, 0 + m \,.\, 0 = 0$ für $a > 1$, also $\alpha > 2$.

Das erste und zweite dieser vier auf ε_2 bezüglichen Resultate lassen sich zusammenfassen, sodass wir erhalten:

$$
(2)\quad \begin{cases}
\varepsilon_2(0,\alpha)\,(n-\alpha+2) &= m(m-1), \text{ wo natürlich } \alpha > 1 \text{ ist,}\\
\varepsilon_2(1,\alpha)\,(n-\alpha+1) &= m, \text{ wo natürlich } \alpha > 1 \text{ ist,}\\
\varepsilon_2(a,\alpha)\,(n-a-\alpha+2) &= 0, \text{ falls } a > 1, \text{ also } \alpha > 2 \text{ ist.}
\end{cases}
$$

Aus diesen Resultaten erhält man, indem man die Formeln (4) und (5) des vorigen Paragraphen für $i = 2$ anwendet, für ε_3:

$$
(3)\quad \begin{cases}
\varepsilon_3(0,\alpha)(n-\alpha+3) &= (m-2).m(m-1), \text{ wo natürlich } \alpha>2 \text{ ist,}\\
\varepsilon_3(1,2) &= (m-2.2).m+2.m(m-1)+2.0\\
&= (m-2)m+2m(m-1)-2.m\\
&= 2!m\left[\frac{m-1}{1}+\frac{m-2}{2}\right]-2!m,\\
\varepsilon_3(1,\alpha)(n-\alpha+2) &= (m-2).m+2.m(m-1)\\
&= 2!m\left[\frac{m-1}{1}+\frac{m-2}{2}\right], \text{ falls } \alpha>2 \text{ ist,}\\
\varepsilon_3(2,\alpha)(n-\alpha+1) &= (m-2).0+2.m=2!m,\\
&\qquad\qquad \text{wo natürlich } \alpha>2 \text{ ist,}\\
\varepsilon_3(a,\alpha)(n-a-\alpha+3) &= 0, \text{ falls } a>2, \text{ also } \alpha>3 \text{ ist.}
\end{cases}
$$

Von den Resultaten, die man aus denen für ε_3 in ähnlicher Weise für ε_4 erhalten kann, schreiben wir hier nur die für $\varepsilon_4(0,4)$, $\varepsilon_4(1,3)$, $\varepsilon_4(1,4)(n-1)$, $\varepsilon_4(2,3)(n-1)$, $\varepsilon_4(2,\alpha)(n-\alpha+2)$, und zwar in folgender Gestalt:

$$
(4)\quad \begin{cases}
\varepsilon_4(0,4) &= 3!m\left[\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\right],\\
\varepsilon_4(1,3) &= 3!m\left[\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-3}{3}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\right]-3!m,\\
\varepsilon_4(1,4)(n-1) &= 3!m\left[\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-3}{3}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\right],\\
\varepsilon_4(2,3)(n-1) &= 3!m\left[\frac{m-1}{1}+\frac{m-2}{2}+\frac{m-3}{3}\right]-3!m,\\
\varepsilon_4(2,\alpha)(n-\alpha+2) &= 3!m\left[\frac{m-1}{1}+\frac{m-2}{2}+\frac{m-3}{3}\right], \text{falls } \alpha>3 \text{ ist.}
\end{cases}
$$

Wenn man nun noch beachtet, dass sich hieraus in derselben Weise z. B.:

$$(5)\quad \varepsilon_5(2,3) = 4!m\left[\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-3}{3}+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-4}{4}\right.$$
$$\left.+\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}+\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-4}{4}+\frac{m-3}{3}\cdot\frac{m-4}{4}\right]$$
$$-4!m\left[\frac{m-1}{1}+\frac{m-2}{2}+\frac{m-3}{3}+\frac{m-4}{4}\right]$$

ergiebt, so kann man das Bildungsgesetz, welches diese Ausdrücke für die von uns gesuchten Zahlen befolgen, schon *vermuthen*. **Bezeichnet man nämlich mit**

$$f(m, p, q)$$

das Product von $p!m$ mit der Summe aller möglichen Producte von je q unter den p Zahlen $\frac{m-1}{1}, \frac{m-2}{2}, \frac{m-3}{3}, \ldots, \frac{m-p}{p}$, so scheint es, als ob man immer

$$(6)\quad \varepsilon_{i+1}(a,\alpha)(n-a-\alpha+i+1) = f(m,i,i-a) - f(m,i,i-\alpha)$$

erhielte, wenn man $f(m, p, 0) = p!\,m$ und $f(m,p,q)$ für negative q gleich Null setzt.

Um zu *beweisen*, dass die vermuthete Formel (6) allgemein richtig ist, zeigen wir ihre Richtigkeit für $i = 1$, und beweisen ausserdem, dass dieselbe für den Index $i+1$ richtig wird, sobald man annimmt, dass sie für den Index i richtig sei. Für $i = 1$ und $a = 0$, also $\alpha > 0$ giebt Formel (6):

$$\varepsilon_2(0,\alpha)\,(n-\alpha+2) = f(m, 1, 1) - f(m, 1, 1-\alpha).$$

Nun ist aber $\alpha \geqq 2$, weil sonst $(n-\alpha+2)$ sinnlos würde. Deshalb kommt:

$$\varepsilon_2(0, \alpha)(n-\alpha+2) = f(m, 1, 1) - f(m, 1, 1-\alpha) = 1!\,m\left(\frac{m-1}{1}\right) - 0,$$

was nach den Formeln (2) richtig ist. Ist zweitens $i = 1$ und $a = 1$, also $\alpha > 1$, so giebt Formel (6):

$$\varepsilon_2(1, \alpha)\,(n-\alpha+1) = f(m, 1, 0) - f(m, 1, 1-\alpha) = 1!\,m - 0,$$

was auch nach den Formeln (2) richtig ist. Ist drittens $i = 1$ und $a > 1$, also $\alpha > 2$, so erhält man nach Formel (6):

$$\varepsilon_2(a, \alpha)\,(n-a-\alpha+2) = f(m, 1, 1-a) - f(m, 1, 1-\alpha) = 0 - 0,$$

weil $1 - a$ und $1 - \alpha$ jetzt negativ werden. Da dieses Resultat ebenfalls mit Formel (2) in Einklang ist, so ist nunmehr erkannt, dass Formel (6) für $i = 1$ immer richtig ist. Um nun die Allgemeingültigkeit dieser Formel zu zeigen, wollen wir

$$(7)\quad \varepsilon_i(a,\alpha)(n-a-\alpha+i) = f(m,i-1,i-a-1) - f(m,i-1,i-\alpha-1)$$

als richtig voraussetzen, und unter dieser Voraussetzung die Gültigkeit von

$$\varepsilon_{i+1}(a,\alpha)\,(n-a-\alpha+i+1) = f(m, i, i-a) - f(m, i, i-\alpha)$$

beweisen. Hierzu benutzen wir die Formeln (4) und (5) des § 4. Wir nehmen also zuerst $a + \alpha = i + 1$ an, und setzen in die auf diesen Fall bezügliche Formel (4) des § 4 rechts für die ε_i enthaltenden Symbole das ein, was sich aus der mit (7) bezeichneten Voraussetzung ergiebt. Dadurch erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
(8) \quad \varepsilon_{i+1}(a,\alpha) &= (m-2i).f(m,i-1,i-a-1) \\
&\quad -(m-2i).f(m.i-1,i-\alpha-1) \\
&\quad + i.f(m,i-1,i-a) - i.f(m,i-1,i-\alpha-1) \\
&\quad + i.f(m,i-1,i-a-1) - i.f(m,i-1,i-\alpha) \\
&= (m-i).f(m,i-1,i-a-1) \\
&\quad - (m-i).f(m,i-1,i-\alpha-1) \\
&\quad + i.f(m,i-1,i-a) - i.f(m,i-1,i-\alpha).
\end{aligned}
$$

Um zu erkennen, dass

$$(m-i) \,.\, f(m,\, i-1,\, i-a-1) + i \,.\, f(m,\, i-1,\, i-a)$$

gleich $f(m,\, i,\, i-a)$ wird, nehmen wir das Beispiel $i = 5$, $a = 2$. Dann ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
&(m-5) \,.\, f(m,4,2) + 5 \,.\, f(m,4,3) \\
&= (m-5).4!\,m\left[\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-3}{3}+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-4}{4}+\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\right. \\
&\qquad\qquad \left.+\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-4}{4}+\frac{m-3}{3}\cdot\frac{m-4}{4}\right] \\
&+ \quad 5.4!\,m\left[\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-4}{4}\right. \\
&\qquad\qquad \left.+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\frac{m-4}{4}+\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\frac{m-4}{4}\right] \\
&= \quad 5!\,m\left[\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-5}{5}+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\frac{m-5}{5}\right. \\
&\qquad\qquad +\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-4}{4}\cdot\frac{m-5}{5}+\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\frac{m-5}{5} \\
&\qquad\qquad \left.+\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-4}{4}\cdot\frac{m-5}{5}+\frac{m-3}{3}\cdot\frac{m-4}{4}\cdot\frac{m-5}{5}\right] \\
&+ \quad 5!\,m\left[\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-4}{4}\right. \\
&\qquad\qquad \left.+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\frac{m-4}{4}+\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\frac{m-4}{4}\right] \\
&\qquad\qquad = f(m,5,3).
\end{aligned}
$$

Gerade so ist es auch, wenn i und a allgemein sind. Es liefert dann $(m-i)\,f(m,\, i-1,\, i-a-1)$ diejenigen $\frac{(i-1)!}{a!\,(i-a-1)!}$ Glieder von

$f(m,i,i-a)$, welche den Factor $\frac{m-i}{i}$ *enthalten*, und $i.f(m,i-1,i-a)$ diejenigen $\frac{(i-1)!}{(i-a)!\,(a-1)!}$ Glieder, welche den Factor $\frac{m-i}{i}$ *nicht* enthalten. Durch Addition ergeben sich also alle $\frac{i!}{a!\,(i-a)!}$ Glieder, welche den Ausdruck $f(m, i, i-a)$ zusammensetzen. Es ist also immer:

$$(m-i)f(m, i-1, i-a-1) + i.f(m, i-1, i-a) = f(m, i, i-a),$$

also auch:

$$(m-i)\,f(m, i-1, i-\alpha-1) + i.f(m, i-1, i-\alpha) = f(m, i, i-\alpha).$$

Durch diese Beziehungen wird aber aus Formel (8);

$$(9) \qquad \varepsilon_{i+1}(a, \alpha) = f(m, i, i-a) - f(m, i, i-\alpha)$$

Damit ist bewiesen, dass Formel (6), falls $a + \alpha = i + 1$ ist, für *jeden* Index i gültig ist.

Wir nehmen zweitens $a + \alpha > i + 1$ an, und setzen in die auf diesen Fall bezügliche Formel (5) des § 4 für die ε_i enthaltenden Symbole das ein, was sich aus der mit (7) bezeichneten Voraussetzung ergiebt. Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i+1}(a,\alpha)(n-a-\alpha+i+1) &= (m-i).f(m,i-1,i-a-1)\\ &\quad-(m-i).f(m,i-1,i-\alpha-1)\\ &\quad+i.f(m,i-1,i-a)-i.f(m,i-1,i-\alpha).\end{aligned}$$

Der Ausdruck rechts stimmt mit dem letzten Ausdruck in Formel (8) genau überein, ergiebt also auch $f(m,i,i-a) - f(m,i,i-\alpha)$. Wir bekommen also, gleichviel ob $a+\alpha$ gleich $i+1$ oder grösser als $i+1$ ist, dass die Formel

$$\varepsilon_{i+1}(a,\alpha)\,(n-a-\alpha+i+1) = f(m, i, i-a) - f(m, i, i-\alpha)$$

richtig ist, wenn die Formel (7) richtig ist. Da wir nun die Richtigkeit von (7) für $i = 2$ oben erkannt haben, so haben wir auch *die vermuthete Formel* (6) *als allgemeingültig bewiesen.*

Unter Hinweis auf § 7, wo weitere Anwendungen unseres Resultats folgen, fügen wir hier nur diejenigen Specialisirungen hinzu, welche die bekannten Zahlen für vier- und fünfpunktige Tangenten einer in unserm Raume liegenden Fläche $m$ten Grades ergeben. Demgemäss setzen wir erstens $n = 3$, $i = 3$, $a = 2$, $\alpha = 3$, und erhalten:

$$\varepsilon_4(2, 3)\,(2),$$

d. h.

$$\begin{aligned}\varepsilon_4(2) &= f(m, 3, 3-2) - f(m, 3, 3-3) = f(m, 3, 1) - f(m, 3, 0)\\ &= 3!\,m\left[\frac{m-1}{2} + \frac{m-2}{2} + \frac{m-3}{3}\right] - 3!\,m\\ &= m(11m - 24)\end{aligned}$$

für die Ordnung der von den Berührungspunkten der vierpunktigen Tangenten gebildeten Curve.

Wir setzen zweitens $n = 3$, $i = 3$, $a = 1$, $\alpha = 3$, und erhalten:

$$\varepsilon_4(1, 3)(3),$$

d. h.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_4(1,3) &= f(m, 3, 3-1) - f(m, 3, 3-3) \\
&= f(m, 3, 2) - f(m, 3, 0) \\
&= 3!\, m\left[\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2} + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-3}{3} + \frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\right] - 3!\, m \\
&= 6m^3 - 22m^2 + 12m = 2m(m-3)(3m-2)
\end{aligned}$$

für den Grad der von den vierpunktigen Tangenten gebildeten Linienfläche.

Wir setzen drittens $n = 3$, $i = 4$, $a = 2$, $\alpha = 3$, und erhalten:

$$\varepsilon_5(2, 3)(3),$$

d. h.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_5 &= f(m, 4, 4-2) - f(m, 4, 4-3) \\
&= f(m, 4, 2) - f(m, 4, 1) \\
&= 4!\, m\left[\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2} + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-3}{3} + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-4}{4} + \frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-4}{4} + \frac{m-3}{3}\cdot\frac{m-4}{4}\right] \\
&\quad - 4!\, m\left[\frac{m-1}{1} + \frac{m-2}{2} + \frac{m-3}{3} + \frac{m-4}{4}\right] \\
&= 35m^3 - 200m^2 + 240 = 5m(m-4)(7m-12)
\end{aligned}$$

für die Anzahl der fünfpunktig berührenden Tangenten.

§ 6.

Bestimmung der Coefficienten der die gesuchten Zahlen darstellenden ganzen Functionen von m.

Im vorigen Paragraphen (Formel (6)) haben wir für die gesuchte Zahl $\varepsilon_{i+1}(a,\alpha)(n-a-\alpha+i+1)$ den Ausdruck $f(m,i,i-a)-f(m,i,i-\alpha)$ gefunden, wo $f(m, p, q)$ das Product von $p!\,m$ mit der Summe aller möglichen Producte von je q unter den p Zahlen $\frac{m-1}{1}$, $\frac{m-2}{2}$, $\frac{m-3}{3}$, ..., $\frac{m-p}{p}$ bedeutet, wo ferner $f(m, p, q)$ für $q = 0$ gleich $p!\,m$ und für negative q gleich Null zu setzen war. Es handelt sich nun noch darum, diese Function und damit auch die Zahl

$$\varepsilon_{i+1}(a, \alpha)\,(n - a - \alpha + i + 1)$$

als eine nach fallenden Potenzen von m geordnete, *ganze* Function hinzuschreiben, und die dabei auftretenden Coefficienten zu untersuchen.

Da $f(m, p, 0)$ durch die Definition der Function f gleich $p!\,m$ wird, so beginnen wir mit $f(m, p, 1)$. Es ist:

$$f(m, p, 1) = p!\,m\,.\left[\frac{m-1}{1} + \frac{m-2}{2} + \cdots + \frac{m-p}{p}\right]$$
$$= \varphi(p, p-1)\,.\,m^2 - p\,.\,p!\,m$$

wo $\varphi(p, p-1)$ die Summe aller möglichen p Producte von je $p-1$ der p ganzen Zahlen von 1 bis p bedeutet. In der Entwickelung von

$$f(m,p,2) = p!\,m\cdot\left[\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2} + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-3}{3} + \cdots + \frac{m-p+1}{p-1}\cdot\frac{m-p}{p}\right]$$

erscheint als Coefficient von m^3 die Summe aller möglichen $\frac{p(p-1)}{2}$ Producte von je $p-2$ der p ganzen Zahlen von 1 bis p. Wir bezeichnen diese Summe mit $\varphi(p, p-2)$. In den Coefficienten von m^2 tritt mit negativem Vorzeichen das Product $2\,.\,3\,.\,4\ldots p$ so oft ein, als in der eckigen Klammer der obigen Formel Producte mit dem Factor $\frac{m-1}{1}$ vorhanden sind, also $p-1$ mal. Ebenso oft tritt jedes der übrigen Producte $1\,.\,3\,.\,4\ldots p$, $1\,.\,2\,.\,4\ldots p$ u. s. w. in jenen Coefficienten ein. Demnach erscheint $(p-1)\,\varphi(p, p-1)$ als Coefficient von m^2. Endlich tritt in den Coefficienten von m die Zahl $p!$ so oft ein, als die eckige Klammer Glieder enthält, also $\frac{p(p-1)}{2}$ mal. Deshalb ergiebt sich:

$$f(m,p,2) = \varphi(p,p-2)\,.\,m^3 - (p-1)\,.\,\varphi(p,p-1)\,.\,m^2 + \frac{p(p-1)}{2}\cdot p!\,m.$$

In derselben Weise erkennt man, dass

$$f(m,p,3) = \varphi(p,p-3)\,.\,m^4 - (p-2)\,.\,\varphi(p,p-2)\,.\,m^3$$
$$+ \frac{(p-2)(p-1)}{1.2}\cdot\varphi(p,p-1)\cdot m^2 - \frac{(p-2)(p-1).p}{1.2.3}\,\varphi(p,p)\,.\,m$$

gesetzt werden kann, wo $\varphi(p, p-3)$ die Summe aller möglichen Producte von je $p-3$ der p ganzen Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots, p$ bedeutet, und wo $\varphi(p, p) = p!$ ist. So fortfahrend gelangt man leicht zu der Erkenntniss, dass *allgemein:*

$$(1)\quad f(m, p, q) = \varphi(p, p-q)\,.\,m^{q+1} - (p-q+1)\,.\,\varphi(p,p-q+1)\,.\,m^q$$
$$+ \frac{(p-q+1)(p-q+2)}{1.2}\cdot\varphi(p,p-q+2)\cdot m^{q-1}$$
$$- \frac{(p-q+1)(p-q+2)(p-q+3)}{1.2.3}\cdot\varphi(p,p-q+3)\cdot m^{q-2}$$
$$+ \cdots + (-1)^q\cdot\frac{(p-q+1)(p-q+2)\ldots(p-1)p}{1.2.3\ldots q}\cdot\varphi(p,p)\cdot m^1$$

wird, wo immer $\varphi(p, k)$ die Summe aller möglichen Producte von je k unter den p ganzen Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$ bis p bedeutet, und wo $\varphi(p, p) = p!$ ist. Auch die Entwickelungen von $f(m, p, p-1)$ und von $f(m, p, p)$ gehorchen noch dieser Formel, wenn man

$$\varphi(p, 1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2},$$

und $\varphi(p, 0) = 1$ setzt.

Wenn wir nun gemäss dieser Formel die rechte Seite der Formel (6) des § 5 entwickeln, und dabei, wie es üblich ist, *den Binomialcoefficienten* $\frac{(b+1)(b+2)\ldots(b+c)}{1.2\ldots c}$ *abkürzend mit* $(c+b)_c$ *bezeichnen*, so erhalten wir die gesuchte Entwickelung der Zahl

$$\varepsilon_{i+1}(a, \alpha)(n-a-\alpha+i+1)$$

nach Potenzen von m in folgender Gestalt:

$$(2)\quad \boldsymbol{\varepsilon_{i+1}(a,\alpha)(n-a-\alpha+i+1) = [\varphi(i,a).m^{i-a+1}}$$
$$\boldsymbol{-(a+1)_a.\varphi(i,a+1).m^{i-a} + (a+2)_a.\varphi(i,a+2).m^{i-a-1}}$$
$$\boldsymbol{-(a+3)_a.\varphi(i,a+3).m^{i-a-2} + \cdots + (-1)^{i-a}.i_a.\varphi(i,i).m^1]}$$
$$\boldsymbol{-[\varphi(i,\alpha).m^{i-\alpha+1} - (\alpha+1)_\alpha.\varphi(i,\alpha+1).m^{i-\alpha}}$$
$$\boldsymbol{+(\alpha+2)_\alpha.\varphi(i,\alpha+2).m^{i-\alpha-1} - \cdots + (-1)^{i-\alpha}.i_\alpha.\varphi(i,i).m^1].}$$

Die ganze Function von m, welche die rechte Seite dieser Formel bildet, stellt also immer die Zahl der Tangenten dar, welche einen in einem n-dimensionalen linearen Punktraume liegenden $(n-1)$-dimensionalen, punktallgemeinen Raum, der mit jeder Geraden m Punkte gemein hat, derartig berühren, dass erstens die Berührungsstelle $i+1$ von den m Schnittpunkten in sich vereinigt, dass zweitens dieser Berührungspunkt auf einem gegebenen $(n-a-\alpha+i+1)$-dimensionalen, linearen Raume liegt, und dass drittens die Tangente selbst ganz in einem gegebenen α-dimensionalen, linearen Raume liegt und dabei einen in diesem Raume liegenden, gegebenen a-dimensionalen Raum einpunktig trifft. Jedes in dieser ganzen Function auftretende Symbol $\varphi(i,k)$ bedeutet die Summe aller möglichen Producte von je k unter den i ganzen Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots, i$. Das nach dieser Definition sinnlose Symbol $\varphi(i, 0)$ ist gleich 1 zu setzen, $\varphi(i, 1)$ ist natürlich gleich

$$1 + 2 + 3 + \cdots + i = \tfrac{1}{2}\, i(i+1),$$

ferner $\varphi(i, i)$ gleich $i!$.

Die Zahlen $\varphi(i, k)$ treten in der Theorie der höheren Differentialquotienten auf, und werden dort meist *Facultätencoefficienten* genannt. Man kennt mehrere *independente* Darstellungen von $\varphi(i, k)$ durch i und k. Nach der Entwickelung in Schlömilch's Kompendium der höheren Analysis, II. Theil, ergiebt sich:

$$(3)\quad \varphi(i,k) = (-1)^{k+1}(i+1).i_k(i+k+1)_k \cdot \Big\{ \frac{k_1}{i+2} \cdot \frac{1^{k+1}}{k+1} - \frac{k_2}{i+3} \cdot \frac{2^{k+2} - 2_1 \cdot 1^{k+2}}{(k+1)(k+2)}$$
$$+ \frac{k_3}{i+4} \cdot \frac{3^{k+3} - 3_1 . 2^{k+3} + 3_2 . 1^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)} - \cdots$$
$$+ (-1)^{k+1} \cdot \frac{k_k}{(i+k+1)} \cdot \frac{k^{2k} - k_1.(k-1)^{2k} + k_2.(k-2)^{2k} + \cdots + (-1)^{k+1}.k_{k-1}.2^{2k}}{(k+1)(k+2)\ldots(2k)} \Big\}.$$

Eine mit $i = 1$, $i = 2$, u. s. w. beginnende Tabelle der Werthe von $\varphi(i, k)$ findet man auf kürzerem Wege, als durch die obige Formel, vermittelst der aus der Definition von $\varphi(i, k)$ leicht ableitbaren Recursionsformel:

$$\varphi(i, k) = i \,.\, \varphi(i-1, k-1) + \varphi(i-1, k).$$

Hiernach ist jede Zahl in der i-ten Horizontalreihe der folgenden Tabelle gleich der unmittelbar darüber befindlichen Zahl, vermehrt um das i-fache der links von der letzteren stehenden Zahl.

Tabelle der $\varphi(i, k)$.

	$\varphi(i,0)$	$\varphi(i,1)$	$\varphi(i,2)$	$\varphi(i,3)$	$\varphi(i,4)$	$\varphi(i,5)$	$\varphi(i,6)$	$\varphi(i,7)$	$\varphi(i,8)$	.
$i=1$	1	1								.
$i=2$	1	3	2							.
$i=3$	1	6	11	6						.
$i=4$	1	10	35	50	24					.
$i=5$	1	15	85	225	274	120				.
$i=6$	1	21	175	735	1624	1764	720			.
$i=7$	1	28	322	1960	6769	13132	13068	5040		.
$i=8$	1	36	546	4536	22449	67284	118124	109584	40320	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

§ 7.

Specialisirungen.

Die Thatsache, dass für unsern dreidimensionalen Raum die in jedem Punkte einer Fläche zweipunktig berührenden Tangenten eine Ebene, also einen Ort vom Grade 1 bilden, die dreipunktig berührenden Tangenten aber in der Zahl 2 vorhanden sind, erweckt die Frage, wieviel Tangenten in jedem Punkte eines in einem $[n]$ liegenden R^m_{n-1} n-punktig berühren, und von welchem Grade der Ort der ∞^t daselbst $(n-t)$-punktig berührenden Tangenten ist. Die Antworten auf diese Fragen erhält man aus der Formel (2) des § 6, wenn man $a = i$, $\alpha = n$ setzt. Dadurch kommt:

$$\varepsilon_{i+1}(i, n)\,(1) = \varphi(i, i) \,.\, m = i!\, m.$$

Da die Gerade der Bedingung (1) den R^m_{n-1} in m Punkten schneidet, so ergiebt sich, dass es immer $i!$ Tangenten giebt, welche in einem festen Punkte eines R^m_{n-1} $(i+1)$-punktig berühren, und zugleich einen gegebenen $[i]$ einpunktig treffen. Für i gleich $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ heisst dies: *In jedem Punkte eines $(n-1)$-dimensionalen Raumes beliebigen Grades giebt es $(n-1)!$ Tangenten, die daselbst n-punktig berühren; die ∞^1 $(n-1)$-punktig berührenden Tangenten bilden eine Fläche*

(*Kegelfläche*) *vom Grade* $(n-2)!$; *die* ∞^2 $(n-2)$-*punktig berührenden Tangenten bilden einen* R_3 *vom Grade* $(n-3)!$; *u. s. w.; endlich die* ∞^{n-2} *zweipunktig berührenden Tangenten bilden einen* R_{n-1} *vom Grade* 1.

Die Thatsache, dass in der Ebene von einem Punkte aus $m(m-1)$ Tangenten an eine punktallgemeine Curve gehen, und in unserem Raume $m(m-1)(m-2)$ dreipunktig berührende Tangenten von einem Punkte aus an eine punktallgemeine Fläche gehen, lässt vermuthen, dass *in einem* $[n]$ *an einen* R^m_{n-1} $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$ n-*punktig berührende Tangenten von einem Punkte aus gelegt werden können.* Diese Vermuthung erhalten wir bewiesen, wenn wir entweder in der Formel (2) des § 6 oder noch kürzer in der Formel (6) des § 5 $i=n-1$, $a=0$, $\alpha=n$ setzen.

Da vor Ausbildung der neueren Abzählungsmethode von den auf mehrpunktige Tangenten bezüglichen Anzahlen namentlich die Bestimmung der Anzahl der eine Fläche unseres Raumes fünfpunktig berührenden Tangenten Schwierigkeiten darbot, so wollen wir hier als dritte Specialisirung unseres allgemeinen Resultats die Frage beantworten, wieviel $(2n-1)$-punktige Tangenten ein in einem $[n]$ liegender R^m_{n-1} besitzt. Zu diesem Ende setzen wir $i=2n-2$, $a=n-1$, $\alpha=n$, und erhalten aus der Formel (2) des § 6:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2n-1} &= \varphi(2n-2,n-1).m^n - n_{n-1}.\varphi(2n-2,n).m^{n-1}\\ &+ (n+1)_{n-1}.\varphi(2n-2,n+1).m^{n-2}\\ &- \cdots + (-1)^{n-1}.(2n-2)_{n-1}.\varphi(2n-2,2n-2).m^1\\ &- \varphi(2n-2,n)m^{n-1} + (n+1)_n.\varphi(2n-2,n+1).m^{n-2}\\ &- \cdots - (-1)^{n-2}.(2n-2)_n.\varphi(2n-2,2n-2).m^1\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2n-1} &= \varphi(2n-2,n-1).m^n - (n+1)_n.\varphi(2n-2,n).m^{n-1}\\ &+ (n+2)_n.\varphi(2n-2,n+1).m^{n-2}\\ &- \cdots + (-1)^{n-1}.(2n-1)_n.\varphi(2n-2,2n-2).m^1,\end{aligned}$$

wo noch die Zahlen $\varphi(2n-2,k)$ vermittelst der Formel (3) direct durch m und n ausgedrückt werden können. Für $n=3$ erhalten wir hieraus Bekanntes, nämlich:

$$\begin{aligned}\varepsilon_5 &= \varphi(4,2).m^3 - 4_3.\varphi(4,3).m^2 + 5_3.\varphi(4,4).m\\ &= 35m^3 - 4.50m^2 + 10.24m = 5m(m-4)(7m-12).\end{aligned}$$

Für $n=4$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\varepsilon_7 &= \varphi(6,3)m^4 - 5_4.\varphi(6,4)m^3 + 6_4.\varphi(6,5)m^2 - 7_4\varphi(6,6)m\\ &= 735m^4 - 5.1624m^3 + 15.1764m^2 - 35.720m\\ &= 35m(21m^3 - 232m^2 + 756m - 720)\\ &= 35m(m-6)(7m-12)(3m-10).\end{aligned}$$

Es giebt also in einem vierdimensionalen, linearen Raume

$$35m(m-6)(7m-12)(3m-10)$$

Gerade, von denen jede einen dreidimensionalen Raum m-ten Grades siebenpunktig zu berühren vermag.

Um das analoge Resultat auch noch für einen [5] zu gewinnen, setzen wir $n = 5$, und erhalten:

$$\begin{aligned} \varepsilon_9 &= \varphi(8,4)m^5 - 6_5 . \varphi(8,5)m^4 + 7_5 . \varphi(8,6)m^3 - 8_5 \varphi(8,7)m^2 + 9_5 \varphi(8,8)m \\ &= 22449m^5 - 6.67284m^4 + 21.118124m^3 - 56.109584m^2 \\ &\qquad\qquad + 126.40320m \\ &= 21m(m-8)(1069m^3 - 10672m^2 + 32748m - 30240). \end{aligned}$$

Es giebt also in einem fünfdimensionalen, linearen Raume

$$21m(m-8)(1069m^3 - 10672m^2 + 32748m - 30240)$$

Gerade, von denen jede einen vierdimensionalen Raum m-ten Grades neunpunktig zu berühren vermag.

Als vierte Specialisirung unseres allgemeinen Resultats wählen wir die Auffindung der Anzahlen, welche sich in n-dimensionalen Räumen auf die Geraden beziehen, die ganz in $(n-1)$-dimensionalen Räumen liegen können. In unserm [3] besitzt die Fläche ersten Grades (Ebene) ∞^2 Gerade, die Fläche zweiten Grades enthält ∞^1 Gerade so, dass von jedem Punkt zwei ausgehen, die Fläche dritten Grades endlich besitzt 27 Gerade. Was die entsprechenden Zahlen für einen [4] anbetrifft, so ist zunächst zu erwähnen, dass ein in diesem [4] liegender R_3 ersten Grades ∞^4 Gerade enthält, dass ein R_3 zweiten Grades ∞^3, ein R_3 dritten Grades ∞^2, ein R_3 vierten Grades ∞^1 und ein R_3 fünften Grades eine endliche Anzahl von Geraden enthält. Da aber die ∞^3 Geraden eines $R_3{}^2$ ∞^4 Punkte enthalten, der $R_3{}^2$ selbst aber nur ∞^3 Punkte enthält, so müssen von jedem Punkte des $R_3{}^2$ ∞^1 Gerade ausgehen. Man kann deshalb fragen, von welchem Grade der von solchen ∞^1 Geraden gebildete Kegel ist, d. h. wieviel Punkte er mit einer beliebigen Ebene gemein hat. Dass 2 die Antwort auf diese Frage ist, kann man aus der schon oben abgeleiteten Wahrheit schliessen, dass die ∞^1 in jedem Punkte eines R^m_{n-1} $(n-1)$-punktig berührenden Tangenten eine Fläche vom Grade $(n-2)!$ bilden, wenn man $n = 4$ setzt, und beachtet, dass eine *drei*punktige Tangente eines R_3 *zweiten* Grades ganz auf diesem liegen muss. In ähnlicher Weise liefert die ebenfalls oben abgeleitete Wahrheit, dass in jedem Punkte eines R^m_{n-1} $(n-1)!$ Tangenten n-punktig berühren, für $n = 4$ und $m = 3$, das Resultat, dass von jedem Punkte eines $R_3{}^3$ *sechs* Gerade ausgehen, die ganz in dem $R_3{}^3$ liegen. Was die ∞^1 Geraden anbetrifft, die ganz auf einem R_3 vierten Grades liegen, so wird man fragen, von welchem Grade die von diesen ∞^1 Geraden gebildete

Linienfläche ist, oder, was dasselbe ist, wieviel von den ∞^2 Punkten, die auf diesen ∞^1 Geraden liegen, auf einer gegebenen Ebene liegen. Um diese Zahl zu finden, haben wir in unserer allgemeinen Formel (F. (2) in § 6) $i+1=5$, $a=3$, $\alpha=4$ zu setzen, und dann für $m=4$ zu specialisiren. Wir erhalten zunächst:

$$\begin{aligned}\varepsilon_5(3,4)(2) &= [\varphi(4,3)m^2 - 4_3.\varphi(4,4)m] - [\varphi(4,4).m]\\ &= 50m^2 - 4.24m - 24m = 10m(5m-12).\end{aligned}$$

Es giebt also in einem [4] $10m(5m-12)$ *Gerade, welche einen in dem* [4] *liegenden dreidimensionalen Raum m-ten Grades fünfpunktig berühren, und dabei ihren Berührungspunkt auf einer gegebenen Ebene besitzen.*

Setzt man nun $m=4$, so erhält man hieraus:

Ein in einem [4] *liegender, punktallgemeiner, dreidimensionaler Raum vierten Grades enthält* ∞^1 *ganz in ihm liegende Gerade, die eine Linienfläche vom* 320*ten Grade bilden, d. h. von denen immer* 320 *eine beliebige Ebene zu schneiden vermögen.*

Endlich haben wir noch zu untersuchen, wieviel Gerade ein in einem [4] liegender R_3^5 ganz enthält. Um diese Zahl zu finden, setzen wir zunächst in der Formel (2) des § 6 $i+1=6$, $a=3$, $\alpha=4$ voraus und erhalten:

$$\begin{aligned}\varepsilon_6(3,4)(3) &= [\varphi(5,3)m^3 - 4_3.\varphi(5,4)m^2 + 5_3.\varphi(5,5)m]\\ &\quad - [\varphi(5,4)m^2 - 5_4.\varphi(5,5)m]\\ &= \varphi(5,3)m^3 - 5_4.\varphi(5,4)m^2 + 6_4.\varphi(5,5)m\\ &= 225m^3 - 5.274m^2 + 15.120m\\ &= 5m(45m^2 - 274m + 360).\end{aligned}$$

Es giebt also in einem [4] $5m(45m^2-274m+360)$ *Gerade, welche einen in dem* [4] *liegenden, dreidimensionalen Raum m-ten Grades sechspunktig berühren, und dabei ihren Berührungspunkt auf einem gegebenen* [3] *besitzen.*

Hieraus ergiebt sich für $m=5$ der Satz:

Ein in einem [4] *liegender, punktallgemeiner, dreidimensionaler Raum fünften Grades enthält* $5^3.23 = 2875$ *Gerade, die ganz in ihm liegen.**)

*) Dieses vierdimensionale Analogon der Anzahl 27 der auf einer Fläche dritter Ordnung liegenden Geraden vermochte ich noch auf einem zweiten Wege zu bestimmen. Ich suchte nämlich (vgl. Math. Ann., Bd. XII, S. 192) die Zahl der Geraden, welche in einem [4] einen dreidimensionalen Raum m-ten Grades so in m Punkten schneiden, dass sechs dieser Schnittpunkte zugleich auf sechs gegebenen dreidimensionalen linearen Räumen liegen. Für diese Zahl erhielt ich $5m^2(m^4 - 9m^3 + 26m^2 - 27m + 8)$. Ist $m=5$, so muss eine solche Gerade nach dem Princip der Erhaltung der Anzahl unzählig viele Schnittpunkte mit dem R_3^5 besitzen, also ganz auf ihm liegen. In der That ergiebt $5.5^2(5^4-9.5^3+26.5^2-27.5+8)$ die oben gefundene Zahl 2875.

So wie in unserm [3] eine allgemeine Fläche dritter Ordnung, in einem [4] ein punktallgemeiner R_3^5 eine endliche Anzahl von Geraden enthält, so muss es in einem [n] auf einem R_{n-1}^{2n-3} eine endliche Anzahl von Geraden geben. Um die Anzahl x dieser Geraden zu bestimmen, verfahren wir analog, wie oben für den R_3^5, und setzen in unserer allgemeinen Formel (F. (2) des § 6):

$$i = 2n - 3,\ a = n - 1,\ \alpha = n,\ m = 2n - 3.$$

Dadurch kommt:

$$\begin{aligned} x = {} & \varphi(2n-3, n-1).(2n-3)^{n-1} - n_{n-1}.\varphi(2n-3, n).(2n-3)^{n-2} \\ & + (n+1)_{n-1}.\varphi(2n-3, n+1).(2n-3)^{n-3} \\ & - \cdots + (-1)^{n-2}.(2n-3)_{n-1}.\varphi(2n-3, 2n-3).(2n-3)^1 \\ & - \varphi(2n-3, n).(2n-3)^{n-2} + (n+1)_n.\varphi(2n-3, n+1).(2n-3)^{n-3} \\ & - (n+2)_n.\varphi(2n-3, n+2)(2n-3)^{n-4} \\ & + \cdots - (-1)^{n-3}.(2n-3)_n.\varphi(2n-3, 2n-3).(2n-3)^1, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} x = {} & \varphi(2n-3, n-1)(2n-3)^{n-1} - (n+1)_n \varphi(2n-3, n)(2n-3)^{n-2} \\ & + (n+2)_n \varphi(2n-3, n+1)(2n-3)^{n-3} \\ & - \cdots + (-1)^{n-2}(2n-2)_n \varphi(2n-3, 2n-3)(2n-3)^1. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck, in den man noch nach Formel (3) die Symbole $\varphi(2n-3, k)$ durch Binomialcoefficienten und Potenzen der ganzen Zahlen 1 bis $2n-3$ ausdrücken kann, *stellt als Function von n die Anzahl der Geraden dar, welche in einem n-dimensionalen linearen Raume ganz auf einem punktallgemeinen, $(n-1)$-dimensionalen Raume $(2n-3)$-ten Grades liegen.*

Hamburg, November 1884.

Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung*).

Von

A. Mayer in Leipzig.

Lagrange hat seine Multiplicatorenmethode, durch die er zur Aufstellung der allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung gelangte, ohne Weiteres aus der Mechanik hinübergenommen in die Variationsrechnung. Ein wirklicher Beweis für die Richtigkeit dieser Methode in dem Falle, wo nicht bloss endliche Bedingungsgleichungen vorliegen, sondern den unbekannten Functionen des Problems von vornherein auch Differentialgleichungen vorgeschrieben sind, ist aber bisher noch nicht erbracht worden. Es ist vielmehr nur kein Beispiel bekannt, in welchem das Lagrange'sche Verfahren zu einem falschen Resultate geführt hätte, und alle diejenigen besonderen Regeln der Variationsrechnung, die, wie die isoperimetrische, sich auch noch auf anderem, directen Wege beweisen lassen, gehen als blosse Anwendungen aus demselben hervor. Daher wurde die Lagrange'sche Methode von einem Theile der Mathematiker gewissermassen als Axiom acceptirt, während ein anderer Theil es vorzog, alle diejenigen Aufgaben der Variationsrechnung, zu deren Lösung man keine anderen Methoden kennt, überhaupt einfach zu ignoriren.

Im Anschlusse an Clebsch habe ich selbst mich immer zu dem ersten Theile gehalten und die Lagrange'sche Regel allen meinen Arbeiten über Variationsrechnung zu Grunde gelegt. Obgleich ich aber das Ungenügende der bisherigen Versuche, die Lagrange'sche Multiplicatorentheorie in dem Falle von Bedingungsdifferentialgleichungen zu begründen, recht wohl herausfühlte, wurde mir der eigentliche Kernpunkt, um den es sich hierbei handelt, doch erst vollständig klar bei einer mündlichen Discussion der Frage mit Herrn L. Scheeffer, und als ich dann diese Anregung weiter verfolgte, fand ich in der

*) Der Hauptsache nach bereits mitgetheilt in den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Januar 1885.

Art, wie derselbe in Band XXV dieses Journals pag. 583—587 die Theorie der isoperimetrischen Probleme darstellt, die Mittel zu einer, wie ich glaube, in allem Wesentlichen völlig befriedigenden Begründung der Lagrange'schen Methode.

§ 1.

Man kann immer annehmen, dass in dem vorgelegten Probleme von den unbekannten Functionen keine höheren Ableitungen vorkommen als die ersten. Denn treten höhere Differentialquotienten auf, so braucht man nur für jede unbekannte Function die niederen Ableitungen neuen Variabeln gleichzusetzen und dafür diese Definitionsgleichungen der Aufgabe als neue Bedingungsgleichungen hinzuzufügen, um wieder auf den angenommenen Fall zurückzukommen. Sieht man daher zunächst von etwaigen endlichen Bedingungsgleichungen ab, so handelt es sich darum, die Richtigkeit der Lagrange'schen Regel für das folgende Problem zu beweisen:

Unter allen Functionen $y_1, \ldots, y_n$ von x, die $m < n$ vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen:

$$(1) \qquad \varphi_k(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

genügen, in den beiden gegebenen Grenzen x_0 und x_1 gegebene Grenzwerthe besitzen und zwischen diesen Grenzen mit ihren ersten Ableitungen stetig bleiben, diejenigen zu finden, für welche das gegebene Integral

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx$$

einen grössten oder kleinsten Werth erreicht. —

Ich setze voraus, dass die Determinante:

$$(2) \qquad \sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2'} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_m'}$$

nicht Null ist und auch in Folge der Bedingungsgleichungen (1) nicht identisch verschwindet.

Ist dann das vorgelegte Problem überhaupt allgemein, d. h. ohne Einschränkung der Grenzwerthe der Functionen y lösbar, so ist klar, dass dasselbe, solange man diese festen Grenzwerthe nicht specialisirt, jedenfalls auch solche Lösungen zulassen muss, für welche die Determinante (2) nicht identisch Null wird.

Denkt man sich nun diese Lösungen bereits gefunden und überall für die y substituirt, so muss die erste Variation des gegebenen Integrales:

$$(3) \qquad \delta V \equiv \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_1^n i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y_i'} \delta y_i' \right) = 0$$

werden für alle stetigen Functionen $\delta y_1, \ldots, \delta y_n$ von x, welche in den beiden Grenzen verschwinden und den m Bedingungsgleichungen

$$(4)\qquad \sum_1^n{}^i \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \delta y_i' \right) = 0$$

genügen.

Indem man diese Bedingungsgleichungen, mit vorläufig unbestimmten Functionen μ_k multiplicirt, der Bedingung (3) unter dem Integralzeichen hinzufügt und die Differentialquotienten $\delta y'$ durch theilweise Integration fortschafft, bringt man diese Forderung auf die Form:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sum_1^n{}^i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) \delta y_i = 0,$$

worin zur Abkürzung

$$(6)\qquad f + \mu_1 \varphi_1 + \cdots + \mu_m \varphi_m = F$$

gesetzt worden ist. Setzt man nun weiter für $r = 1, 2, \ldots, m$

$$(7)\qquad \frac{\partial F}{\partial y_r} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_r'} = 0,$$

so bilden nach der über die Determinante (2) gemachten Voraussetzung diese Gleichungen ein System von m linearen Differentialgleichungen 1. O. für die μ Multiplicatoren $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Daher lässt sich die Bedingung (5) ihrerseits wieder zurückführen auf die:

Für alle mit den Beschränkungen, denen die n Variationen $\delta y_1, \ldots, \delta y_n$ unterworfen sind, verträglichen Functionen $\delta y_m, \ldots, \delta y_n$ muss die Gleichung bestehen:

$$(8)\qquad U_{\delta y} \equiv \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{m+1}^n{}^s \left(\frac{\partial F}{\partial y_s} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_s'} \right) \delta y_s = 0,$$

in der $\mu_1, \ldots, \mu_m$ irgend ein System Lösungen der m linearen Differentialgleichungen (6) bilden.

Um also die Differentialgleichungen des Problems zu finden, kommt es zunächst darauf an, festzustellen, welche Bedingungen sich aus jenen Beschränkungen für die übrig gebliebenen $n - m$ Variationen $\delta y_m, \ldots, \delta y_n$ ergeben.

Zu diesem Ende multiplicire ich die Bedingungsgleichungen (4) mit neuen Factoren $\nu_\varkappa$ und addire die Producte. Ihre Summe lässt sich dann so schreiben:

$$\sum_1^n{}^i \delta y_i \sum_1^m{}^\varkappa \left(\nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_i'} \right) + \frac{d}{dx} \left(\sum_1^n{}^i \delta y_i \sum_1^m{}^\varkappa \nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_i'} \right) = 0.$$

Nennt man also

$$\nu_1^\varrho,\ \nu_2^\varrho, \ldots, \nu_m^\varrho, \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

die m linear unabhängigen Systeme von Lösungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ der m verkürzten linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$(9) \qquad \sum_1^m {}^{\varkappa} \left(\nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_r} - \frac{d}{dx} \nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_r'} \right) = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

so folgt aus den Bedingungsgleichungen (4)

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_1^n {}^i \delta y_i \sum_1^m {}^{\varkappa} \nu_\varkappa^\varrho \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_i'} \right)$$

$$+ \sum_{m+1}^n {}^s \delta y_s \sum_1^m {}^{\varkappa} \left(\nu_\varkappa^\varrho \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s'} - \frac{d}{dx} \nu_\varkappa^\varrho \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s'} \right) = 0.$$

Durch Integration erhält man hieraus, weil alle δy für $x = x_0$ verschwinden müssen:

$$(10) \qquad \sum_1^m {}^r \delta y_r \sum_1^m {}^{\varkappa} \nu_\varkappa^\varrho \frac{\partial \varphi_r}{\partial y_r'} = - \sum_{m+1}^n {}^s \delta y_s \sum_1^m {}^{\varkappa} \nu_\varkappa^\varrho \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s'}$$

$$- \int_{x_0}^x dx \sum_{m+1}^n {}^s \delta y_s \sum_1^m {}^{\varkappa} \left(\nu_\varkappa^\varrho \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s} - \frac{d}{dx} \nu_\varkappa^\varrho \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s'} \right).$$

Wegen $\varrho = 1, 2, \ldots, m$ sind das m lineare Gleichungen für die m Unbekannten $\delta y_1, \ldots, \delta y_m$, deren Determinante:

$$(11) \qquad \sum \pm \nu_1^1 \nu_2^2 \cdots \nu_m^m \sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2'} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_m'}$$

nicht Null ist, m Gleichungen also, welche diese m Unbekannten bestimmen und somit den m Bedingungsgleichungen (4) vollständig äquivalent sind.

Weiter aber sollen alle n Variationen δy auch für $x = x_1$ verschwinden, also müssen $\delta y_m, \ldots, \delta y_n$ den m Bedingungen genügen:

$$(12) \qquad W_{\delta y}^\varrho \equiv \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{m+1}^n {}^s \delta y_s \sum_1^m {}^{\varkappa} \left(\nu_\varkappa^\varrho \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s} - \frac{d}{dx} \nu_\varkappa^\varrho \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s'} \right) = 0$$

und dies sind, wenn man sich x_0 und x_1 so gewählt denkt, dass die Determinante (11) in keiner dieser beiden Grenzen verschwindet, eben auch alle Bedingungen, denen die δy_s unterworfen sind.

Setzt man nun für $s = m + 1, \ldots, n$:

$$(13) \qquad \delta y_s = z_s + \sum_1^m {}^{\sigma} a_\sigma u_s^\sigma,$$

wo die u_s^σ beliebig zu wählende und die z_s willkürliche Functionen von x bezeichnen, die in beiden Grenzen verschwinden, die α_σ dagegen Constanten sind, so gehen die Bedingungen (12) über in:

(14) $$W_s^\varrho + \sum_1^m{}^\sigma \alpha_\sigma W_{u^\sigma}^\varrho = 0.$$

Hat man daher für die u_s^σ irgend $m(n-m)$ solche an beiden Grenzen verschwindende Functionen gesetzt, dass die Determinante

(15) $$\sum \pm W_{u^1}^1 W_{u^2}^2 \cdots W_{u^m}^m$$

nicht Null wird, so lassen sich die m Constanten α_σ so bestimmen, dass die m Gleichungen (14) erfüllt und die Gleichungen (12) also durch die Substitutionen (13) identisch befriedigt werden.

Weiter haben die Auflösungen der Gleichungen (14) die Form:

(16) $$\alpha_\sigma = \sum_1^m{}^\varrho \beta_\varrho^\sigma W_s^\varrho,$$

wo die Constanten β_ϱ^σ nur von der Wahl der Functionen u_s^σ abhängen, aber dieselben Werthe behalten für alle beliebigen Functionen z.

Führt man nun die Werthe (13) der δy_s in die Bedingung (8) ein, so verwandelt sich diese in:

$$U_s + \sum_1^m{}^\sigma \alpha_\sigma U_{u^\sigma} = 0,$$

oder nach (16) in:

$$U_s + \sum_1^m{}^\varrho \gamma_\varrho W_s^\varrho = 0,$$

wo die

$$\gamma_\varrho = \sum_1^m{}^\sigma \beta_\varrho^\sigma U_{u^\sigma}$$

von der Wahl der Functionen z unabhängige Constanten sind.

Nach (8) und (12) lässt sich aber diese Bedingung also schreiben:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{m+1}^{n}{}^s z_s \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_s} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_s'} \right.$$
$$\left. + \sum_1^m{}^\varrho \gamma_\varrho \sum_1^m{}^\varkappa \left(\nu_\varkappa^\varrho \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s} - \frac{d}{dx} \nu_\varkappa^\varrho \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s'} \right) \right\} = 0$$

und verlangt daher, da die Functionen z bis auf die Grenzwerthe ganz willkürlich geblieben sind, dass der Coefficient jedes einzelnen z_s Null sei. D. h. aber, da die

$$\nu_\varkappa = \sum_1^m{}^{\varrho}\, \gamma_\varrho\, \nu_{\varkappa\varrho}$$

wiederum Lösungen der Differentialgleichungen

$$(9) \qquad \sum_1^m{}^{\varkappa}\left(\nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_r} - \frac{d}{dx}\, \nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_r'}\right) = 0, \quad (r = 1, 2, \cdots, m)$$

sind, die gesuchten Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ sowie die m Multiplicatoren $\mu_1, \ldots, \mu_m$ müssen neben den m Gleichungen

$$(7) \qquad \frac{\partial F}{\partial y_r} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_r'} = 0, \quad (r = 1, 2, \cdots, m),$$

welche die Multiplicatoren $\mu_\varkappa$ definiren, noch den $n - m$ Gleichungen genügen:

$$(17) \qquad \frac{\partial F}{\partial y_s} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_s'} + \sum_1^m{}^{\varkappa}\left(\nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s} - \frac{d}{dx}\, \nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s'}\right) = 0,$$

in denen $s = m + 1, \cdots, n$ und die $\nu_\varkappa$ Lösungen der Differentialgleichungen (9) sind.

Addirt man aber zu jeder Gleichung (7) die entsprechende Gleichung (9), so erhalten die Gleichungen (7) die nämliche Form wie die Gleichungen (17), und wenn man sich noch der Bedeutung (6) von F erinnert und

$$\mu_\varkappa + \nu_\varkappa = \lambda_\varkappa$$

setzt, so ergiebt sich somit schliesslich, dass die Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ des Problems zusammen mit den m Multiplicatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ den n Gleichungen genügen müssen:

$$(18) \qquad \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_1^m{}^{\varkappa}\, \lambda_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} + \sum_1^m{}^{\varkappa}\, \lambda_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_i'}\right) = 0.$$

Das ist aber eben die Lagrange'sche Regel. —

Diese Ableitung setzt stillschweigend voraus, dass die Determinante (15) nicht für alle beliebigen, in den beiden Grenzen verschwindenden Functionen u_s^σ Null sei, d. h. mit anderen Worten, dass es kein System Lösungen $\nu_1, \ldots, \nu_m$ der m Differentialgleichungen (9) gebe, welches zugleich auch den $n - m$ Gleichungen:

$$(19) \qquad \sum_1^m{}^{\varkappa}\left(\nu_\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial y_s} - \frac{d}{dx}\, \nu_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_s'}\right) = 0, \quad (s = m + 1, \cdots, n)$$

genügte.

In Verbindung mit den Gleichungen (1) und den Grenzbedingungen würden aber die n Gleichungen (9) und (19) im Allgemeinen selbst

schon die Functionen y vollständig und zwar ganz unabhängig von der Function f bestimmen und daher ist klar, dass, im Allgemeinen wenigstens, die Lösungen des Problems nicht den letzteren Gleichungen unterworfen sein können.

Im Besonderen dürfen jedoch keine Multiplicatoren $\nu_1, \ldots, \nu_m$ existiren, für welche die n Gleichungen (9) und (19) Identitäten oder blosse Folgen der Gleichungen (1) würden. Nun sagt das identische Bestehen jener n Gleichungen aus, dass

$$\sum_1^m {}^{\varkappa}\, \nu_\varkappa \varphi_\varkappa$$

ein vollständiger Differentialquotient ist. Die vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen (1) dürfen also keine Gleichung von der Form

$$\frac{d\Phi(x, y_1, \ldots, y_n)}{dx} = 0$$

nach sich ziehen. Das ist aber keine neue Voraussetzung, sie ist vielmehr implicite schon in unserer früheren Annahme enthalten, dass das vorgelegte Problem den Grenzwerthen der y keinerlei Beschränkungen auferlegen sollte. —

§ 2.

Die Richtigkeit der Lagrange'schen Regel in dem besondern Falle, dass nur Bedingungsdifferentialgleichungen vorliegen, involvirt nun von selbst ihre Gültigkeit auch für den allgemeinen Fall, wo den unbekannten Functionen ausserdem noch endliche Bedingungsgleichungen auferlegt sind*).

Modificiren wir nämlich das frühere Problem dadurch, dass wir jetzt den y an Stelle der m Gleichungen (1) die p endlichen Gleichungen:

(20) $$\psi_\alpha(x, y_1, \cdots, y_n) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, p)$$

und die q Differentialgleichungen

---

*) Man darf aber nicht meinen, dass man, um den Fall von gemischten Bedingungsgleichungen auf den früher betrachteten zurückgeführt zu haben, nur jede endliche Bedingungsgleichung:

$$\psi(x, y_1, \cdots, x_n) = 0$$

zu ersetzen brauchte durch die, wegen der festen Grenzwerthe ihr äquivalente Gleichung:

$$\frac{d\psi(x, y_1, \cdots, y_n)}{dx} = 0;$$

denn hierdurch würde man eben auf den am Schlusse von § 1 hervorgehobenen Ausnahmefall kommen.

(21) $\qquad \varphi_\beta(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n'), \quad (\beta = 1, 2, \cdots, q)$

vorschreiben, wobei also $p + q < n$ ist und von den untern, wie von den obern Grenzwerthen der y nur noch je $n - p$ willkürlich bleiben, so können wir uns diesen Fall immer durch Auflösung der Gleichungen (20) nach p von den y auf den früher betrachteten zurückgeführt denken.

Es sei etwa die Determinante

$$(22) \qquad \sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial \psi_p}{\partial y_p}$$

weder an sich, noch in Folge der Gleichungen (20) identisch Null und die Auflösung dieser Gleichungen ergebe:

$$(23) \qquad y_\varkappa = y_\varkappa(x, y_{p+1}, \cdots, y_n), \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots, p).$$

Wird dann durch Substitution dieser Auflösungen:

$$f = \chi(x, y_{p+1}, \cdots, y_n, y_{p+1}', \cdots, y_n'),$$
$$\varphi_\beta = \chi_\beta(x, y_{p+1}, \cdots, y_n, y_{p+1}', \cdots, y_n'),$$

so kommt das Problem auf eines der früher betrachteten Art zurück, das kurz durch die Formeln:

$$\int_{x_0}^{x_1} \chi \, dx = \text{Max., Min.}, \quad \chi_\beta = 0$$

charakterisirt werden kann. Ueberdiess müssen, falls die Grenzwerthe der y nicht noch mehr beschränkt werden sollen, die q Gleichungen:

$$(24) \qquad \chi_\beta = 0, \quad (\beta = 1, 2, \cdots, q)$$

q von den Differentialquotienten y' bestimmen und dürfen auch keine Gleichung von der Form:

$$\frac{d\Psi(x, y_{p+1}, \cdots, y_n)}{dx} = 0$$

zur Folge haben. Nach § 1 wird daher die neue Aufgabe gelöst durch die Gleichungen (24) und die Gleichungen:

$$(25) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y_s} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y_s'} = 0, \quad (s = p + 1, \cdots, n),$$

in denen:

$$\Phi = \chi + \lambda_1 \chi_1 + \cdots + \lambda_q \chi_q$$

ist.

Durch die Substitutionen (23), welche die Multiplicatoren λ gar nicht berühren, wird nun zugleich auch:

$$(26) \qquad F \equiv f + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q = \Phi.$$

Wird aber überhaupt für n beliebig gewählte Functionen $y_1, \cdots, y_n$ von $x, u_1, \ldots, u_\mu$ ein gegebener Ausdruck:

$$F(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = \Phi(x, u_1, \cdots, u_\mu, u_1', \cdots, u_\mu'),$$

so gelten für diese Functionen stets zu gleicher Zeit auch die Relationen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_h} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial u_h'} = \sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)\frac{\partial y_i}{\partial u_h},$$

die entweder indirect durch Variation der vorhergehenden Definitionsgleichung von Φ abgeleitet, oder mit Hülfe der Formeln:

$$\frac{\partial y_i'}{\partial u_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial y_i}{\partial u_h}, \quad \frac{\partial y_i'}{\partial u_h'} = \frac{\partial y_i}{\partial u_h}$$

direct durch die aus jener Gleichung folgenden Werthe der partiellen Differentialquotienten von Φ verificirt werden können.

Für die Functionen (23) hat man daher einerseits nach (26) identisch:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_s} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial y_s'} = \sum_1^p{}_\varkappa \left(\frac{\partial F}{\partial y_\varkappa} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_\varkappa'}\right)\frac{\partial y_\varkappa}{\partial y_s} + \frac{\partial F}{\partial y_s} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_s'}$$

und andererseits auch, weil sie Auflösungen der Gleichungen (20) sein sollen:

$$0 = \sum_1^p{}_\varkappa \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y_\varkappa}\frac{\partial y_\varkappa}{\partial y_s} + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y_s}.$$

Daher kann man die vorhergehenden Relationen so schreiben:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_s} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial y_s'} = \sum_1^p{}_\varkappa \left(\frac{\partial F}{\partial y_\varkappa} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_\varkappa'} + \sum_1^p{}_\alpha \mu_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y_\varkappa}\right)\frac{\partial y_\varkappa}{\partial y_s}$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial y_s} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_s'} + \sum_1^p{}_\alpha \mu_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y_s},$$

worin $\mu_1, \ldots, \mu_p$ willkürliche Multiplicatoren sind.

Nach der bei (22) gemachten Annahme kann man aber diese p Multiplicatoren so bestimmen, dass in den letzten Formeln der Coefficient eines jeden $\frac{\partial y_\varkappa}{\partial y_s}$ verschwindet. Daher lassen sich die (ohne Auflösung der Gleichungen (20) nicht aufstellbaren) Differentialgleichungen (24) und (25) ersetzen durch die Gleichungen (20), (21) und die n Gleichungen:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Psi}{\partial y_i'} = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

in denen:

$$\Psi = f + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_q\varphi_q + \mu_1\psi_1 + \cdots + \mu_p\psi_p$$

ist, und die Lagrange'sche Regel gilt somit allgemein. —

Die gleichmässige Convergenz von Functionen mehrerer Veränderlichen zu den dadurch sich ergebenden Grenzwerthen, dass einige derselben constanten Werthen sich nähern.

Von

O. Stolz in Innsbruck.

$f(x, y)$ sei eine eindeutige Function der Veränderlichen xy, mindestens für alle Werthsysteme xy, wo xy bez. den Bedingungen $a < x \leq a'$, $b \leq y \leq b'$ genügen. Hat $f(x, y)$, während x dem constanten Werthe a z. B. fallend unbeschränkt sich nähert, den endlichen Grenzwerth $\varphi(y)$ d. h. gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, so dass

(1) $$|f(x, y) - \varphi(y)| < \varepsilon$$

für alle Werthe $a < x < a + \delta$, so giebt es möglicherweise eine Zahl $\Delta > 0$ von der Art, dass die Relation (1) besteht, wenn nur $a < x < a + \Delta$, *welchen Werth aus dem Intervalle* (b, b') *mit Einschluss der Grenzen man* y *auch ertheilen mag.* Dann sagt man, dass $f(x, y)$ bei $\lim x = a + 0$ zum Grenzwerthe $\varphi(y)$ *gleichmässig für alle Werthe von* y: $b \leq y \leq b'$ convergire*). Aber es kann auch, wie man u. A. aus der Theorie der unendlichen Reihen weiss, sein, dass eine solche Zahl Δ nicht vorhanden ist. — Es springt in die Augen, wie man den Begriff der gleichmässigen Convergenz für Functionen von mehr als zwei Veränderlichen festzustellen hat.

Dass die Unterscheidung zwischen gleichmässiger und ungleichmässiger Convergenz eine neue Phase in der Entwickelung der Analysis bedeute, dürfte gegenwärtig wohl kein Kundiger in Abrede stellen. Im Folgenden werden insbesondere einige Sätze der reellen Functionentheorie aufgeführt, bei deren Begründung die neue Einsicht sich vortheilhaft bewährt, was, so viel mir bekannt ist, bisher bei allen nicht genügend hervorgehoben worden ist.

1. „Wenn $f(x, y)$ bei den von einander unabhängigen Grenzübergängen $\lim x = a + 0$, $\lim y = b + 0$ einen endlichen Grenz-

*) Vgl. Dini Fondamenti 1878 p. 397.

werth c hat und $f(x, y)$ bei $\lim x = a + 0$ zum Grenzwerthe $\varphi(y)$ *gleichmässig für alle Werthe von y: $b < y \leq b'$* convergirt, *so hat* $\varphi(y)$ *bei* $\lim y = b + 0$ *einen Grenzwerth und zwar stimmt er mit* c *überein.*" — Dieser freilich recht bescheidene Satz folgt unmittelbar aus dem Begriffe der hier vorkommenden Grenzwerthe. Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehören Zahlen $\Delta > 0$, $\mathsf{E} > 0$ derart, dass, wenn nur xy den Bedingungen: $a < x < a + \Delta$, $b < y < b + \mathsf{E}$ genügen, $|f(x, y) - c| < \varepsilon$ ist. Es besteht ferner, wenn nur $a < x < a + \Delta$, die Relation (1), worin y jeder der oben bezeichneten Werthe von y sein kann. Legen wir nun in den beiden Ungleichungen x einen bestimmten Werth innerhalb des Intervalles $(a, a + \Delta)$ bei, so folgt, dass für alle Werthe $b < y < b + \mathsf{E}$, $|\varphi(y) - c| < 2\varepsilon$ sein muss, d. i. $\lim \varphi(y) = c$ bei $\lim y = b + 0$.

2. In der Theorie der *einfachen Integrale* gelangt man mit Hilfe der gleichmässigen Convergenz, wie Hr. Dini a. a. O. hervorgehoben hat, zu folgendem Satze, der als speciellen Fall die gliedweise Integration der unendlichen Reihen enthält: „Wenn $f(x, y)$ bei allen Werthen von y: $b < y \leq b'$ im endlichen Intervalle $a \leq x \leq a'$ endlich und nach x integrirbar ist, wenn $f(x, y)$ bei $\lim y = b + 0$ zum Grenzwerthe $\varphi(x)$ *gleichmässig für alle Werthe von x*: $a \leq x \leq a'$ convergirt und $\varphi(x)$ im Intervalle (a, a') integrirbar ist, so hat man sicher

$$(2) \qquad \lim_{y=b+0} \int_a^{a'} f(x, y)\, dx = \int_a^{a'} \varphi(x)\, dx.\text{“ *)}$$

Der Satz ergiebt sich unmittelbar durch Betrachtung der Differenz $\int_a^{a'} [f(x, y) - \varphi(x)]\, dx$. Wenn $f(x, y)$ bei constantem $y\ (b < y \leq b')$ eine stetige Function von x für alle Werthe $a \leq x \leq a'$ ist, so ist unter der im Satze verlangten Bedingung $\varphi(x)$ für die genannten x stetig, somit die Existenz von $\int_a^{a'} \varphi(x)\, dx$ eine Folge derselben. — Und ferneres: „Gilt die Gleichung (2) für jeden Werth $a' > 0$ (bez. für jeden Werth $a' = c - \xi\ (0 < \xi < c - a)$, convergirt $\int_{a'}^{\infty} f(x, y)\, dx$

*) Hr. Dini hat weiter bemerkt, dass man, auch wenn nicht bekannt ist, dass $\varphi(x)$ im Intervalle (a, a') integrirbar ist, im Falle des Bestehens der übrigen Bedingungen des Satzes schliessen darf, dass $\int_a^{a'} f(x, y)\, dx$ bei $\lim y = b + 0$ *einen endlichen Grenzwerth habe.*

bei $\lim a' = +\infty$ zu Null *gleichmässig für alle Werthe von y:* $b < y \leq b'$ und existirt auch $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$, so hat man ebenfalls

$$\lim_{y=b+0} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^\infty \varphi(x)\,dx.\text{“ *)}$$

Diese Gleichung erschliesst man aus der Zerlegung

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

$$= \int_a^{a'} [f(x,y) - \varphi(x)]\,dx + \int_{a'}^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int_{a'}^{+\infty} \varphi(x)\,dx,$$

worin man für a' einen solchen Werth setzen kann, dass der zweite und der dritte Theil absolut genommen kleiner als ε sind.

Wir bedürfen der gleichmässigen Convergenz ferner bei Aufstellung der *allgemeinen Quadraturformel.* Beschreibt der Punkt $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, während t monoton von t_0 zu t_1 übergeht, eine geschlossene, sonst willkürliche Linie, haben die stetigen Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ für die Werthe von t: $t_0 \leq t \leq t_1$ endliche Ableitungen $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ und *convergiren in den Gleichungen*

$$\varphi(t+\tau) - \varphi(t) = \tau\,\{\varphi'(t) + \varrho\},$$
$$\psi(t+\tau) - \psi(t) = \tau\,\{\psi'(t) + \sigma\}$$

die Functionen $\varrho(\tau)$, $\sigma(\tau)$ *bei* $\lim \tau = 0$ *zur Null gleichmässig für die genannten Werthe von t*, so ist der Inhalt der von der obigen Linie eingeschlossenen Fläche (im algebraischen Sinne)

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt = -\int_{t_0}^{t_1} y\,\frac{dx}{dt}\,dt.$$

Die an $\varrho\sigma$ gestellte Forderung ist erfüllt, wenn $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ für ebendieselben Werthe von t stetig sind. — Der Satz lässt eine Verallgemeinerung zu, wenn das vorstehende Integral mindestens als *uneigentliches*, d. h. als Grenzwerth eines eigentlichen Integrales existirt.

3. Noch mehr Dienste leistet die gleichmässige Convergenz in der Theorie *der Doppelintegrale.* Man sagt**), eine Function, die für

---

*) Dini l. c. p. 403. Der Satz wurde auch von Hrn. Selivanoff gefunden. Vgl. Bull. d. l. soc. math. de France X (1882) p. 149.

**) Vgl. Thomae, Zeitschrift f. Math. XXI, p. 224. P. Du Bois-Reymond. Kronecker J. 94. B., p. 277. Harnack, Elemente der Diff. u. Integralrechn. p. 309.

alle Punkte eines zusammenhängenden oder aus getrennten Stücken in endlicher Anzahl bestehenden endlichen Gebietes $\mathfrak{F}$ definirt und endlich ist, besitze darin ein *eigentliches* Doppelintegral, wenn $\sum_1^n{}^r f(x_r, y_r)\,\tau_r$ — wo $\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n$ ein System *geradlinig* begrenzter, gleichbezeichneter (etwa positiver) Zellen, welche über das Gebiet $\mathfrak{F}$ ausgebreitet sind und $x_r\, y_r$ einen beliebigen nur auch zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Punkt des Polygones τ_r bezeichnet — bei unbegrenzter Abnahme der τ_r nach den beiden Dimensionen der Ebene einen endlichen Grenzwerth J hat, d. h. wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl β gehört, derart dass

$$\left| \sum_1^n{}^r f(x_r y_r)\,\tau_r - J \right| < \varepsilon,$$

falls nur die Polygone τ_r so beschaffen sind, dass *die grösste Sehne* (also Diagonale) *eines jeden von ihnen kleiner als β ist.* Dabei sind, wenn die Ebene auf irgend eine Weise durch Gerade zerstückelt wird, zu den τ_r diejenigen Zellen und nur sie zu rechnen, welche ein Flächenstück (nicht bloss Randtheile) mit $\mathfrak{F}$ gemein haben. Die zur Existenz eines Doppelintegrales nothwendige und hinreichende Bedingung bildet das Verschwinden der Summe $\sum_1^n{}^r (g_r - k_r)\,\tau_r$ bei $\lim \tau_r = 0$ (in obigem Sinne) — unter $g_r\, k_r$ die obere und untere Grenze von $f(x, y)$ im Polygone τ_r verstanden.

Systeme von Theilungen, welche das Gebiet $\mathfrak{F}$ in Polygone zerlegen, deren grösste Diagonale unter jede gegebene Länge sinkt, werden in der Regel durch zwei Curvensysteme

$$x = \varphi(p, q), \quad y = \psi(p, q)$$

definirt. Zugleich muss ein zusammenhängendes oder aus getrennten Stücken in endlicher Anzahl bestehendes Gebiet $\mathfrak{G}$ existiren, so dass jedem Punkte $p\,q$ von $\mathfrak{G}$ ein Punkt von $\mathfrak{F}$ und umgekehrt jedem Punkte $x\,y$ von $\mathfrak{F}$ ein Punkt von $\mathfrak{G}$ entspricht und wenn dieser ein Punkt innerhalb $\mathfrak{G}$, so nur ein Punkt. Die Functionen $\varphi(p, q)$, $\psi(p, q)$ seien in allen Punkten von $\mathfrak{G}$ mit Einschluss der Begrenzung stetig und mit partiellen Differentialquotienten nach $p\,q$ begabt, deren jeder im ganzen Gebiete $\mathfrak{G}$ endlich sein soll. Betrachten wir nun das von den durch die Werthsysteme $p\,q$; $p + \Delta p\, q$; $p\ q + \Delta q$; $p + \Delta p$, $q + \Delta q$ bestimmten Punkten $M\,M'\,M''\,M'''$ (mit den Coordinaten xy, $x'y'$ u. s. w.) gebildete geradlinige Viereck*) und nehmen an, dass die in den Differenzen

*) Solche Systeme von Theilungen sind von mir schon früher benutzt worden (vgl. d. Annalen Bd. XXIII, p. 156). Damals handelte es sich nur darum

$$
(3)\quad \begin{aligned}
x' - x &= \Delta p\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \varrho\right), & x'' - x &= \Delta q\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} + \sigma\right),\\
x''' - x'' &= \Delta p\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \mathrm{P}\right), & x''' - x' &= \Delta q\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} + \Sigma\right),
\end{aligned}
$$

sowie den analogen $y' - y$ u. s. w. vorkommenden Functionen von $\Delta p \Delta q : \varrho \sigma \mathrm{P} \Sigma$, ϱ' u. s. w. bei den von einander unabhängigen Grenzübergängen $\lim \Delta p = 0$, $\lim \Delta q = 0$ je zur Null *gleichmässig für alle Stellen pq des Gebietes* $\mathfrak{G}$ *convergiren.* Dann ergiebt sich leicht, dass wenn gesetzt wird

$$
W(p, q) = \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial y}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial y}{\partial p},
$$

$$
| MM'M''M''' | = | W \Delta p \Delta q | \pm | R \Delta p \Delta q |
$$

ist, worin R bei $\lim \Delta p = 0$, $\lim \Delta q = 0$ zur Null ebenfalls *gleichmässig für alle Stellen* $p\,q$ *des Gebietes* $\mathfrak{G}$ convergirt. Endlich setzen wir noch voraus, dass W *für ebendieselben Werthsysteme durchaus gleichbezeichnet* sei.

Bezeichnen wir nun die äussersten Abscissen des Gebietes $\mathfrak{G}$ mit kk', seine äussersten Ordinaten mit ll' und theilen die Intervalle $k' - k$, $l' - l$ bezw. in m und m' Theile und zwar sei $k < k'$, $l < l'$,

$$
\begin{aligned}
k' - k &= \Delta_1 p + \Delta_2 p + \cdots + \Delta_m p,\\
l' - l &= \Delta_1 q + \Delta_2 q + \cdots + \Delta_{m'} q.
\end{aligned}
$$

Es seien ferner:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= k + \Delta_1 p, & k_2 &= k_1 + \Delta_2 p \cdots k' = k_{m-1} + \Delta_m p,\\
l_1 &= l + \Delta_1 q, & l_2 &= l_1 + \Delta_2 q \cdots l' = l_{m'-1} + \Delta_{m'} q
\end{aligned}
$$

und

$$
f[\varphi(pq),\ \psi(pq)] = F(p, q).
$$

Dann folgt sofort, dass *das Doppelintegral J auch der Grenzwerth ist der Doppelsumme*

$$
S' = \sum_{r,s} F(k_r, l_s) \mid W(k_r, l_s)\, \Delta_r p \Delta_s q \mid
$$

bei $\lim \Delta_r p = 0$, $\lim \Delta_s q = 0$. Denn man hat

---

dass das Viereck $MM'M''M'''$ mit Δp und Δq unendlich klein werde *gleichmässig für alle Punkte pq des Gebietes* $\mathfrak{G}$. Zerlegt man

$$
x''' - x = \frac{x''' - x'}{2} + \frac{x''' - x''}{2} + \frac{x' - x}{2} + \frac{x'' - x}{2}
$$

und ähnlich $y''' - y$, so erkennt man, dass dazu natürlich auch die Forderungen im Texte hinsichtlich der partiellen Ableitungen von $x\,y$ nach $p\,q$ ausreichen, so dass die a. a. O. verlangte Berücksichtigung von $\dfrac{\partial^2 x}{\partial p \partial q}\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial p \partial q}$ entfällt.

$$\left| \sum_{1}^{n} f(x_r y_r)\, \tau_r - S' \right| < |R|\,(k'-k)\,(l'-l)$$

und kann zufolge der vorstehenden Bemerkung über R bei vorgelegtem $\varepsilon > 0$ Zahlen $\pi > 0$, $\varkappa > 0$ angeben, so dass wenn nur $|\Delta_r p| < \pi$, $|\Delta_s q| < \varkappa$, $|R|\,(k'-k)\,(l'-l) < \varepsilon$ ist.

Aus diesem Satze ergiebt sich *die Transformation des eigentlichen Doppelintegrales*

$$\underbrace{\int\!\!\int}_{\mathfrak{F}} f(xy)\, dx\, dy = \underbrace{\int\!\!\int}_{\mathfrak{G}} F(pq)\, |W dp\, dq|.$$

Zum Beweise der Formel ist nur noch der Nachweis erforderlich, dass die Function $F(p,q)\,W$ im Gebiete $\mathfrak{G}$ ein Doppelintegral besitze — welchen wir in Nr. 7 führen werden.

Die für die Functionen $\varrho\sigma$ u. s. w. geforderten gleichmässigen Convergenzen bestehen bekanntlich, wenn $\frac{\partial\varphi}{\partial p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial q}\,\frac{\partial\psi}{\partial p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial q}$ *in allen Punkten des Gebietes* $\mathfrak{G}$ mit Einschluss der Begrenzung *stetig sind.*

4. Aehnliche Beschränkungen treten auf bei Behandlung der Aufgaben, einen Körper, dessen Begrenzung vermittelst zweier Parameter, also durch Gleichungen

$$x = \varphi(p,q), \quad y = \psi(p,q), \quad z = \chi(p,q)$$

definirt ist, zu cubiren und den Inhalt einer auf dieselbe Art dargestellten krummen Fläche zu bestimmen. Für den genannten Körperinhalt (im algebraischen Sinne) findet man

$$\frac{1}{3}\int\!\!\int \begin{vmatrix} x, & y, & z, \\ \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q}, & \frac{\partial y}{\partial q}, & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix} dp\, dq,$$

erstreckt über einen Bereich $\mathfrak{G}$, der zur Oberfläche $\mathfrak{O}$ des Körpers in der Beziehung steht, dass jedem Punkte pq von $\mathfrak{G}$ ein und nur ein Punkt von $\mathfrak{O}$ und jedem Punkte von $\mathfrak{O}$ ein, und wenn das ein Punkt im Innern von $\mathfrak{G}$ ist, nur ein Punkt von $\mathfrak{G}$ entspricht — und zwar sicher unter der Voraussetzung, dass die Functionen $\varphi\psi\chi$, *sowie ihre partiellen Differentialquotienten erster Ordnung* im Gebiete $\mathfrak{G}$ durchaus endlich und *stetig* sind oder etwas allgemeiner, dass *die in* (3) *vorkommenden Functionen von* $\Delta p\,\Delta q : \varrho\sigma\,\mathrm{P}\Sigma$, sowie die analogen in Bezug auf y und z, *bei* $\lim \Delta p = 0$, $\lim \Delta q = 0$ *zur Null gleichmässig für alle Punkte* $p\,q$ *des Gebietes* $\mathfrak{G}$ *convergiren.* — Das Nämliche lässt sich bemerken hinsichtlich der bekannteren Formel über den Inhalt der oben erwähnten krummen Fläche. — Beide Sätze ge-

statten Verallgemeinerungen, wenn die betreffenden Functionen im Gebiete $\mathfrak{G}$ wenigstens uneigentliche Doppelintegrale zulassen.

5. Endlich sei noch Erwähnung gethan eines Theorems über die Abänderung der Reihenfolge von zwei einfachen Integrationen: „Wenn in dem von den Geraden $x = a$, $x = X$, $y = b$, $y = b'$ gebildeten Rechtecke, wo X jeden Werth $> a$ annehmen kann, $f(x, y)$ endlich und integrabel ist, desgleichen auch als Function von x, sowie als solche von y auf jeder zu den Axen parallelen Sehne dieses Rechteckes und wenn $\int\limits_a^\infty f(x, y)\, dx = \Phi(y)$ *gleichmässig für alle* $y : b \leqq y \leqq b'$ *convergirt* und $\Phi(y)$ eine im Intervalle (b, b') integrirbare Function von y ist, so existirt auch $\int\limits_a^\infty dx \int\limits_b^{b'} f(x, y)\, dy$ und ist gleich $\int\limits_b^{b'} dy \int\limits_a^\infty f(x, y)\, dx.$“ *)

Das folgt vermittelst des Satzes (2) in Nr. 2 aus der in der Theorie der Doppelintegrale zu beweisenden Gleichung (vgl. Nr. 8)

$$\int\limits_a^X dx \int\limits_b^{b'} f(x, y)\, dy = \int\limits_b^{b'} dy \int\limits_a^X f(x, y)\, dy$$

durch den Grenzübergang $\lim X = +\infty$.

Anhang. Zur Theorie der eigentlichen Doppelintegrale.

6. *Eine Abänderung der Integrabilitätsbedingung für eine Function $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen.* Hierzu gelangt man durch Einführung von *Unbestimmtsgrenzen* für die Werthe von $f(x, y)$ in einem unendlich kleinen Kreise um irgend einen fixirten Punkt $x'y'$ des Gebietes $\mathfrak{F}$ (Nr. 3), wobei wir genau dem Vorgange des Hrn. P. du Bois-Reymond folgen. Beschreiben wir um $x'y'$ einen Kreis mit dem Radius ϱ, so seien die obere und untere Grenze von $f(x, y)$ für die Punkte desselben $g(\varrho)$ und $k(\varrho)$, die wir hier wegen der Endlichkeit von $f(x, y)$ als endlich annehmen dürfen. Da neben $\varrho' < \varrho$, $g(\varrho') \leqq g(\varrho)$, $k(\varrho') \geqq k(\varrho)$, so existiren bei $\lim \varrho = 0$ Grenzwerthe (hier endlich), $\lim g(\varrho) = O(x', y')$, $\lim k(\varrho) = U(x', y')$; zugleich hat man $O(x', y') \leqq g(\varrho)$, $U(x', y') \geqq k(\varrho)$. Dabei gehört zu jeder Zahl $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ eine Zahl δ, derart dass für $\varrho < \delta$

*) Auf diesen Satz wies ich hin in den Berichten d. naturw. medicin. Vereins in Innsbruck VIII, 3. Heft (1879) p. XII.

$$O(x', y') > g(\varrho) - \tfrac{1}{2}\,\varepsilon, \quad U(x', y') < k(\varrho) + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon.$$

Bezeichnen wir $O(x', y')$, $U(x', y')$ bez. als obere und untere Unbestimmtheitsgrenze von $f(x, y)$ in unendlich kleiner Umgebung von $x'y'$, den Unterschied $D = O - U$ als *Sprung von $f(x, y)$ im Punkte $x'y'$*, so ergiebt sich aus dem Bemerkten

(a) $\quad (\varrho < \delta), \quad g(\varrho) - k(\varrho) - \varepsilon < D(x', y') \leq g(\varrho) - k(\varrho).$

Nunmehr folgt leicht der Satz: *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass $f(x, y)$ ein eigentliches Doppelintegral im Gebiete $\mathfrak{F}$ besitze, besteht darin, dass die Punkte $x'y'$ in $\mathfrak{F}$, wo der Sprung $D(x', y')$ irgend eine vorgelegte Zahl $\varrho > 0$ übersteigt, ein System von der Flächengrenze*)* (nach Hrn. G. Cantor vom Inhalte) *Null bilden.*

Dass die angeführte Bedingung *nothwendig* sei, folgt sehr leicht. Denn hätte das Punktsystem x', y', wo $D(x'y') > \varrho$ den positiven Inhalt L, so könnte $\lim \sum_1^n {}^r (g_r - k_r)\, \tau_r$ bei $\lim \tau_r$ unmöglich Null, $f(xy)$ also nicht integrabel in $\mathfrak{F}$ sein. Nach (a) hat man nämlich

$$\sum (g_r - k_r)\, \tau_r \geq \varrho \sum{}' \tau_r > \varrho L,$$

worin die Summe $\sum'$ sich nur auf diejenigen Zellen bezieht, die im Innern oder auf dem Rande Punkte der Menge $x'y'$ enthalten.

Die *Zulänglichkeit* derselben stützt sich auf den folgenden Satz: „Ist in dem endlichen Gebiete $\mathfrak{F}$ der *Sprung* $D(x, y)$ nirgends grösser als eine gegebene Zahl $\varrho > 0$, so lässt sich $\mathfrak{F}$ in so kleine Theile zerlegen, dass in keinem von ihnen die *Schwankung $\sigma = g - k$ von $f(x, y)$* die Zahl ϱ übersteigt."

Beweis. Würde man nicht zugeben, dass zu $\varrho + \varepsilon$, wo ε irgend eine positive Zahl bedeutet, eine Zahl β gehört, derart, dass wenn der Polygone τ_r grösste Diagonale unter β sinkt, die Schwankung von $f(x, y)$ in keinem $\varrho + \varepsilon$ übersteigt; so würde man auf einen Widerspruch mit der Voraussetzung stossen. Es seien aa' die äussersten Abscissen, bb' die äussersten Ordinaten des Gebietes $\mathfrak{F}$ und $a < a'$, $b < b'$; h bezeichne eine natürliche Zahl ≥ 2. Man denke sich das von den vier äussersten Coordinaten gebildete Rechteck dadurch in h^2 congruente Rechtecke zerlegt, dass man die Seiten $\alpha = a' - a$ und $\beta = b' - b$ desselben in je h gleiche Theile theilt. Unter den so erhaltenen Rechtecken muss sicherlich eines sein, in welchem die Schwankung von $f(x, y)$ nicht allein grösser ist als $\varrho + \varepsilon$, sondern das auch so beschaffen ist, dass, in wie kleine Theile es auch zer-

*) Vgl. d. Annalen XXIII, p. 154.

schnitten werden mag, darunter sich doch mindestens einer mit einer $\varrho + \varepsilon$ überschreitenden Schwankung befindet. Das dem Punkte $a\, b$ nächste Rechteck von der soeben beschriebenen Art sei

$$\begin{vmatrix} a + \frac{a_1}{h}\alpha, & a + \frac{a_1+1}{h}\alpha \\ b + \frac{b_1}{h}\beta, & b + \frac{b_1+1}{h}\beta \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \leq a_1 \leq h-1, \\ 0 \leq b_1 \leq h-1. \end{matrix}$$

Zerlegt man dasselbe dadurch, dass man jede seiner Seite in h gleiche Theile theilt, neuerdings in h^2 congruente Rechtecke, so muss sich darunter mindestens eines, also auch ein dem Punkte $a\, b$ nächstes befinden von genau derselben Beschaffenheit wie das getheilte u. s. f. Somit müsste man zu einem Punkte

$$X = a + \left(\frac{a_1}{h} + \frac{a_2}{h^2} + \cdots\right)\alpha,$$

$$Y = b + \left(\frac{b_1}{h} + \frac{b_2}{h^2} + \cdots\right)\beta,$$

wo $a_1\, a_2 \ldots;\ b_1\, b_2 \ldots$ natürliche Zahlen zwischen 0 und $h-1$ bedeuten, gelangen, so beschaffen, dass wie gross auch n sein mag, die Schwankung σ von $f(x, y)$ in dem Rechtecke

$$\text{(b)}\begin{vmatrix} a + \left(\frac{a_1}{h} + \frac{a_2}{h^2} + \cdots + \frac{a_n}{h^n}\right)\alpha, & a + \left(\frac{a_1}{h} + \frac{a_2}{h^2} + \cdots + \frac{a_n+1}{h^n}\right)\alpha \\ b + \left(\frac{b_1}{h} + \frac{b_2}{h^2} + \cdots + \frac{b_n}{h^n}\right)\beta, & b + \left(\frac{b_1}{h} + \frac{b_2}{h^2} + \cdots + \frac{b_n+1}{h^n}\right)\beta \end{vmatrix}$$

grösser als $\varrho + \varepsilon$ wäre. Das verträgt sich aber nicht damit, dass $D(X, Y) \leq \varrho$ sein soll. Nach (a) hat man $D(X, Y) > \sigma - \varepsilon$, wenn nur die Umgebung von $X\, Y$ klein genug gewählt wird. Innerhalb derselben ist demnach

$$\sigma < D(X\, Y) + \varepsilon \leq \varrho + \varepsilon,$$

also $\sigma < \varrho + \varepsilon$. Man kann aber in (b) n so gross annehmen, dass das betreffende Rechteck ganz innerhalb die soeben nachgewiesene Umgebung von $X\, Y$ hineinfällt.

Da ε hier eine jede positive Zahl sein kann, so muss man schliessen, dass auch eine so feine Theilung von $\mathfrak{F}$ möglich ist, dass die Schwankung σ von $f(x, y)$ in keinem Theile ϱ übersteigt. In der That, wäre bei jeder Theilung σ wenigstens in einem Theile $> \varrho$, so würde es auch Zahlen ϱ' geben zwischen ϱ und diesem Werthe von σ. Das ist aber dem bemerkten zufolge unmöglich; man braucht nur $\varepsilon = \varrho' - \varrho$ zu setzen.

Da die Punkte $x'\, y'$ ein System vom Inhalte 0 in $\mathfrak{F}$ bilden, so lassen sie sich aus $\mathfrak{F}$ durch Flächenstücke $\bar{\tau}_r$ ausscheiden, deren Summe kleiner ist als eine beliebige Zahl $\varrho' > 0$. Das übrige Gebiet kann

man zufolge obigen Satzes in so kleine Theile τ'_r zerlegen, dass in jedem die Schwankung von $f(x, y)$ ϱ nicht überschreitet. Somit ergiebt sich, dass

$$\sum \sigma_r \tau_r < \varrho \mathfrak{F} + \varrho'(B-A),$$

worin $\mathfrak{F}$ den Inhalt des Gebietes $\mathfrak{F}$, A B zwei Zahlen bedeuten, zwischen denen jeder zu einem Punkte von $\mathfrak{F}$ gehörige Werth von $f(x, y)$ liegt. Bezeichnet ε irgend eine Zahl > 0, so nehme man $\varrho' < \frac{1}{2}\varepsilon : (B-A)$ und $\varrho < \frac{1}{2}\varepsilon : \mathfrak{F}$, wodurch man findet:

$$\sum \sigma_r \tau_r < \varepsilon \quad \text{d. h.} \quad \lim \sum \sigma_r \tau_r = 0 \quad \text{bei} \quad \lim \tau_r = 0.$$

7. Die vorstehende Integrabilitätsbedingung ist manchmal bequemer als die gewöhnliche. Das erkennt man an folgenden Sätzen.

1.*) „Es seien

$$u_1 = \varphi_1(x, y),\ u_2 = \varphi_2(x, y), \ldots, u_m = \varphi_m(x, y) \qquad (m \geqq 1)$$

Functionen, die *in dem endlichen Gebiete $\mathfrak{F}$ eindeutig endlich und integrirbar sind.* Und es seien die obere und untere Grenze von u_r

$$a_r,\ b_r \quad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Wenn sodann $F(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ eine in dem Gebiete

$$\text{(c)} \qquad a_1 \leqq u_1 \leqq b_1,\ a_2 \leqq u_2 \leqq b_2, \ldots, a_m \leqq u_m \leqq b_m$$

stetige Function von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ bezeichnet, so ist die Function

$$F(\varphi(x, y), \ldots, \varphi_m(x, y)) = f(x, y)$$

im Gebiete $\mathfrak{F}$ endlich und integrirbar." — Insbesondere darf man $F = u_1 u_2 \ldots u_m$ setzen.

Beweis. Vermöge der Stetigkeit von $F(u_1, \ldots, u_m)$ gehören zu jeder Zahl $\varrho > 0$ Zahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$, so dass

$$\text{(d)} \qquad |F(u_1', \ldots, u_m') - F(u_1, \ldots, u_m)| < \varrho,$$

wenn nur $|u_1' - u_1| < \delta_1 \ldots |u_m' - u_m| < \delta_m$, gleichgültig wo die Stellen $(u_1 \ldots u_m)$ $(u_1' \ldots u_m')$ im Gebiete (c) liegen. Nehmen wir positive Zahlen $\delta_1' < \delta_1$, $\delta_2' < \delta_2, \ldots, \delta_m' < \delta_m$ an, so bilden die Punkte in $\mathfrak{F}$, wo der Sprung von $\varphi_1(x, y)$, bezw. der von $\varphi_2(x, y), \ldots$ der von $\varphi_m(x, y)$ grösser als δ_1' bezw. $\delta_2' \ldots \delta_m'$ ist, je ein System vom Inhalte 0. In allen übrigen Punkten von $\mathfrak{F}$ kann der Sprung von $f(x, y)$ ϱ nicht übersteigen, somit ist $f(x, y)$ in $\mathfrak{F}$ integrirbar. Bezeichnen wir nämlich den Sprung von $\varphi_r(x, y)$ im Punkte $x\, y$ mit $\Delta_r(x, y)$, so können wir uns um $x\, y$ einen Kreis k_r von so kleinem Radius ϱ_r beschreiben, dass nach (a)

*) Verallgemeinerung des Satzes von P. du Bois-Reymond, d. Annalen Bd. XVI, p. 112 und Bd. XX, p. 122.

$$g(\varrho_r) - k(\varrho_r) < \Delta_r(x, y) + \varepsilon \leqq \delta_r' + \varepsilon,$$

somit wenn $x' y'$, $x'' y''$ beliebige Punkte innerhalb k_r bedeuten,

$$|\varphi_r(x' y') - \varphi_r(x'' y'')| \leqq g(\varrho_r) - k(\varrho_r) \leqq \delta_r' + \varepsilon \leqq \delta_r,$$

falls wir $\varepsilon \leqq \delta_r - \delta_r'$ annehmen. Wählt man unter den Kreisen $k_1, k_2, \ldots, k_m$ den kleinsten aus und lässt $x' y'$, $x'' y''$ innerhalb desselben liegen, so folgt nach (d) $|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varrho$, und da, wenn g k obere und untere Grenze von $f(x, y)$ in diesem Kreise ist, innerhalb desselben auch Punkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ zu finden sind, so dass $f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) > g - k - \varepsilon$; so ergiebt sich nach (a) für den Sprung von $f(x, y)$ im Punkte $x y$

$$D(x, y) \leqq g - k < \varrho + \varepsilon,$$

also da ε jede positive Zahl sein kann $D(x, y) \leqq \varrho$.

2) „Wenn die Function $f(x, y)$ in dem endlichen Gebiete F *endlich und integrirbar ist* und $x = \varphi(p, q)$, $y = \psi(p, q)$ gesetzt werden, indem ein Gebiet $\mathfrak{G}$ in $p q$ existirt, sodass jedem Punkte desselben ein und nur ein Punkt von $\mathfrak{F}$ und jedem Punkte $x y$ von $\mathfrak{F}$ ein und wenn das ein Punkt *innerhalb* $\mathfrak{G}$, nur ein Punkt von $\mathfrak{G}$ entspricht, — wobei also φ ψ *in allen Punkten* $p q$ *von* $\mathfrak{G}$ *stetig sind;* so ist die Function $f\{\varphi(p q), \psi(p q)\} = F(p, q)$ *im Gebiete* $\mathfrak{G}$ *integrirbar.*" — Indem vermöge der Stetigkeit von φ ψ jeder Umgebung von $x y$ eine um dem entsprechenden Punkt $p q$ in $\mathfrak{G}$ zugeordnet werden kann, so erkennt man, dass die Sprünge von $F(p, q)$ die nämlichen Zahlen sind wie die von $f(x, y)$.

Aus beiden Sätzen zusammen ergiebt sich nun unmittelbar, dass die in Nr. 3 erwähnte Function $F(p, q) \cdot W(p, q)$ im Gebiete $\mathfrak{G}$ integrirbar ist.

8. *Berechnung eines Doppelintegrales durch zwei aufeinanderfolgende Integrationen.* „Wenn die endliche Function $f(x, y)$ in dem Gebiete $\mathfrak{F}$ (das eine convexe Fläche mit den äussersten Abscissen $a < a'$ und den äussersten Ordinaten $b < b'$ sein möge) ein eigentliches Doppelintegral J zulässt *und* wenn*) $f(x, y)$ als Function von x auf jeder zur X-Axe parallelen Sehne von $\mathfrak{F}$ (mit Ausnahme allenfalls der einem Systeme von Werthen Y, das im Intervalle (b, b') den Inhalt 0 hat, entsprechenden Sehnen) integrirbar ist, *so ist die auf solche Art erhaltene Function von* y

$$\text{(e)} \qquad \Phi(y) = \int_{x'}^{x''} f(x, y)\, dx,$$

*) Wie aus einem von Herrn P. du Bois-Reymond (Kronecker J. 94. B. p. 278) mitgetheilten Beispiele hervorgeht, folgt aus der Existenz des Doppelintegrales J nicht (wie Herr Harnack in seinem Lehrbuche p. 318 versichert), dass $f(x, y)$ *bloss* für die Werthe Y einer discreten Mannigfaltigkeit hinsichtlich x nicht integrirbar zu sein braucht.

wo x' x'' die Abscissen der zur Ordinate y gehörigen Punkte des Randes von $\mathfrak{F}$ bedeuten, *im Intervalle* (b, b') *integrirbar und zwar hat man*

$$\int_b^{b'} \Phi(y)\, dy = J.\text{“}$$

Wir zeigen zunächst, dass $\Phi(y)$ *im Intervalle* (b, b') *integrirbar ist.* Wenn $\Phi(y)$ in einer Mannigfaltigkeit von Punkten $y = Y$, welche den Inhalt 0 hat, nicht definirt ist, so denken wir uns daselbst beliebige, *nur zwischen endlichen Zahlen gelegene* Werthe hinzugenommen, um die Function $\Phi(y)$ zu einer vollständig bestimmten $\Phi'(y)$ zu machen. Theilen wir das Intervall (b, b') in n Theile:

$$b' - b = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$$

und bezeichnen mit Γ_s K_s obere und untere Grenze von $\Phi(y)$ im Intervalle

$$\text{(f)} \qquad b + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{s-1} \leqq y \leqq b + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_s,$$

mit Γ_s' K_s' die analogen Zahlen für die Function $\Phi'(y)$, so hat bekanntlich die Summe $\sum_1^n {}^s (\Gamma_s' - K_s')\, \varepsilon_s$ bei $\lim \varepsilon_s = 0$ Null oder eine positive Zahl zum Grenzwerth, je nachdem $\Phi'(y)$ im Intervalle (b, b') integrirbar ist oder nicht. Es ist aber unmittelbar ersichtlich, dass dieser Grenzwerth jedenfalls mit $\lim \sum_1^n {}^s (\Gamma_s - K_s)\, \varepsilon_s$ übereinstimmt, wovon wir hier zeigen können, dass er Null ist. — Wir theilen auch $a' - a$ und zwar in m Theile:

$$a' - a = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_m$$

und überziehen das Gebiet $\mathfrak{F}$ mit den durch die Punkte der ersten Theilung parallel zur X-Axe und durch die der zweiten parallel zur Y-Axe gelegten Geraden. Zu jeder positiven Zahl ε gehören positive Zahlen Δ E, derart, dass

$$\text{(g)} \qquad 0 \leqq \sum_{r,s} (g_{r,s} - k_{r,s})\, \delta_r\, \varepsilon_s < \tfrac{1}{3}\, \varepsilon,$$

wenn nur alle $\delta_r < \Delta$ und alle $\varepsilon_s < E$. Dabei bezieht sich die Doppelsumme auf diejenigen Rechtecke $\delta_r\, \varepsilon_s$ (worin $g_{r,s}$ $k_{r,s}$ obere und untere Grenze von $f(x, y)$ seien), welche der in Nr. 3 hinsichtlich der τ_r ausgesprochenen Bedingung genügen. Was auch die Zahl $\varepsilon' > 0$ sein mag, man kann im Intervalle (f) Werthe von $y : u_s\, v_s$ angeben, so dass

$$\Phi(u_s) > \Gamma_s - \varepsilon', \quad \Phi(v_s) < K_s + \varepsilon', \quad \Gamma_s - K_s < \Phi(u_s) - \Phi(v_s) + 2\varepsilon'.$$

Lässt man s nacheinander $1, 2, \ldots, n$ sein, so ergiebt sich daraus

$$\text{(h)}\quad 0 \leq \sum_1^n {}^s (\mathsf{\Gamma}_s - \mathsf{K}_s)\, \varepsilon_s < \sum_1^n {}^s [\Phi(u_s) - \Phi(v_s)]\, \varepsilon_s + 2\varepsilon'(b'-b).$$

Bezeichnet ferner x_r ein willkürliches x im Intervalle

$$(a + \delta_1 + \cdots + \delta_{r-1},\ a + \delta_1 + \cdots + \delta_r),$$

$\delta_{k_s} \ldots \delta_{l_s}$ diejenigen Intervalle δ_r, welche zu den im Abstande $b + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{s-1}$ von der X-Axe gehörigen Rechtecken $\delta_r\, \varepsilon_s$ der vorstehenden Doppelsumme gehören, und endlich M eine Zahl grösser als $|f(x, y)|$ im Gebiete $\mathfrak{F}$, so kann man eine positive Zahl Δ_s angeben, derart, dass für $\delta_r < \Delta_s$

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} \Phi(u_s) < \sum_{k_s}^{l_s} {}^r f(x_r, u_s)\, \delta_r + \varepsilon' + 2M\Delta_s, \\ \Phi(v_s) > \sum_{k_s}^{l_s} {}^r f(x_r, v_s)\, \delta_r - \varepsilon' - 2M\Delta_s. \end{cases}$$

Man braucht nur Δ_s so zu bestimmen, dass für $\delta_r < \Delta_s$

$$\left|\Phi(u_s) - \sum {}^r f(x_r, u_s)\, \delta_r\right| < \varepsilon', \qquad \left|\Phi(v_s) - \sum {}^r f(x_r, v_s)\, \delta_r\right| < \varepsilon',$$

was nach (e) stets angeht. Da jedoch in den zuletzt erwähnten Summen $\sum {}^r \delta_r$ gleich den zu $y = u_s$ und $y = v_s$ gehörigen Werthen von $x'' - x'$, also im Allgemeinen kleiner ist als die Summe der in (i) erscheinenden Intervalle δ_r, so ist dort noch $\pm 2M\Delta_s$ zuzufügen. Somit ergiebt sich, unter Δ_0 die grösste der Zahlen $\Delta_1\, \Delta_2 \ldots \Delta_n$ verstanden,

$$\sum_1^n {}^s [\Phi(u_s) - \Phi(v_s)]\, \varepsilon_s < \sum_{r,s} [f(x_r, u_s) - f(x_r, v_s)]\, \delta_r \varepsilon_s$$
$$+ 2(\varepsilon' + 2M\Delta_0)(b' - b)$$

und mit Hülfe von (g) und (h), wenn man sich nur $\varepsilon_s < \mathsf{E}$ und alle δ_r kleiner als die kleinste der Zahlen $\Delta\, \Delta_1\, \Delta_2 \ldots \Delta_n$ denkt,

$$0 \leq \sum_1^n {}^s (\mathsf{\Gamma}_s - \mathsf{K}_s)\, \varepsilon_s < \tfrac{1}{3}\varepsilon + 4\varepsilon'(b' - b) + 4M\Delta_0(b' - b).$$

ε' ist willkürlich, lässt sich also so bestimmen, dass $4\varepsilon'(b' - b) < \frac{1}{3}\varepsilon$ und endlich kann Δ_0 so verkleinert werden, dass auch

$$4M\Delta_0(b' - b) < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Wir finden demnach, dass für $\varepsilon_s < \mathsf{E}$

$$0 \leq \sum_1^n (\Gamma_s - K_s)\,\varepsilon_s < \varepsilon,$$

somit

$$\lim \sum_1^n (\Gamma_s - K_s)\,\varepsilon_s = 0 \quad \text{bei} \quad \lim \varepsilon_s = 0. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Nunmehr folgt sofort, dass, wenn $\int_b^{b'} \Phi(y)\,dy = H$ gesetzt wird, $J = H$ sein muss. Wir haben, wenn nur $\delta_r < \Delta$, $\varepsilon_s < E$,

$$\text{(k)} \qquad \left| \sum_{r,s} f(x_r, y_s)\,\delta_r\,\varepsilon_s - J \right| < \frac{1}{3}\varepsilon,$$

wo y_s irgend einen Werth im Intervalle (f) bedeutet. Zugleich sei E so klein, dass für $\varepsilon_s < E$ auch

$$\text{(l)} \qquad \left| \sum_1^n \Phi(y_s)\,\varepsilon_s - H \right| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Und zwar soll $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ in diesen beiden Relationen, sowie fortan, ein bestimmtes der Bedingung $\varepsilon_s < E$ genügendes Werthsystem bedeuten. Nach (i) ist demnach für $\delta_r < \Delta_s$

$$\left| \Phi(y_s) - \sum_{k_s}^{l_s} f(x_r, y_s)\,\delta_r \right| < \varepsilon' + 2M\Delta_s,$$

also

$$\text{(m)} \qquad \left| \sum_1^n \Phi(y_s)\,\varepsilon_s - \sum_{r,s} f(x_r, y_s)\,\delta_r\,\varepsilon_s \right| < (\varepsilon' + 2M\Delta_0)\,(b' - b).$$

Nimmt man hier das willkürliche ε' so klein, dass $\varepsilon'(b' - b) < \frac{1}{6}\varepsilon$ und verkleinert Δ_0 soweit, dass auch $2M\Delta_0(b' - b) < \frac{1}{6}\varepsilon$, so folgt durch Zusammenfassung von (k), (l), (m), dass $|H - J| < \varepsilon$ d. h. $H = J$.

Innsbruck, 4. December 1884.

Ueber verwandte s-Functionen.

(Zweite Mittheilung).

Von

Erwin Papperitz in Leipzig.

Wie in einer im XXV. Bande dieser Zeitschrift p. 212 abgedruckten Note gezeigt wurde, besteht zwischen je vier *verwandten Schwarz'schen s-Functionen* $s_i(\lambda_i, \mu_i, \nu_i, z)$ bei passender Wahl der in ihnen enthaltenen willkürlichen Constanten eine Relation von der Form:

$$\frac{(s_1-s_2)(s_3-s_4)}{(s_1-s_4)(s_3-s_2)} = z^{-n_1}\cdot(1-z)^{-n_2}\cdot\frac{\varphi_{m_1}(z)}{\varphi_{m_2}(z)}, \tag{1}$$

wo φ_{m_1} und φ_{m_2} ganze Functionen vom Grade m_1 resp. m_2 bedeuten. Hierbei sind die ganzen Zahlen n_1, n_2, m_1, m_2 durch die Formeln

$$\tag{2} \begin{cases} n_1 = \frac{1}{2}(l_{12}+l_{34}-l_{14}-l_{32}), \\ n_2 = \frac{1}{2}(n_{12}+n_{34}-n_{14}-n_{32}), \\ m_1 = \frac{1}{2}(l_{12}+l_{34}+m_{12}+m_{34}+n_{12}+n_{34})-2, \\ m_2 = \frac{1}{2}(l_{14}+l_{32}+m_{14}+m_{32}+n_{14}+n_{32})-2 \end{cases}$$

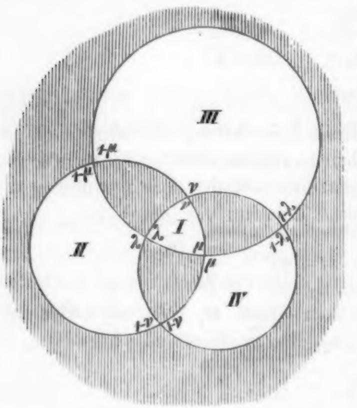
gegeben, sofern

$$l_{ik} = [\lambda_i-\lambda_k],\; m_{ik} = [\mu_i-\mu_k],\; n_{ik} = [\nu_i-\nu_k] \tag{3}$$

und für die eingeklammerten Grössen ihr absoluter Werth gesetzt wird.

Gegenwärtig soll es sich um die *explicite Darstellung von Gleichungen der Form* (1) handeln. In Bezug hierauf wurde früher bereits bemerkt, dass sich die Functionen $\varphi_{m_1}(z)$ und $\varphi_{m_2}(z)$ immer durch eine Coefficientenvergleichung bestimmen lassen, indem man eine jede s-Function durch den Quotienten zweier hypergeometrischer Reihen ausdrückt und nach Wegschaffung der Nenner beide Seiten der Gleichung (1) entwickelt. Dieser einigermassen umständlichen Methode kann man indess, wie sich zeigen wird, wenigstens in den einfachsten Fällen entrathen.

Zieht man die conforme Abbildung der z-Ebene auf die s-Ebene in Betracht, so bietet sich als ein einfachster Fall von vier verwandten s-Functionen das Quadrupel derjenigen Functionen dar, welche die eine der beiden durch die reelle Axe getrennten Halbebenen z auf ein gewisses Kreisbogendreieck der s-Ebene mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ und auf dessen drei Scheiteldreiecke abbilden. Dieser Fall mag aus der unendlichen Menge der möglichen als Beispiel herausgegriffen werden, weil er sich dadurch auszeichnet, dass die ihm entsprechende Contiguenrelation in sehr einfacher Weise geometrisch gedeutet werden kann. Indem wir gerade solche vier s-Functionen voraussetzen, welche die Halbebene z auf vier von den nämlichen drei Kreisen begrenzte Dreiecke abbilden, welche mit ihren Ecken zusammenstossen, machen wir implicite die zur Geltung der Relation (1) erforderliche Annahme, dass die Substitutionen, welche die zu den Punkten $z=0$, ∞, 1 gehörigen Fundamentalwerthe in einander überführen, für die fraglichen vier Functionen identisch ausfallen.



Die Exponenten der zu betrachtenden s-Functionen sind bei geeigneter Wahl ihrer Vorzeichen durch die Winkelzahlen der Dreiecke I, II, III, IV und die Aufeinanderfolge der Winkel bei der Umlaufung in positivem Sinne wie folgt bestimmt:

$$\begin{array}{lll}
\lambda_1 = \lambda, & \mu_1 = \mu, & \nu_1 = \nu, \\
\lambda_2 = \lambda, & \mu_2 = \mu - 1, & \nu_2 = \nu - 1, \\
\lambda_3 = \lambda - 1, & \mu_3 = \mu - 1, & \nu_3 = \nu, \\
\lambda_4 = \lambda - 1, & \mu_4 = \mu, & \nu_4 = \nu - 1.
\end{array}$$

Die Formeln (2) und (3) ergeben:

$$n_1 = -1, \quad n_2 = 0, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 0$$

und zwischen den in Rede stehenden s-Functionen besteht daher eine Relation von der Gestalt:

$$D = \frac{(s_1 - s_2)(s_3 - s_4)}{(s_1 - s_4)(s_3 - s_2)} = Cz.$$

Um die Constante C zu bestimmen, vertauschen wir die Indices 3 und 4 der Exponenten und finden jetzt:

$$n_1 = -1, \quad n_2 = +1, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 0,$$

so dass neben der obigen auch folgende Relation stattfindet:

$$D' \equiv \frac{(s_1-s_2)(s_4-s_3)}{(s_1-s_3)(s_4-s_2)} = C' \cdot \frac{z}{1-z}.$$

Nun ist aber identisch:

$$D' = \frac{D}{D-1},$$

mithin auch:

$$C' \cdot \frac{z}{1-z} = \frac{Cz}{Cz-1},$$

woraus $C = 1$, $C' = -1$ folgt.

Die gesuchte Contiguenrelation erhält daher die definitive Form:

$$(4) \qquad \frac{(s_1-s_2)(s_3-s_4)}{(s_1-s_4)(s_3-s_2)} = z,$$

welcher natürlich noch weitere fünf gleichberechtigte Formen zugesellt werden könnten, bei denen rechter Hand die Veränderlichen $1-z$, $\frac{1}{z}$, $1-\frac{1}{z}$, $\frac{z}{z-1}$, $\frac{1}{1-z}$ auftreten.

Um jetzt die geometrische Bedeutung der Gleichung (4) in Evidenz treten zu lassen, denken wir uns in einer jeden s-Function die Substitution

$$z = \frac{(x-a)(c-b)}{(x-b)(c-a)}$$

gemacht. Alsdann geht die Function $s(\lambda, \mu, \nu, z)$ oder

$$s\begin{pmatrix}\lambda & \mu & \nu & \\ 0 & \infty & 1 & z\end{pmatrix} \quad \text{über in} \quad s\begin{pmatrix}\lambda & \mu & \nu & \\ a & b & c & x\end{pmatrix}$$

und die Relation (4), geschrieben in den s-Functionen mit den singulären Punkten $x = a, b, c$, lautet:

$$(5) \qquad \frac{(s_1-s_2)(s_3-s_4)}{(s_1-s_4)(s_3-s_2)} = \frac{(x-a)(c-b)}{(x-b)(c-a)}.$$

Hierin spricht sich folgender Satz über die conforme Abbildung der x-Ebene auf die s-Ebene aus:

Betrachtet man die vier verwandten s-Functionen, welche die Abbildung der durch die Punkte a, b, c und ihre Aufeinanderfolge in gegebenem Sinne bestimmten Kreisfläche der x-Ebene auf ein Kreisbogendreieck I der s-Ebene und seine drei Scheiteldreiecke II, III, IV bewirken, so ist, welches auch die Lage des Punktes x sein mag, das Doppelverhältniss der ihm entsprechenden vier Punkte s_1, s_2, s_3, s_4 gleich dem Doppelverhältniss des Punktes x und der drei festen Grundpunkte a, b, c.

Von den Consequenzen dieses Satzes, nach welchem zu je dreien der Punkte s_1, s_2, s_3, s_4 der vierte linear construirt werden kann, sei nur Folgendes hervorgehoben.

Rückt der Punkt x auf den Kreis $(a\,b\,c)$ und nimmt demzufolge

das Doppelverhältniss einen reellen Werth an, so liegen auch die entsprechenden vier Punkte der s-Ebene auf einem Kreise, nämlich auf einem der drei Begrenzungskreise der Dreiecke I, II, III, IV. Fällt der Punkt x ferner mit einem der singulären Punkte a, b, c zusammen, so fallen die entsprechenden Punkte s_1, s_2, s_3, s_4 paarweise zusammen.

Als einfaches Beispiel, an dem sich unsere Aufstellungen leicht verificiren lassen, sei das der Ikosaederirrationalität hier angeführt.

Bezeichnen f, H, T die zum Ikosaeder gehörigen Formen:

$$\begin{aligned}
f &= \eta_1\eta_2(\eta_1^{10} + 11\eta_1^5\eta_2^5 - \eta_2^{10}),\\
H &= -(\eta_1^{20} + \eta_2^{20}) + 228(\eta_1^{15}\eta_2^5 - \eta_1^5\eta_2^{15}) - 494\eta_1^{10}\eta_2^{10},\\
T &= (\eta_1^{30} + \eta_2^{30}) + 522(\eta_1^{25}\eta_2^5 - \eta_1^5\eta_2^{25}) - 10005(\eta_1^{20}\eta_2^{10} + \eta_1^{10}\eta_2^{20})
\end{aligned}$$

und setzt man:

$$\frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{12^3 \cdot f^5(\eta_1, \eta_2)} = Z,$$

so wird durch die Function

$$s_1(Z) = \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

bekanntlich die Halbebene Z auf ein Dreieck der s-Kugel mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{3}$ abgebildet, dessen Seiten in den Symmetrieebenen eines der s-Kugel eingeschriebenen Ikosaeders liegen. Die Abbildung derselben Halbebene Z auf dessen drei Scheiteldreiecke wird durch die Functionen

$$s_2(Z) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial H}{\partial \eta_1}}, \qquad s_3(Z) = -\frac{\frac{\partial T}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial T}{\partial \eta_1}}, \qquad s_4(Z) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial f}{\partial \eta_1}}$$

vermittelt.*)

Bildet man nun das Doppelverhältniss

$$D = \frac{(s_1 - s_2)(s_3 - s_4)}{(s_1 - s_4)(s_3 - s_2)} = \frac{\left(\frac{\eta_1}{\eta_2} + \frac{\frac{\partial H}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial H}{\partial \eta_1}}\right)\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial f}{\partial \eta_1}} - \frac{\frac{\partial T}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial T}{\partial \eta_1}}\right)}{\left(\frac{\eta_1}{\eta_2} + \frac{\frac{\partial f}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial f}{\partial \eta_1}}\right)\left(\frac{\frac{\partial H}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial H}{\partial \eta_1}} - \frac{\frac{\partial T}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial T}{\partial \eta_1}}\right)},$$

so ergiebt sich:

---

*) Man vergl. F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, (Leipzig 1884), p. 68, sowie einen Aufsatz desselben Verfassers: Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder, Math. Ann. Bd. XII, p. 526.

$$D = \frac{20\, H\,.\,(T, f)}{12\, f\,.\,(T, H)},$$

sofern durch (φ, ψ) die Functionaldeterminante von φ und ψ bezeichnet wird. Durch directe Rechnung findet man aber:

$$(T, f) = 2\,.\,3\,.\,5\,.\,H^2, \quad (T, H) = 2^7\,.\,3^3\,.\,5^2\,.\,f^4;$$

daher folgt:

$$D = \frac{H^3}{12^3\,.\,f^5} = Z$$

in Uebereinstimmung mit der Gleichung (4).

Wir kehren zu der Relation (1) zurück, um noch einige weitere Bemerkungen an dieselbe zu knüpfen.

Drückt man die hier auftretenden s-Functionen jeweils durch Quotienten zweier linear unabhängiger Integrale der zugeordneten *hypergeometrischen Differentialgleichung* aus, welche ein zu einem und demselben singulären Punkte gehöriges Fundamentalsystem ausmachen, so erhält man jedesmal eine *quadrilineare Relation zwischen acht F-Functionen* (zwei Gruppen von je vier verwandten), deren Entwickelungen nach derselben Variablen fortschreiten. Diese Relationen fliessen aus derselben Quelle, wie die linearen homogenen Contiguenrelationen in der Darstellung Riemann's.*) In der That beruht die Existenz beider in dem Satze, dass für je zwei verwandte hypergeometrische Differentialgleichungen die Determinante entsprechender Fundamentalsysteme bei passender Wahl der in ihnen noch willkürlichen Constanten und nach Multiplication mit einem geeigneten Factor $z^m(1-z)^n$ eine ganze Function von z darstellt.

Im Falle der Relation (4) hat man als die den Functionen s_1, s_2, s_3, s_4 zugeordneten hypergeometrischen Differentialgleichungen diejenigen zu betrachten, welche aus

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{c_i - (a_i + b_i + 1)\,z}{z(1-z)} \cdot \frac{dw}{dz} - \frac{a_i b_i}{z(1-z)} \cdot w = 0 \tag{6}$$

für die nachstehenden Werthe der Constanten a_i, b_i, c_i hervorgehen:

i	a_i	b_i	c_i
1	α	β	γ
2	α	$\beta+1$	γ
3	α	$\beta+1$	$\gamma+1$
4	$\alpha+1$	$\beta+1$	$\gamma+1$

*) Riemann, Ges. Werke, p. 73, f.

Zur Abkürzung setzen wir:

$$(7)\quad \begin{cases} F_{i,0} \;= F(a_i, b_i, c_i, z), \\ F_{i,\infty} = F\left(b_i, b_i - c_i + 1, b_i - a_i + 1, \frac{1}{z}\right), \\ F_{i,1} \;= F(a_i, b_i, a_i + b_i - c_i + 1, 1 - z), \\ \Phi_{i,0} \;= F(1 - a_i, 1 - b_i, 2 - c_i, z), \\ \Phi_{i,\infty} = F\left(a_i, a_i - c_i + 1, a_i - b_i + 1, \frac{1}{z}\right), \\ \Phi_{i,1} \;= F(c_i - a_i, c_i - b_i, c_i - a_i - b_i + 1, 1 - z) \end{cases}$$

und wählen als die zu den Punkten $z = 0, \infty, 1$ gehörigen Fundamentalsysteme die folgenden particulären Integrale der Differentialgleichung (6):

$$(8)\begin{cases} u_{i,0} = p_{i,0}\, F_{i,0}, & v_{i,0} = q_{i,0}\, z^{1-c_i}(1-z)^{c_i - a_i - b_i}\Phi_{i,0}, \\ u_{i,\infty} = p_{i,\infty}\, z^{-b_i} F_{i,\infty}, & v_{i,\infty} = q_{i,\infty}\, z^{-a_i}\Phi_{i,\infty}, \\ u_{i,1} = p_{i,1}\, F_{i,1}, & v_{i,1} = q_{i,1}\,(1-z)^{c_i - a_i - b_i}\Phi_{i,1}, \end{cases}$$

wobei die Grössen $p_{i,k}$ und $q_{i,k}$ gewisse sogleich näher zu bestimmende Constanten bezeichnen.

Sollen die Functionen $s_i = \frac{u_{i,k}}{v_{i,k}}$ die Relation (4) befriedigen, so ist erforderlich, dass die Substitutionen

$$(9)\quad \begin{cases} u_{i,0} = m_{i,1}\, u_{i,\infty} + m_{i,2}\, v_{i,\infty} = n_{i,1}\, u_{i,1} + n_{i,2}\, v_{i,1}, \\ v_{i,0} = m_{i,3}\, u_{i,\infty} + m_{i,4}\, v_{i,\infty} = n_{i,3}\, u_{i,1} + n_{i,4}\, v_{i,1} \end{cases}$$

für $i = 1, 2, 3, 4$ gleichlautend ausfallen. Setzt man aber zur Abkürzung:

$$M_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta-1)}{\Gamma(\gamma-\beta-1)\,\Gamma(\alpha)}(-1)^{-\beta}, \quad M_2 = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\beta)}(-1)^{-\alpha},$$

$$M_3 = \frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta-1)}{\Gamma(-\beta)\,\Gamma(\alpha-\gamma)}(-1)^{-\beta}, \quad M_4 = \frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)}(-1)^{-\alpha}$$

und

$$N_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta-1)}, \quad N_2 = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)},$$

$$N_3 = \frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(-\alpha)\,\Gamma(-\beta)}, \quad N_4 = \frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)},$$

so haben die Coefficienten der Substitutionen (9), gebildet für die Functionen $\frac{u_{i,k}}{p_{i,k}}$, $\frac{v_{i,k}}{q_{i,k}}$, die folgenden Werthe*):

---

*) Man vergl. Goursat, Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique, (Thèse), Paris 1881, pag. 28, f.

$$
(10)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
m_{11} = M_1 \cdot \dfrac{\alpha-\beta-1}{\beta-\gamma+1}, & m_{21} = M_1, \\[2mm]
m_{31} = M_1 \cdot \dfrac{\gamma}{\gamma-\beta-1}, & m_{41} = M_1 \cdot \dfrac{\gamma(\alpha-\beta-1)}{\alpha(\gamma-\beta-1)}, \\[2mm]
m_{12} = M_2, & m_{22} = M_2 \cdot \dfrac{\beta-\alpha}{\beta}, \\[2mm]
m_{32} = M_2 \cdot \dfrac{\gamma(\alpha-\beta)}{\beta(\alpha-\gamma)}, & m_{42} = M_2 \cdot \dfrac{-\gamma}{\beta}, \\[2mm]
m_{13} = M_3 \cdot \dfrac{(\alpha-\beta-1)(\gamma-1)}{\beta(\alpha-\gamma)}, & m_{23} = M_3 \cdot \dfrac{\gamma-1}{\alpha-\gamma}, \\[2mm]
m_{33} = M_3, & m_{43} = M_3 \cdot \dfrac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\gamma}, \\[2mm]
m_{14} = M_4 \cdot \dfrac{\gamma-1}{\alpha}, & m_{24} = M_4 \cdot \dfrac{(\alpha-\beta)(\gamma-1)}{\alpha(\gamma-\beta-1)}, \\[2mm]
m_{34} = M_4 \; \dfrac{\beta-\alpha}{\alpha}, & m_{44} = M_4; \\[4mm]
n_{11} = N_1 \cdot \dfrac{\gamma-\alpha-\beta-1}{\gamma-\beta-1}, & n_{21} = N_1, \\[2mm]
n_{31} = N_1 \cdot \dfrac{\gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}{(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta-1)}, & n_{41} = N_1 \cdot \dfrac{\gamma}{\gamma-\beta-1}, \\[2mm]
n_{12} = N_2, & n_{22} = N_2 \cdot \dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{\beta}, \\[2mm]
n_{32} = N_2 \cdot \dfrac{\gamma}{\beta}, & n_{42} = N_2 \cdot \dfrac{\gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\alpha\beta}, \\[2mm]
n_{13} = N_3 \cdot \dfrac{(\alpha+\beta-\gamma+1)(\gamma-1)}{\alpha\beta}, & n_{23} = N_3 \cdot \dfrac{\gamma-1}{\alpha}, \\[2mm]
n_{33} = N_3 \cdot \dfrac{\alpha+\beta-\gamma+1}{\alpha}, & n_{43} = N_3, \\[2mm]
n_{14} = N_4 \cdot \dfrac{1-\gamma}{\alpha-\gamma}, & n_{24} = N_4 \cdot \dfrac{(1-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma+1)}, \\[2mm]
n_{34} = N_4, & n_{44} = N_4 \cdot \dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{\alpha-\beta}.
\end{array}
\right.
$$

Führt man jetzt statt der Functionen $\frac{u_{i,k}}{p_{i,k}}$, $\frac{v_{i,k}}{q_{i,k}}$ die Functionen (8) in die Substitutionen (9) ein, so setzen sich die neuen Substitutionscoefficienten aus den Coefficienten (10) und den Grössen $p_{i,k}$ und $q_{i,k}$ in einfachster Weise zusammen. Aus der Forderung aber, dass diese Substitutionen für $i = 1, 2, 3, 4$ gleichlautend ausfallen, ergeben sich zur Bestimmung der $p_{i,k}$ und $q_{i,k}$ 32 in diesen 24 Grössen lineare und homogene Gleichungen, welche überdies noch acht willkürliche Parameter enthalten. Aus der Annahme, dass diese Gleichungen für nicht verschwindende Werthe der $p_{i,k}$ und $q_{i,k}$ mit einander verträglich seien, bestimmen sich weiterhin von den willkürlichen Parametern noch 2, die 6 anderen bleiben beliebig; sie sind im folgenden durch

$\varrho_0, \varrho_\infty, \varrho_1, \sigma_0, \sigma_\infty, \sigma_1$ bezeichnet. Schliesslich erhält man für die $p_{i,k}$ und $q_{i,k}$ folgende Werthe:

$$
(11)\quad \left\{\begin{array}{ll}
p_{1,0} = \gamma\,\varrho_0, & p_{2,0} = \gamma\,\varrho_0, \\
p_{3,0} = (\gamma-\alpha)\,\varrho_0, & p_{4,0} = \alpha\,\varrho_0, \\
q_{1,0} = -\,\beta\,\sigma_0, & q_{2,0} = (\gamma-\beta-1)\,\sigma_0, \\
q_{3,0} = (1-\gamma)\sigma_0, & q_{4,0} = (\gamma-1)\,\sigma_0, \\
p_{1,\infty} = (\alpha-\beta-1)\,\varrho_\infty, & p_{2,\infty} = (\beta-\gamma+1)\,\varrho_\infty, \\
p_{3,\infty} = (\alpha-\gamma)\,\varrho_\infty, & p_{4,\infty} = (\beta-\alpha+1)\,\varrho_\infty, \\
q_{1,\infty} = \beta\,\sigma_\infty, & q_{2,\infty} = (\beta-\alpha)\,\sigma_\infty, \\
q_{3,\infty} = (\beta-\alpha)\sigma_\infty, & q_{4,\infty} = -\,\alpha\,\sigma_\infty, \\
p_{1,1} = (\gamma-\alpha-\beta-1)\,\varrho_1, & p_{2,1} = (\gamma-\beta-1)\,\varrho_1, \\
p_{3,1} = (\gamma-\alpha-\beta-1)\,\varrho_1, & p_{4,1} = \alpha\,\varrho_1, \\
q_{1,1} = \beta\,\sigma_1, & q_{2,1} = (\alpha+\beta-\gamma)\,\sigma_1, \\
q_{3,1} = (\gamma-\alpha)\,\sigma_1, & q_{4,1} = (\alpha+\beta-\gamma)\,\sigma_1.
\end{array}\right.
$$

Nachdem so die willkürlichen Constanten der Fundamentalsysteme in geeigneter Weise bestimmt sind, können die der Gleichung (4) entsprechenden Relationen zwischen den unter (7) aufgeführten F-Functionen ohne Weiteres ausgeschrieben werden. Es sind folgende:

$$
(12)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\gamma(\gamma-\beta-1)F_{1,0}\Phi_{2,0}+\gamma\beta\,(1-z)\,F_{2,0}\Phi_{1,0}}{\gamma(\gamma-1)F_{1,0}\Phi_{4,0}+\alpha\beta z(1-z)F_{4,0}\Phi_{1,0}} \\
\qquad = \dfrac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-1)z\,.\,F_{3,0}\Phi_{2,0}-\gamma(1-\gamma)\,(1-z)F_{2,0}\Phi_{3,0}}{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-1)F_{3,0}\Phi_{4,0}-\alpha(1-\gamma)(1-z)F_{4,0}\Phi_{3,0}}, \\[2ex]
\dfrac{(\alpha-\beta-1)(\alpha-\beta)zF_{1,\infty}\Phi_{2,\infty}+(\beta-\gamma+1)\beta F_{2,\infty}\Phi_{1,\infty}}{(\alpha-\beta-1)\alpha\,.\,F_{1,\infty}\Phi_{4,\infty}-(\alpha-\beta-1)\beta F_{4,\infty}\Phi_{1,\infty}} \\
\qquad = z\cdot\dfrac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)F_{3,\infty}\Phi_{2,\infty}-(\beta-\gamma+1)(\alpha-\beta)F_{2,\infty}\Phi_{3,\infty}}{(\alpha-\gamma)\alpha\left(\frac{1}{z}\right)F_{3,\infty}\Phi_{4,\infty}+(\alpha-\beta-1)(\alpha-\beta)F_{2,\infty}\Phi_{3,\infty}}, \\[2ex]
\dfrac{(\gamma-\alpha-\beta-1)(\alpha+\beta-\gamma)F_{1,1}\Phi_{2,1}-(\gamma-\beta-1)\beta(1-z)F_{2,1}\Phi_{1,1}}{(\gamma-\alpha-\beta-1)(\alpha+\beta-\gamma)F_{1,1}\Phi_{4,1}-\alpha\beta(1-z)F_{4,1}\Phi_{1,1}} \\
\qquad = z\cdot\dfrac{(\gamma-\alpha-\beta-1)(\alpha+\beta-\gamma)F_{3,1}\Phi_{2,1}-(\gamma-\beta-1)(\gamma-\alpha)(1-z)F_{2,1}\Phi_{3,1}}{(\gamma-\alpha-\beta-1)(\alpha+\beta-\gamma)F_{3,1}\Phi_{4,1}-\alpha(\gamma-\alpha)(1-z)F_{4,1}\Phi_{3,1}}.
\end{array}\right.
$$

Diese Relationen (12), welche dadurch ausgezeichnet sind, *dass sie ausser den betrachteten F-Functionen keine von z abhängigen Irrationalitäten enthalten*, lassen sich, wie schon angedeutet, auch durch geeignete Combination der folgenden Gleichungen zusammensetzen:

$$(13)\quad\begin{cases}\gamma(\gamma-\beta-1)\;F_{1,0}\,\Phi_{2,0}\quad+\gamma\beta\,(1-z)\,F_{2,0}\Phi_{1,0}=\gamma(\gamma-1),\\ \gamma(\gamma-1)\;F_{1,0}\,\Phi_{4,0}\quad-\alpha\beta z\,(1-z)\,F_{4,0}\Phi_{1,0}=\gamma(\gamma-1),\\ (\gamma-\alpha)(\gamma-1)\;F_{3,0}\,\Phi_{4,0}-\alpha(1-\gamma)(1-z)\,F_{4,0}\Phi_{3,0}=\gamma(\gamma-1),\\ (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-1)\,z\,F_{3,0}\,\Phi_{2,0}-\gamma(1-\gamma)(1-z)\,F_{2,0}\Phi_{3,0}=\gamma(\gamma-1);\end{cases}$$

$$(14)\quad\begin{cases}(\alpha-\beta-1)(\alpha-\beta)\,F_{1,\infty}\,\Phi_{2,\infty}-(\gamma-\beta-1)\beta\left(\frac{1}{z}\right)F_{2,\infty}\,\Phi_{1,\infty}\\ \qquad=(\alpha-\beta-1)(\alpha-\beta)\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\gamma-\alpha-\beta-1},\\ (\alpha-\beta-1)\;\alpha\,F_{1,\infty}\,\Phi_{4,\infty}\quad-(\alpha-\beta-1)\beta\,F_{4,\infty}\,\Phi_{1,\infty}\\ \qquad=(\alpha-\beta-1)(\alpha-\beta)\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\gamma-\alpha-\beta-1},\\ (\alpha-\gamma)\,\alpha\left(\frac{1}{z}\right)F_{3,\infty}\,\Phi_{4,\infty}-(\alpha-\beta-1)(\beta-\alpha)\,F_{4,\infty}\,\Phi_{3,\infty}\\ \qquad=(\alpha-\beta-1)(\alpha-\beta)\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\gamma-\alpha-\beta-1},\\ (\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)\,F_{3,\infty}\,\Phi_{2,\infty}-(\gamma-\beta-1)(\beta-\alpha)\,F_{2,\infty}\,\Phi_{3,\infty}\\ \qquad=(\alpha-\beta-1)(\alpha-\beta)\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\gamma-\alpha-\beta-1};\end{cases}$$

$$(15)\quad\begin{cases}(\gamma-\alpha-\beta-1)(\alpha+\beta-\gamma)\,F_{1,1}\Phi_{2,1}\quad-(\gamma-\beta-1)\beta\,(1-z)\,F_{2,1}\Phi_{1,1}\\ \qquad=(\gamma-\alpha-\beta-1)(\alpha+\beta-\gamma)\,z^{1-\gamma},\\ (\gamma-\alpha-\beta-1)(\alpha+\beta-\gamma)\,F_{1,1}\Phi_{4,1}\quad-\alpha\beta\,(1-z)\,F_{4,1}\Phi_{1,1}\\ \qquad=(\gamma-\alpha-\beta-1)(\alpha+\beta-\gamma)\,z^{-\gamma},\\ (\gamma-\alpha-\beta-1)(\alpha+\beta-\gamma)\,F_{3,1}\Phi_{4,1}\quad-\alpha(\gamma-\alpha)(1-z)\,F_{4,1}\Phi_{3,1}\\ \qquad=(\gamma-\alpha-\beta-1)(\alpha+\beta-\gamma)\,z^{-\gamma},\\ (\gamma-\alpha-\beta-1)(\alpha+\beta-\gamma)\,F_{3,1}\Phi_{2,1}-(\gamma-\beta-1)(\gamma-\alpha)(1-z)\,F_{2,1}\Phi_{3,1}\\ \qquad=(\gamma-\alpha-\beta-1)(\alpha+\beta-\gamma)\,z^{-\gamma}.\end{cases}$$

Es sind dies Relationen, welche aus dem oben angezogenen Riemann'schen Satze mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten direct hergeleitet werden können. Einige von ihnen finden sich schon bei Gauss vor.

Leipzig, December 1884.

Sur quelques équations différentielles.

(Extrait de deux lettres addressées à Mr. F. Klein).

Par

Francesco Brioschi de Milan.

Soient v_1, v_2 deux intégrales fondamentales de l'équation differentielle de l'icosaèdre:

$$x(x-1)v'' + \frac{1}{6}(7x-4)v' - \frac{11}{3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2}v = 0.$$

On sait qu'en posant $z = v_1 v_2 \sqrt{5}$, et:

$$P = z^{12} + 10z^6 + 5, \quad Q = z^{12} + 4z^6 - 1, \quad R = z^{12} + 22z^6 + 125$$

on a l'équation modulaire Jacobienne pour la transformation du 5^{me} ordre des fonctions elliptiques sous l'une ou l'autre des deux formes:

$$x = \frac{P^3}{12^3 \cdot z^6}, \quad x - 1 = \frac{Q^2 R}{12^3 \cdot z^6}.$$

On connait aussi que toutes les fonctions de z, lesquelles peuvent conduire à une équation modulaire Jacobienne, se divisent en deux types composés chacun de trois fonctions, et que les autres peuvent s'exprimer linéairement par les trois fonctions de l'un ou de l'autre type. J'indiquerai par φ_0, φ_1, φ_2 les fonctions d'un type, par ψ_0, ψ_1, ψ_2 celles de l'autre; et l'on a, comme il est connu:

$$\varphi_0 = z, \quad \varphi_1 = \frac{1}{z}(z^6 - 5), \quad \varphi_2 = (z^6 + 9)z^3,$$

$$\psi_0 = z^3, \quad \psi_1 = \frac{1}{z}(z^6 + 5), \quad \psi_2 = (z^6 + 7)z.$$

Soit maintenant:

$$x^2(x-1)y''' + x(Ax - B)y'' + (Cx - D)y' + Ey = 0$$

une équation différentielle hypergéometrique du troisième ordre et en conséquence:

$$A = 3 + a_1 + a_2 + a_3, \quad C = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2,$$
$$E = a_1 a_2 a_3, \quad B = 1 + b_1 + b_2, \quad D = b_1 b_2.$$

En supposant:

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{2}{3}, \quad b_2 = \frac{1}{3}$$

on peut poser avec Mr. Halphen:

$$a_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3.5}(2r+s), \quad a_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3.5}(2s+r),$$
$$a_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3.5}(s-r).$$

Or on peut démontrer que pour chacune des fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ subsiste une équation différentielle de la forme supérieure, et l'on a:

pour φ_0; $r = s = 1$,	pour ψ_0; $r = 2$, $s = 1$,
„ φ_1; $r = 3$, $s = 1$,	„ ψ_1; $r = 1$, $s = 2$,
„ φ_2; $r = 1$, $s = 3$,	„ ψ_2; $r = s = 2$.

L'équation différentielle du troisième ordre pour ψ_2 a donc la même propriété que celle pour φ_0, c'est-à-dire l'on aura $\psi_2 = u_1 u_2$, u_1, u_2 étant deux intégrales fondamentales d'une équation différentielle du second ordre.

Cette équation est la suivante:

$$x(x-1)u'' + \frac{1}{6}(7x-4)u' - \frac{7.17}{3^2.4^2.5^2}u = 0$$

ou en d'autres termes, étant pour l'équation différentielle de l'icosaèdre $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{1}{5}$, $\nu = \frac{1}{2}$, on a pour celle-ci $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{2}{5}$, $\nu = \frac{1}{2}$.

En conséquence*) si l'on pose:

$$\psi_2 = 2(4^3 - 7.3^3.x)^{\frac{1}{6}}\eta$$

on aura la nouvelle équation modulaire:

$$\xi = \frac{L^3}{12^3.\eta^6}, \quad \xi - 1 = \frac{M^2N}{12^3.\eta^6}$$

L, M, N étant formées avec η, comme P, Q, R avec z, et:

$$\xi = \frac{x(4.\overline{27}^2.x^2 - 7.13.27.x - 7.8^3)^3}{(4^3 - 7.3^3.x)^5}.$$

Des propriétés analogues ont lieu pour les équations différentielles correspondantes aux transformations d'ordre supérieure. . . .

La transformation du septième ordre des fonctions elliptiques conduit à des résultats analogues à ceux que je vous ai communiqué dans ma lettre précédente. On sait qu'en posant $z^2 = -7v_1v_2v_3$; v_1, v_2, v_3

*) Klein, Ueber lineare Differentialgleichungen. Math. Annalen Bd. XII, pag. 176. Brioschi, Sulle equazioni differenziali del tetraedro, dell' ottaedro e dell' icosaedro. Annali di Matematica. Serie II., Tomo X.

étant trois intégrales fondamentales de l'équation différentielle hypergéometrique du troisième ordre:

$$(1) \qquad x^2(x-1)v''' + (ax-b)xv'' + (cx-d)v' + ev = 0$$

dans laquelle:

$$a = 3 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad c = 1 + \sum \alpha_1 + \sum \alpha_2\alpha_3, \quad e = \alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$
$$b = 1 + \beta_1 + \beta_2, \quad d = \beta_1\beta_2$$

on a:

$$\alpha_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3.7}(2r+s), \qquad \alpha_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3.7}(2s+r),$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3.7}(s-r)$$

et:

$$r = 2, \quad s = 1, \quad \beta_1 = \frac{2}{3}, \quad \beta_2 = \frac{1}{3}.$$

En indiquant par P, Q, R les trois polynomes:

$$P = z^8 - 13z^4 + 49, \quad Q = z^8 - 5z^4 + 1, \quad R = z^{16} - 14z^{12} + 63z^8 - 70z^4 - 7$$

l'équation modulâire Jacobienne est dans ce cas:

$$x = -\frac{PQ^3}{12^3 . z^4}, \quad 1 - x = \frac{R^2}{12^3 . z^4}.$$

J'ai donné autrefois les huits expressions de z qui peuvent conduire à d'autres équations modulaires Jacobiennes. Les quatres premières qu'on pourrait nommer *congrédientes* sont:

$$\varphi_0 = z, \; \varphi_1 = z(z^8 - 9z^4 + 18), \; \varphi_2 = \frac{1}{z}(z^8 - 7z^4 + 7),$$
$$\varphi_3 = z^3(z^8 - 11z^4 + 33)$$

et les quatres *contragrédientes:*

$$\psi_0 = z(z^4 - 5), \quad \psi_1 = z(z^{12} - 13z^8 + 52z^4 - 39), \quad \psi_2 = z^3,$$
$$\psi_3 = \frac{1}{z}(z^8 - 7z^4 - 7).$$

Or chacune de ces fonctions satisfait à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre du type que je vais definir.

La forme générale de l'équation différentielle est la suivante:

$$x^2(x-1)^2 z^{IV} + (Ax-B)x(x-1)z''' + (Cx^2 - Dx + E)z'' + (Fx-G)z'$$
$$+ Hz = 0$$

étant:

$$A = 6 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad C = 7 + 3\sum a_1 + \sum a_1a_2,$$
$$F = 1 + \sum a_1 + \sum a_1a_2 + \sum a_1a_2a_3, \quad H = a_1a_2a_3a_4$$

et:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1, \quad B = 4, \quad E = \frac{20}{9},$$
$$D = C + \frac{53}{4.9}, \quad G = -\frac{1}{2}C + F + \frac{323}{8.9}.$$

On pourra donc poser:

$$a_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2.7}c_1, \quad a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2.7}c_2, \quad a_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2.7}c_3,$$
$$a_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2.7}(c_1 + c_2 + c_3)$$

et l'on trouve:

$$\begin{array}{llllll}
\text{pour } \varphi_0: & c_1 = 6, & c_2 = -4, & c_3 = -2, & c_1 + c_2 + c_3 & = 0, \\
\varphi_1: & c_1 = 10, & c_2 = -8, & c_3 = -2, & \text{,,} & = 0, \\
\varphi_2: & c_1 = 5, & c_2 = 3, & c_3 = -1, & \text{,,} & = 7, \\
\varphi_3: & c_1 = 3, & c_2 = -9, & c_3 = -1, & \text{,,} & = -7
\end{array}$$

et pour les fonctions contragrédientes:

$$\begin{array}{llllll}
\text{pour } \psi_0: & c_1 = -6, & c_2 = 4. & c_3 = 2, & c_1 + c_2 + c_3 & = 0, \\
\psi_1: & c_1 = -10, & c_2 = 8, & c_3 = 2, & \text{,,} & = 0, \\
\psi_2: & c_1 = -5, & c_2 = -3, & c_3 = 1, & \text{,,} & = -7, \\
\psi_3: & c_1 = -3, & c_2 = 9, & c_3 = 1, & \text{,,} & = 7.
\end{array}$$

On a donc deux fonctions congrédientes et deux contragrédientes (sans m'occuper pour le moment des combinaisons linéaires qu'on peut former avec les quatre fonctions d'une éspèce et les quatre de l'autre) pour lesquelles $c_1 + c_2 + c_3 = 0$. En conséquence les expressions φ_0^2, φ_1^2; ψ_0^2, ψ_1^2 résultent du produit de trois fonctions homogènes de v_1, v_2, v_3 et chacune de ces fonctions sont intégrales d'équations différentielles du troisième ordre du type supérieur (1).

Milan, le 17 Fevrier et le 10 Mars 1885.

Ueber die Erniedrigung der Ordnung einer Differentialgleichung.

Von

Leo Königsberger in Heidelberg.

Es ist bekanntlich durch Herrn Frobenius gezeigt worden, dass, wenn eine lineare homogene Differentialgleichung

$$(1) \qquad y^{(m)} + f_1 y^{(m-1)} + \cdots + f_{m-1} y' + f_m y = 0,$$

deren Coefficienten hier algebraische Functionen von x sein mögen, mit einer gleichartigen niederer Ordnung

$$(2) \qquad y^{(\mu)} + F_1 y^{(\mu-1)} + \cdots + F_{\mu-1} y' + F_\mu = 0$$

ein Integral gemein hat, welches nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung noch niederer Ordnung angehört, die Ordnung der Differentialgleichung (1) mit Hülfe der linken Seite der Gleichung (2) sich auf die $m - \mu^{\text{te}}$ zurückführen lässt. Der Satz mag hier des Folgenden wegen nur etwas anders ausgesprochen werden, ohne dass derselbe in seinem Inhalte irgendwie geändert wird, und zwar soll, wenn die Differentialgleichung (1) mit der Differentialgleichung (2) μ Fundamentalintegrale $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ derselben gemein hat, erstere vermöge der linken Seite von (2) auf die $m - \mu^{\text{te}}$ Ordnung reducirbar sein — der Beweis leuchtet ohne Weiteres ein, indem, wenn

$$(3) \qquad y^{(\mu)} + F_1 y^{(\mu-1)} + \cdots + F_{\mu-1} y' + F_\mu y = P$$

gesetzt wird, durch successive Differentiation sich die Beziehungen

$$\begin{aligned}
y^{(\mu)} &= P + f_{01} y^{(\mu-1)} + f_{02} y^{(\mu-2)} + \cdots + f_{0\mu} y, \\
y^{(\mu+1)} &= P' + \Phi_1 P \quad + f_{11} y^{(\mu-1)} + f_{12} y^{(\mu-2)} + \cdots + f_{1\mu} y, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y^{(m)} &= P^{(m-\mu)} + \Omega_1 P^{(m-\mu-1)} + \cdots + \Omega_{m-\mu} P + f_{m-\mu\,1} y^{(\mu-1)} \\
&\qquad + f_{m-\mu\,2} y^{(\mu-2)} + \cdots + f_{m-\mu\,\mu} y
\end{aligned}$$

mit gleichartigen Coefficienten ergeben und durch Einsetzen dieser Werthe in (1)

$$(4)\qquad P^{(m-\mu)} + L_1 P^{(m-\mu-1)} + \cdots + L_{m-\mu} P + \omega_1 y^{(\mu-1)} + \omega_2 y^{(\mu-2)} + \cdots + \omega_\mu y = 0$$

folgt. Da aber $y = y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ der Gleichung (1) also auch der Gleichung (4) genügen und für diese Functionen von x $P = 0$ wird, so müssen die Gleichungen bestehen

$$\omega_1 y_1^{(\mu-1)} + \omega_2 y_1^{(\mu-2)} + \cdots + \omega_\mu y_1 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega_1 y_\mu^{(\mu-1)} + \omega_2 y_\mu^{(\mu-2)} + \cdots + \omega_\mu y_\mu = 0,$$

und hieraus folgt, da wegen der Annahme, dass $y_1, \ldots, y_\mu$ Fundamentalintegrale von (2) sind, die Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots y_\mu \\ y_1' & y_2' & \cdots y_\mu' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(\mu-1)} & y_2^{(\mu-1)} & \cdots y_\mu^{(\mu-1)} \end{vmatrix}$$

nicht verschwinden kann, dass $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_\mu = 0$ ist, und die transformirte Differentialgleichung (1) nunmehr lautet

$$(5)\qquad P^{(m-\mu)} + L_1 P^{(m-\mu-1)} + \cdots + L_{m-\mu} P = 0;$$

die Integration dieser Gleichung, von welcher $m - \mu$ Fundamentalintegrale $P_1, P_2, \ldots, P_{m-\mu}$ sein mögen, liefert die zur vollständigen Auflösung von (1) zu integrirende Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung

$$(6)\qquad y^{(\mu)} + F_1 y^{(\mu-1)} + \cdots + F_\mu y = c_1 P_1 + c_2 P_2 + \cdots + c_{m-\mu} P_{m-\mu},$$

in welcher $c_1, c_2, \ldots, c_{m-\mu}$ willkürliche Constanten sind.

Aehnlich sieht man, dass, wenn eine algebraische Differentialgleichung

$$(7)\qquad y^{(m)^\lambda} + \omega_1(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)})\, y^{(m)^{\lambda-1}} + \cdots + \omega_\lambda(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) = 0,$$

worin $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\lambda$ als rationale Functionen von $x, y, \ldots, y^{(m-1)}$ vorausgesetzt werden mögen, mit einer gleichartigen algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung

$$(8)\qquad y^{(\mu)^\delta} + \Omega_1(x, y, y', \ldots, y^{(\mu-1)})\, y^{(\mu)^{\delta-1}} + \cdots + \Omega_\delta(x, y, y', \ldots, y^{(\mu-1)}) = 0$$

ein Integral gemein hat, welches nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung angehört, sich wiederum, wenn

$$(9)\qquad y^{(\mu)^\delta} + \Omega_1(x, y, y', \ldots, y^{(\mu-1)})\, y^{(\mu)^{\delta-1}} + \cdots + \Omega_\delta(x, y, y', \ldots, y^{(\mu-1)}) = P$$

gesetzt wird, durch Differentiation

$$(10)\quad \begin{cases} \left[\delta y^{(\mu)^{\delta-1}} + (\delta-1)\Omega_1 y^{(\mu)^{\delta-2}} + \cdots + \Omega_{\delta-1}\right] y^{(\mu+1)} \\ \qquad\qquad + \varphi_1(x, y, y', \ldots, y^{(\mu)}) \quad = P', \\ \left[\delta y^{(\mu)^{\delta-1}} + (\delta-1)\Omega_1 y^{(\mu)^{\delta-2}} + \cdots + \Omega_{\delta-1}\right] y^{(\mu+2)} \\ \qquad\qquad + \varphi_2(x, y, y', \ldots, y^{(\mu+1)}) = P'', \\ \cdot \\ \left[\delta y^{(\mu)^{\delta-1}} + (\delta-1)\Omega_1 y^{(\mu)^{\delta-2}} + \cdots + \Omega_{\delta-1}\right] y^{(m)} \\ \qquad\qquad + \varphi_{m-\mu}(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) = P^{(m-\mu)} \end{cases}$$

ergiebt, und die Elimination von $y^{\mu}, y^{\mu+1}, \ldots, y^{(m)}$ aus den $m-\mu+2$ Gleichungen (7), (9) und (10) liefert die Gleichung

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(\mu-1)}, P, P', \ldots, P^{(m-\mu)}) = 0$$

oder

$$(11)\quad \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-\mu}} E(x, y, y', \ldots, y^{(\mu-1)}) P^{\alpha_0} P'^{\alpha_1} \ldots P^{(m-\mu)^{\alpha_{m-\mu}}} + G(x, y, y', \ldots, y^{(\mu-1)}) = 0,$$

wenn wir in der Summe die Combination $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-\mu} = 0$ ausschliessen, und E und G ganze Functionen der in den Klammern enthaltenen Grössen bedeuten. Ist nun y_1 das der Voraussetzung nach den beiden Differentialgleichungen (7) und (8) gemeinsame Integral, so wird $y = y_1$ und $P = 0$ der Gleichung (11) genügen, und somit

$$G(x, y, y', \ldots, y^{(\mu-1)}) = 0$$

durch $y = y_1$ befriedigt werden; da aber y_1 nicht einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung genügen sollte, so muss $G(x, y, y', \ldots, y^{(\mu-1)})$ identisch verschwinden, und es wird daher die transformirte Gleichung (7) die Form annehmen

$$(12)\quad \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-\mu}} E(x, y, y', \ldots, y^{(\mu-1)}) P^{\alpha_0} P'^{\alpha_1} \ldots P^{(m-\mu)^{\alpha_{m-\mu}}} = 0.$$

Aber es wird diese Gleichung nicht eine algebraische Differentialgleichung $m-\mu^{\text{ter}}$ Ordnung in der von x abhängigen Grösse P werden, weil im Allgemeinen y und die Ableitungen noch in derselben enthalten sind; denn sei die algebraische Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(13)\quad y'' = F(x, y)$$

gegeben, welche mit der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(14)\quad y' = f(x, y),$$

die in Bezug auf y' mit Adjungirung von x und y algebraisch irreductibel sei, ein nicht algebraisches Integral y_1 gemein haben möge, so werden bekanntlich alle Integrale von (14) der Differentialgleichung (13) genügen, und es wird

$$(15)\quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = F(x, y),$$

weil das gemeinsame Integral nicht algebraisch sein sollte, eine für alle x und y identische Gleichung sein müssen. Setzt man nun

$$y' = f(x, y) + P$$

also

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}(f + P) + P'$$

in die Gleichung (13) ein, so folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f + \frac{\partial f}{\partial y} P + P' = F(x, y)$$

und somit nach (15)

$$P' + \frac{\partial f}{\partial y} P = 0, \tag{16}$$

es müsste sonach, wenn die transformirte Differentialgleichung von y frei sein soll, $\frac{\partial f}{\partial y}$ nur von x abhängen, also die Differentialgleichung (14) die Form haben

$$y' = yf_1(x) + f_2(x)$$

d. h. linear sein, und somit nach (15) auch

$$F(x, y) = yf_1'(x) + f_2'(x) + f_1(x)[yf_1(x) + f_2(x)],$$

somit auch in Bezug auf y vom ersten Grade und die Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung ebenfalls eine lineare sein. Es ist also für algebraische nicht lineare Differentialgleichungen eine wie oben definirte Reduction der Ordnung derselben nicht möglich.

Betrachten wir nun diese Form der Reduction noch von einem anderen Gesichtspunkte. Für eine algebraische Gleichung

$$y^r + f_1(x)y^{r-1} + \cdots + f_r(x) = 0 \tag{17}$$

gilt der Satz, dass, wenn eine Lösung derselben einer gleichartigen irreductibeln algebraischen Gleichung eines niederen Grades ϱ genügt, sich (17) in das Product von zwei gleichartigen Factoren ϱ^{ten} und $r - \varrho^{\text{ten}}$ Grades zerlegen lässt und die Auflösung jener Gleichung somit auf die Auflösung zweier gleichartiger Gleichungen niederen Grades zurückgeführt wird — und dasselbe galt, wie wir oben sahen, für homogene lineare Differentialgleichungen. Aber wir wissen für algebraische Gleichungen weiter, dass, wenn y_1 irgend eine Lösung der Gleichung (17) ist, diese sich mit Adjungirung der Grösse y_1 auf eine algebraische Gleichung $r - 1^{\text{ten}}$ Grades zurückführen lässt; auch dieser Satz gilt bekanntlich für lineare homogene Differentialgleichungen, soll jedoch hier mit einigen Worten so ausgesprochen und bewiesen werden wie der oben hervorgehobene, um uns für allgemeine Differentialgleichungen die richtige Fragestellung zu liefern. Sei wiederum die Gleichung (1) vorgelegt und y_1 irgend ein Integral derselben, so lässt sich in allen Fällen

eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung bilden, welche ebenfalls durch $y = y_1$ befriedigt wird, nämlich

$$(18) \qquad y' - \frac{y_1'}{y_1} y = 0,$$

und setzt man wieder wie oben

$$(19) \qquad y' - \frac{y_1'}{y_1} y = P,$$

so folgt

$$y'' + \varphi_1(y_1, y_1', y_1'')y \quad = \varphi_2(y_1, y_1') P + P',$$
$$y''' + \psi_1(y_1, y_1', y_1'', y_1''')y = \psi_2(y_1, y_1', y_1'')P + \psi_3(y_1, y_1')P' + P'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(m)} + \chi_1(y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m)})y = \chi_2(y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m-1)})P$$
$$+ \cdots + \chi_m(y_1, y_1')P^{(m-2)} + P^{(m-1)},$$

und durch Einsetzen dieser Werthe in (1) ergiebt sich die Gleichung

$$(20) \quad P^{(m-1)} + \Omega_1(x, y_1, y_1')P^{(m-2)} + \Omega_2(x, y_1, y_1', y_1'')P^{(m-3)} + \cdots$$
$$+ \Omega_{m-1}(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m-1)})P + \Omega(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m)}).y = 0.$$

Da nun $y = y_1$ und $P = 0$ diese Gleichung befriedigen müssen, so folgt, dass

$$\Omega(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m)})$$

identisch Null sein muss, und wir erhalten somit die mit Hülfe eines particulären Integrales reducirte Differentialgleichung $m - 1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(21) \quad P^{(m-1)} + \Omega_1(y_1, y_1')P^{(m-2)} + \Omega_2(y_1, y_1', y_1'')P^{(m-3)}$$
$$+ \cdots + \Omega_{m-1}(y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m-1)})P = 0;$$

es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass der aus der Gleichung (19) sich ergebende Ausdruck

$$(22) \qquad y = y_1 \int \frac{P}{y_1} dx$$

sich nur unwesentlich von der bekannten Lagrange'schen Substitution unterscheidet.

Sind λ Integrale der Differentialgleichung (1) $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$ bekannt, von denen vorausgesetzt wird, dass sie zu einem Fundamentalsystem gehören können, so kann man wieder unmittelbar eine lineare homogene Differentialgleichung λ^{ter} Ordnung bilden

$$(23) \qquad y^{(\lambda)} + \varphi_1 y^{(\lambda-1)} + \varphi_2 y^{(\lambda-2)} + \cdots + \varphi_\lambda y = 0,$$

welche diese Integrale besitzt, indem sich aus den Gleichungen

$$y_1^{(\lambda)} + \varphi_1 y_1^{(\lambda-1)} + \varphi_2 y_1^{(\lambda-2)} + \cdots + \varphi_\lambda y_1 = 0,$$
$$y_2^{(\lambda)} + \varphi_1 y_2^{(\lambda-1)} + \varphi_2 y_2^{(\lambda-2)} + \cdots + \varphi_\lambda y_2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_\lambda^{(\lambda)} + \varphi_1 y_\lambda^{(\lambda-1)} + \varphi_2 y_\lambda^{(\lambda-2)} + \cdots + \varphi_\lambda y_\lambda = 0$$

für $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\lambda$ die Werthe ergeben

$$\varphi_r = \begin{vmatrix} y & y_1 & \ldots y_\lambda \\ y_1' & y_2' & \ldots y_\lambda' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(\lambda-r-1)} & y_2^{(\lambda-r-1)} & \ldots y_\lambda^{(\lambda-r-1)} \\ y_1^{(\lambda)} & y_2^{(\lambda)} & \ldots y_\lambda^{(\lambda)} \\ y_1^{(\lambda-r+1)} & y_2^{(\lambda-r+1)} & \ldots y_\lambda^{(\lambda-r+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(\lambda-1)} & y_2^{(\lambda-1)} & \ldots y_\lambda^{(\lambda-1)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y & y_1 & \ldots y_\lambda \\ y_1' & y_2' & \ldots y_\lambda' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(\lambda-1)} & y_2^{(\lambda-1)} & \ldots y_\lambda^{(\lambda-1)} \end{vmatrix},$$

welche sämmtlich endlich sind, da unter der Voraussetzung, dass $y_1, \ldots, y_\lambda$ Integrale eines Fundamentalsystems sein sollen, die Determinante des Nenners nicht verschwinden kann. Setzt man nun wieder

$$y^{(\lambda)} + \varphi_1 y^{(\lambda-1)} + \cdots + \varphi_\lambda y = P, \tag{24}$$

so ergeben sich durch Differentiation die Ausdrücke

$$(25)\quad \begin{cases} y^{(\lambda+1)} + \psi_1 y^{(\lambda-1)} + \psi_2 y^{(\lambda-2)} + \cdots + \psi_\lambda y = P' + \psi_{\lambda+1} P, \\ y^{(\lambda+2)} + \chi_1 y^{(\lambda-1)} + \chi_2 y^{(\lambda-2)} + \cdots + \chi_\lambda y = P'' + \chi_{\lambda+1} P' + \chi_{\lambda+2} P, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y^{(m)} + \omega_1 y^{(\lambda-1)} + \omega_2 y^{(\lambda-2)} + \cdots + \omega_\lambda y = P^{(m-\lambda)} + \omega_{\lambda+1} P^{(m-\lambda-1)} \\ \qquad + \omega_{\lambda+2} P^{(m-\lambda-2)} + \cdots + \omega_m P, \end{cases}$$

worin die Art der Zusammensetzung der Grössen $\psi_1, \ldots, \chi_1, \ldots, \omega_1, \ldots$ aus den λ particulären Integralen $y_1, \ldots, y_\lambda$ und deren Ableitungen unmittelbar ersichtlich ist. Setzt man die durch (24) und (25) gelieferten Ausdrücke für $y^{(\lambda)}, y^{(\lambda+1)}, \ldots, y^{(m)}$ in die Differentialgleichung (1) ein, so folgt

$$(26)\quad P^{(m-\lambda)} + \Omega_1 \begin{pmatrix} & x, & \\ y_1, & y_2, & \ldots, y_\lambda \\ y_1', & y_2', & \ldots, y_\lambda' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(\lambda)}, & y_2^{(\lambda)}, & \ldots, y_\lambda^{(\lambda)} \end{pmatrix} P^{(m-\lambda-1)}$$

$$+ \Omega_2 \begin{pmatrix} & x, & \\ y_1, & y_2, & \ldots, y_\lambda \\ y_1', & y_2', & \ldots, y_\lambda' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(\lambda+1)}, & y_2^{(\lambda+1)}, & \ldots, y_\lambda^{(\lambda+1)} \end{pmatrix} P^{(m-\lambda-2)} + \cdots$$

$$\cdots + \Omega_{m-\lambda-1} \begin{pmatrix} & x, & \\ y_1, & y_2, & \ldots, y_\lambda \\ y_1', & y_2', & \ldots, y_\lambda' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(m-2)}, & y_2^{(m-2)}, & \ldots, y_\lambda^{(m-2)} \end{pmatrix} P' + \Omega_{m-\lambda} \begin{pmatrix} & x, & \\ y_1, & y_2, & \ldots, y_\lambda \\ y_1', & y_2', & \ldots, y_\lambda' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(m-1)}, & y_2^{(m-1)}, & \ldots, y_\lambda^{(m-1)} \end{pmatrix} P = 0,$$

indem, weil $y = y_1$, $P = 0$; $y = y_2$, $P = 0$; ...; $y = y_\lambda$, $P = 0$ der transformirten Differentialgleichung genügen müssen, der zur linken Seite von (26) noch hinzutretende Ausdruck der transformirten Gleichung

$$L_1 y^{(\lambda-1)} + L_2 y^{(\lambda-2)} + \cdots + L_{\lambda-1} y' + L_\lambda y$$

durch $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$ identisch Null werden müsste, und da die schon oben erwähnte Determinante vermöge der gemachten Voraussetzung nicht Null werden kann, $L_1 = L_2 = \cdots = L_\lambda$ identisch verschwinden müssen. Es liefert somit das schon oben angewandte Princip die reducirte Differentialgleichung genau wie bei algebraischen Gleichungen.

Dass für nicht lineare algebraische Differentialgleichungen eine solche Reduction vermöge des linearen Differentialausdruckes

$$y' - \frac{y_1'}{y_1} y = P, \tag{27}$$

in welchem y_1 ein Integral der algebraischen Differentialgleichung höheren Grades ist, nicht möglich sein wird, geht schon daraus hervor, dass die Gleichung (27) für eine bestimmte Function P eine einfach unendliche Reihe von Integralen liefert, deren Constante mit dem particulären Integrale der zugehörigen linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung fest verbunden ist, während dies für keine unendliche Reihe particulärer Integrale der algebraischen Differentialgleichung der Fall zu sein braucht. Dass aber auch nicht etwa durch passend gewählte nicht lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, welche mit der algebraischen Differentialgleichung höheren Grades ein Integral gemein haben, eine derartige Reduction der Ordnung möglich ist, geht aus den zur Existenz der Gleichung (12) oben gemachten Bemerkungen unmittelbar hervor.

Heidelberg, im Januar 1885.

Ueber einige besondere homogene lineare Differentialgleichungen.

Von

Adolf Hurwitz in Königsberg i. Pr.

1.

Eine gelegentlich von Herrn Klein*) berührte Aufgabe, welche die Herstellung einer gewissen mit der Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen im Zusammenhang stehenden Differentialgleichung verlangt, hat neuerdings in einer Note des Herrn Halphen**) ihre Erledigung gefunden. Im Folgenden möchte ich eine zweite Lösung desselben Problemes entwickeln, welche die verlangte Differentialgleichung in expliciter Form liefert und unmittelbar die Verallgemeinerung auf einen beliebigen Transformationsgrad gestattet.

Unter Beibehaltung der von Herrn Klein gebrauchten Bezeichnungen lässt sich die in Rede stehende Aufgabe — ganz abgesehen von ihrem Zusammenhange mit dem Transformationsprobleme — folgendermassen präcisiren.

Es seien

$$\lambda : \mu : \nu$$

Verhältnissgrössen, zwischen denen die Gleichung

$$(1) \qquad F \equiv \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$$

besteht. Ferner werde

$$(2) \qquad J = -\frac{C^3}{12^3 \cdot \nabla^7}$$

gesetzt, wo

$$\nabla \equiv 5\lambda^2\mu^2\nu^2 - (\lambda^5\nu + \nu^5\mu + \mu^5\lambda)$$

die (mit einem passenden Zahlenfactor versehene) Hesse'sche Determinante von F,

$$C = \lambda^{14} + \mu^{14} + \nu^{14} + \cdots$$

*) Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen. Diese Annalen Bd. XIV, pag. 455.

**) Sur une équation différentielle du troisième ordre. Diese Annalen Bd. XXIV, pag. 461.

die mit den Differentialquotienten $\frac{\partial \nabla}{\partial \lambda}, \frac{\partial \nabla}{\partial \mu}, \frac{\partial \nabla}{\partial \nu}$ geränderte Hesse'sche Determinante bedeutet.

Nun weiss man, dass die 168 Werthsysteme

$$\lambda : \mu : \nu,$$

welche vermöge der Gleichungen (1) und (2) zu einem gegebenen Werthe von J gehören, durch geeignete lineare Transformationen aus einem dieser Werthsysteme hervorgehen.*) Es muss folglich möglich sein eine homogene lineare Differentialgleichung 3^{ter} Ordnung mit J als unabhängiger Veränderlichen herzustellen, welche rationale Coefficienten besitzt und von welcher drei passend gewählte Particularlösungen sich wie

$$\lambda : \mu : \nu$$

verhalten. Die Aufgabe ist, eine solche Differentialgleichung zu bilden.

Zu dem Ende betrachte ich drei linear-unabhängige Integrale erster Gattung der Curve

$$\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0.$$

Dieselben mögen mit

$$J_1, J_2, J_3$$

bezeichnet und so gewählt werden, dass

$$dJ_1 : dJ_2 : dJ_3 = \lambda : \mu : \nu \tag{3}$$

ist. Durchläuft J in seiner Ebene irgend einen geschlossenen Weg, so erfahren die Verhältnisse

$$\lambda : \mu : \nu$$

und also auch die Grössen

$$y_1 = \frac{dJ_1}{dJ}, \quad y_2 = \frac{dJ_2}{dJ}, \quad y_3 = \frac{dJ_3}{dJ} \tag{4}$$

eine lineare Substitution. Da diese Grössen überdies algebraische Functionen von J sind, deren Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkte bei $J = \infty$, $J = 0$, $J = 1$ liegen, so sind sie die Lösungen einer Differentialgleichung von folgender Form**):

$$\frac{d^3y}{dJ^3} + \frac{aJ+b}{J(J-1)}\frac{d^2y}{dJ^2} + \frac{a'J^2+b'J+c'}{J^2(J-1)^2}\frac{dy}{dJ} + \frac{a''J^3+b''J^2+c''J+d''}{J^3(J-1)^3}y=0, \tag{5}$$

in welcher nunmehr die Coefficienten $a, b, \ldots$ zu bestimmen sind.

---

*) Den Beweis der obigen Angaben sehe man bei Klein, l. c.

**) Fuchs, „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten." Crelle's Journal, Bd. 66, pag. 139–148, oder auch Bd. 68, pag. 354 ff.

Man vergleiche auch die denselben Gegenstand betreffenden Abhandlungen von Thomé, Crelle's Journal Bd. 74, p. 200 und Frobenius, Crelle's Journal, Bd. 76, pag. 214.

Aus der citirten Abhandlung des Herrn **Klein** geht hervor, dass die Riemann'sche Fläche, welche die Verzweigung von y_1, y_2, y_3 in Bezug auf J darstellt, bei

$$J=\infty, \quad J=0, \quad J=1$$

so verzweigt ist, dass bezüglich

je 7, je 3, je 2

Blätter im Cyklus zusammenhängen.

Die Anfangsexponenten in den Entwicklungen der Fundamentalintegrale der Gleichung (5), werden daher die Werthe

$$\frac{\alpha_1}{7}+1, \quad \frac{\alpha_2}{7}+1, \quad \frac{\alpha_3}{7}+1 \quad \text{für} \quad J=\infty,$$

$$\frac{\beta_1}{3}-1, \quad \frac{\beta_2}{3}-1, \quad \frac{\beta_3}{3}-1 \quad \text{für} \quad J=0,$$

$$\frac{\gamma_1}{2}-1, \quad \frac{\gamma_2}{2}-1, \quad \frac{\gamma_3}{2}-1 \quad \text{für} \quad J=1,$$

besitzen. Dabei sind die ganzen Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$$

nothwendig *positiv*, weil $\int y\, dJ$ eine überallendliche Function von J vorstellt. Ferner kann offenbar

$$(6) \qquad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3; \quad \beta_1 > \beta_2 > \beta_3; \quad \gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$$

angenommen werden. Nun ist nach einem allgemeinen Satze*) nothwendig:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{7}+\frac{\beta_1+\beta_2+\beta_3}{3}+\frac{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}{2}=6.$$

Es folgt hieraus, dass

$$\alpha_1=4, \ \alpha_2=2, \ \alpha_3=1; \quad \beta_1=3, \ \beta_2=2, \ \beta_2=1; \quad \gamma_1=3, \ \gamma_2=2, \ \gamma_3=1$$

ist, denn die letzte Gleichung hat keine andere mit den Bedingungen (6) verträgliche Auflösung.

Die nach Herrn **Fuchs** sogenannten determinirenden Fundamentalgleichungen, welche für die Gleichung (5) lauten:

$$r(r+1)(r+2)-a\,r(r+1)+a'r-a'' \qquad =0$$

$$\text{für } J=\infty,$$

$$r(r-1)(r-2)-b\,r(r-1)+c'r-d'' \qquad =0$$

$$\text{für } J=0,$$

$$r(r-1)(r-2)+(a+b)\,r(r-1)+(a'+b'+c')r+(a''+b''+c''+d'')=0$$

$$\text{für } J=1,$$

---

*) **Fuchs**, l. c.

müssen also bezüglich die Wurzeln

$$\frac{11}{7},\ \frac{9}{7},\ \frac{8}{7};\quad 0,\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3};\quad \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}$$

besitzen. Daraus folgt:

$$(7)\qquad \begin{cases} a = 7,\ a' = 10 + \frac{2}{7};\quad a'' = 2 + \frac{2}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3}, \\ b = -4,\ c' = 2 + \frac{2}{9},\ d' = 0, \\ a' + b' + c' = \frac{3}{4},\ a'' + b'' + c'' + d'' = 0. \end{cases}$$

Eine weitere Bestimmungsgleichung für die Coefficienten der Differentialgleichung (5) ergiebt sich auf folgende Weise:

Bekanntlich können in den zu einem singulären Punkte gehörigen Fundamentalintegralen einer Differentialgleichung Logarithmen auftreten, wenn unter den Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung solche vorhanden sind, welche sich um ganze Zahlen unterscheiden. Bei der hier betrachteten Differentialgleichung tritt nur für $J = 1$ der genannte Fall ein, indem die Differenz der beiden Wurzeln $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ gleich 1 ist.

Die Bedingung dafür, dass *trotzdem* kein Logarithmus auftritt, drückt sich dahin aus, dass der Coefficient von $J - 1$ in der Entwicklung von

$$r(r-1)(r-2) + r(r-1)\frac{aJ+b}{J} + r\cdot\frac{a'J^2+b'J+c'}{J^2} + \frac{a''J^3+b''J^2+c''J+d''}{J^3}$$

nach steigenden Potenzen von $J - 1$, für $r = -\frac{1}{2}$ verschwindet.*) Es muss also

$$\frac{3}{4}b - \frac{1}{2}b' - c' + b'' + 2c'' + 3d'' = 0$$

sein. Die Gleichungen (7) in Verbindung mit der letzten Gleichung reichen zur Bestimmung der Coefficienten $a, b, \ldots$ hin.

Die Ausrechnung ergiebt, dass unsere Differentialgleichung definitiv folgendermassen lautet:

$$(8)\quad J^2(J-1)^2\cdot\frac{d^3y}{dJ^3} + (7J-4)J(J-1)\frac{d^2y}{dJ^2} + \left[\frac{72}{7}(J^2-J) - \frac{20}{9}(J-1) + \frac{3}{4}J\right]\frac{dy}{dJ} + \left[\frac{72\cdot 11}{7^3}(J-1) + \frac{5}{8} + \frac{2}{63}\right]y = 0.$$

*) Vgl. Fuchs, Crelle's Journal, Bd. 68, pag. 374—378. Frobenius, Crelle's Journal, Bd. 76, pag. 224—226.

2.

Der Zusammenhang der soeben entwickelten Differentialgleichung mit der Gleichung des Herrn Halphen ergiebt sich auf folgende Weise.

Es mögen, wie üblich, g_2, g_3, Δ die Invarianten des elliptischen Integrals von den Perioden ω_1, ω_2 bedeuten, und es besitze

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \omega$$

eine positive zweite Ordinate. Wird nun ω als unabhängige Veränderliche eingeführt, indem man

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{27\,g_3^2}{\Delta} + 1$$

setzt, so darf

$$\lambda = \Delta . z_1(\omega_1, \omega_2), \quad \mu = \Delta . z_2(\omega_1, \omega_2), \quad \nu = \Delta . z_4(\omega_1, \omega_2)$$

angenommen werden, wobei

$$z_\alpha(\omega_1, \omega_2) = (-1)^{\alpha+1} \sqrt{\frac{14\pi}{\omega_1}} \cdot \frac{q^{\frac{\alpha^2}{7}}}{(\sqrt[8]{\Delta})^7} \cdot \vartheta_1(\alpha\omega\pi, q^7) \quad (q = e^{i\pi\omega})$$

ist.*) Bei dieser Wahl der λ, μ, ν wird die Hesse'sche Determinante ∇ eine homogene Function $-$ 12ter Dimension von ω_1, ω_2, welche bei allen linearen ganzzahligen Transformationen der Determinante 1 ungeändert bleibt. Da ∇ für $\omega = i\infty$ verschwindet, so folgt**)

$$\nabla = c . \Delta.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich

$$C = c' . g_2 . \Delta^2,$$
$$K = c'' . g_3 . \Delta^3,$$

wo K wie bei Herrn Klein die Functionaldeterminante von f, ∇, C bedeutet und wo c, c', c'' numerische Coefficienten bezeichnen.

Es stellen nun ferner, wie ich in der Abhandlung: Ueber Relationen zwischen Classenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante (diese Annalen Bd. XXV, pag. 183—185) gezeigt habe, die Integrale

$$\int \Delta . z_\alpha(\omega_1, \omega_2) \cdot \frac{d\omega}{\omega_1^2}$$

*) Klein, „Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Function", Diese Annalen, Bd. XVII, pag. 569, und „Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe", Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften vom 14. November 1884, pag. 71.

**) Siehe meine Abhandlung über elliptische Modulfunctionen, Bd. XVIII dieser Annalen, pag. 555.

überall endliche Integrale der Curve

$$f \equiv \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$$

vor, und es werden also die nach J genommenen Ableitungen derselben

$$\Delta \cdot z_\alpha(\omega_1, \omega_2) \cdot \frac{1}{\omega_1^2} \frac{d\omega}{dJ} = \frac{i\pi}{9} \cdot \frac{\Delta^2 z_\alpha}{g_2^2 g_3} \text{*)}$$

particuläre Integrale unserer Differentialgleichung (8).

Die von Herrn Halphen aufgestellte Differentialgleichung hat dagegen die Lösungen

$$\left(\frac{K}{\nabla^4}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \Delta z_\alpha = \text{const.} \left(\frac{g_3}{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \Delta z_\alpha,$$

welche sich von denen der Gleichung (8) durch den Factor

$$\text{const.} \frac{\Delta}{g_2^2 g_3} \cdot \left(\frac{\Delta}{g_3}\right)^{\frac{1}{3}} = \text{const.} [J(J-1)]^{-\frac{2}{3}}$$

unterscheiden.

Man geht also von der Differentialgleichung (8) *durch die Substitution*

$$y = [J(J-1)]^{-\frac{2}{3}} \cdot y'$$

zu der Gleichung des Herrn Halphen über, wo y' die abhängige Variable der Halphen'schen Gleichung bezeichnet.

Es sei noch bemerkt, dass Herr Brioschi (in den Annali di Matematica, ser. II, Bd. 12, pag. 65) auf rechnerischem Wege diejenige Differentialgleichung aufgestellt hat, welcher die Grösse

$$\frac{z_\alpha}{\sqrt[6]{\Delta^5}}$$

genügt. Offenbar wird man von unserer Gleichung aus durch die Substitution

$$y = \frac{\Delta^2 z_\alpha}{g_2^2 g_3} \cdot \frac{\sqrt[6]{\Delta^5}}{z_\alpha} \cdot \bar{y} = (J-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot J^{-\frac{2}{3}} \cdot \bar{y}$$

zu der Gleichung des Hrn. Brioschi gelangen.

---

*) Es ist hier die Relation

$$\frac{dJ}{d\omega} = \frac{9}{i\pi} \omega_1^2 \cdot \frac{g_2^2 g_3}{\Delta}$$

herangezogen, welche ich Bd. XVIII dieser Annalen, pag. 560 abgeleitet habe. Man beachte nur, dass dort ω_1 und ω_2 zu vertauschen ist, wenn man zu der hier gewählten Bezeichnung übergehen will.

3.

Es ist soeben davon Gebrauch gemacht, dass die Integrale

$$J_1, J_2, J_3$$

identisch sind mit den von mir (diese Annalen Bd. XXV, pag. 183 ff.) betrachteten Integralen erster Gattung 7[ter] Stufe.*) An dieser Stelle habe ich auch gezeigt, dass sich die Integrale in Potenzreihen von $q = e^{i\pi\omega}$ von sehr einfachem Bildungsgesetz entwickeln lassen. Zieht man diese Entwicklungen heran, so kann man, da die Differentialgleichung (8) die Integrale $\frac{dJ_1}{dJ}$, $\frac{dJ_2}{dJ}$, $\frac{dJ_3}{dJ}$ besitzt, folgenden Satz aussprechen:

„*Die homogene lineare Differentialgleichung vierter Ordnung*

$$J^2(J-1)^2\cdot\frac{d^4y}{dJ^4}+(7J-4)J(J-1)\frac{d^3y}{dJ^3}$$
$$+\left[\frac{72}{7}(J^2-J)-\frac{20}{9}(J-1)+\frac{3}{4}J\right]\frac{d^2y}{dJ^2}$$
$$+\left[\frac{72.11}{7^3}(J-1)+\frac{5}{8}+\frac{2}{63}\right]\frac{dy}{dJ}=0$$

lässt sich in folgender Weise integriren:

Man setze

$$J=\frac{g_2^3}{\Delta}=\frac{\left[\frac{1}{12}+20\sum n^3\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right]^3}{q^2[\Pi(1-q^{2n})]^{24}},$$

so stellt der Ausdruck

$$y=c_1J_1+c_2J_2+c_4J_4+c$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung vor, wo

$$J_\alpha=\sum_m\frac{\psi(m)}{m}q^{\frac{2m}{7}}$$

*) Beiläufig möge hier das Resultat einer nach anderer Richtung gehenden Untersuchung Platz finden: Es lassen sich drei linear unabhängige (Normal-)Integrale 7[ter] Stufe U_1, U_2, U_3 herstellen, deren simultane Periodensysteme sich aus den folgenden zusammensetzen:

$$\left.\begin{array}{l}U_1:\ 1,\ 0,\ 0,\quad \tau,\quad \tau-1,\quad -\tau\\ U_2:\ 0,\ 1,\ 0,\ \tau-1,\quad -\tau,\qquad \tau\\ U_3:\ 0,\ 0,\ 1,\quad -\tau,\qquad \tau,\quad \tau-1\end{array}\right\},\quad \tau=\frac{1+i\sqrt{7}}{4}.$$

Es ist hieraus ersichtlich, dass jedes dieser Integrale ein elliptisches ist. Das Criterium, welches Frau Kowalewsky für die Reduction eines Abel'schen Integrales vom Geschlechte 3 auf ein elliptisches gegeben hat (Acta mathematica, Bd. 4, pag. 406) findet hier im Hinblick auf die von Herrn Klein entwickelten Eigenschaften der Curve

$$\lambda^3\mu+\mu^3\nu+\nu^3\lambda=0$$

seine Bestätigung.

ist, die Summe erstreckt über alle positiven Zahlen m, welche congruent α (mod. 7) *sind. Dabei bedeutet $\psi(m)$ die Summe*

$$\tfrac{1}{2}\sum\left(\tfrac{r}{7}\right)\cdot r$$

genommen über alle Lösungen der Gleichung

$$4m = r^2 + 7s^2$$

in positiven oder negativen ganzen Zahlen r, s."

Man hat hier also ein neues vollständig durchgeführtes Beispiel für jene Integration der Differentialgleichungen durch eindeutige Functionen, auf welche Herr Poincaré in seinen Abhandlungen über Functionen mit linearen Transformationen in sich verschiedentlich hingewiesen hat.

4.

Schliesslich möchte ich noch einige Bemerkungen über die Verallgemeinerung der vorstehenden Entwicklungen auf einen beliebigen Transformationsgrad (beliebige „Stufe") hinzufügen.

Die Integrale erster Gattung n^{ter} Stufe werden am zweckmässigsten definirt als solche eindeutige überall endliche Functionen $F(\omega)$ von ω, welche die in der Gleichung

$$F\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = F(\omega) + \text{const.}$$

ausgesprochene Eigenschaft besitzen. Hier bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen, welche nur den Bedingungen

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$
$$\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv 1 : 0 : 0 : 1 \pmod{n}$$

unterworfen sind. Es ergiebt sich, dass alle diese Functionen als lineare Combinationen von p derselben darstellbar sind, wo p eine leicht aus n zu berechnende Zahl bedeutet. Denn jene Functionen sind offenbar nichts Anderes, als die Abel'schen Integrale erster Gattung, welche zu der Galois'schen Resolvente der Modulargleichung des n^{ten} Transformationsgrades gehören.

Wie im Falle $n = 7$, welcher oben ausführlich behandelt wurde, so gilt auch im Allgemeinen der Satz, dass die nach der absoluten Invariante J genommenen Ableitungen der Integrale n^{ter} Stufe die Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung p^{ter} Ordnung mit J als unabhängiger Veränderlichen und den singulären Punkten $J = 0, 1, \infty$ sind.

Diese Differentialgleichung gehört selbstverständlich in die von Herrn Fuchs aufgestellte Classe. Die Bildung der Gleichung kann in den Fällen $n = 6$ und $n = 8$ auf einem ähnlichen Wege ausgeführt

werden, wie er oben für $n=7$ befolgt ist. Es ergiebt sich für $n=6$ der Werth $p=1$ und die zugehörige Differentialgleichung lautet:

$$J(J-1)\frac{dy}{dJ}+\frac{7J-4}{6}\cdot y=0.$$

Für $n=8$ wird $p=3$. Indem ich hier die in meiner Note: „Zur Theorie der Modulargleichungen" (Göttinger Nachrichten, 21. November 1883)*) aufgestellten Entwicklungen der Integrale 8^{ter} Stufe heranziehe, erhalte ich den Satz:

Die Differentialgleichung:

$$J^2(J-1)^2\frac{d^4y}{dJ^4}+(7J-4)\,J\,(J-1)\frac{d^3y}{dJ^3}$$
$$+\left[\frac{657}{64}(J^2-J)-\frac{20}{9}(J-1)+\frac{3}{4}J\right]\frac{d^2y}{dJ^2}$$
$$+\left[\frac{9.5.13}{2^8}(J-1)+\frac{8}{9}-\frac{63}{2^8}\right]\frac{dy}{dJ}=0$$

kann folgendermassen integrirt werden:

Man setze

$$J\equiv\frac{\left[\frac{1}{12}+20\sum n\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right]^3}{q^2[\Pi(1-q^{2n})]^{24}},$$

so stellt der Ausdruck

$$c_1\,.\,i(q)+c_2\,j(q)+c_3[i(q^2)-j(q^2)]+c_4$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung vor, wo

$$i(q),\ j(q)=\sum_m\frac{\Omega(m)}{m}q^{\frac{m}{4}}$$

ist, die Summe erstreckt über alle positiven Zahlen m, welche congruent 1, *bezüglich congruent* 5 (mod. 8) *sind. Dabei bedeutet* $\Omega(m)$ *die Summe*

$$\frac{1}{2}\sum\left(\frac{-1}{\nu}\right)\cdot\nu$$

genommen über alle Lösungen der Gleichung

$$m=(\pm 2\mu)^2+\nu^2$$

in ganzen nicht negativen Zahlen μ, ν."

Was endlich den Fall einer höheren Stufe $n>8$ angeht, auf welchen ich demnächst zurückkommen möchte, so sei hier nur bemerkt,

---

*) Die Bezeichnung ist hier etwas modificirt.

dass die zugehörige Differentialgleichung p^{ter} Ordnung im Sinne des Herrn Frobenius*) mehrfach reductibel wird.

So gelingt es für $n = 11$ zum Beispiel die $p = 26$ linear unabhängigen Integrale so zu wählen und in drei Gruppen von 11, 10, 5 Integralen resp. zu zerlegen, dass die nach J genommenen Differentialquotienten der Integrale einer Gruppe Lösungen je einer homogenen linearen Differentialgleichung 11^{ter}, 10^{ter}, 5^{ter} Ordnung resp. werden, wobei die Coefficienten dieser Gleichungen rationale Functionen der unabhängigen Variabeln J sind.

Ein ähnlicher Satz scheint für eine beliebige Stufe Geltung zu haben.

Königsberg i. Pr., Januar 1885.

---

*) Crelle's Journal, Bd. 76, pag. 236 ff.

Ueber Thetafunctionen, die nach einer Transformation in ein Product von Thetafunctionen zerfallen.

Von

Ed. Wiltheiss in Halle.

Bei vielen derjenigen Abelschen Integralen, welche sich auf Abelsche Integrale von niedererem Range zurückführen lassen, kann man unmittelbar eine Substitution angeben, welche gewisse Formen der ursprünglichen Integrale ungeändert lässt, obgleich die betreffenden Integrale niedereren Ranges eine entsprechende Substitution nicht gestatten. So bleibt z. B. das Integral

$$\int \frac{(x^{n-\lambda-2} - x^{\lambda})\, dx}{\sqrt{x^{2n} + ax^{2n-1} + bx^{2n-2} + \cdots + bx^2 + ax + 1}},$$

dessen Reduction Malet (Journal für Mathematik, Bd. 76, S. 97) und Brioschi (Comptes rendus, t. LXXXV, p. 708) gezeigt haben, bei der Substitution

$$x = \frac{1}{\xi}$$

ungeändert. Ferner, wenn das Abel'sche Integral vom Range III reducible wird, so kann man die dem Integral zu Grunde liegende Gleichung auf die Form

$$\sqrt{x_1(px_1 + qx_2)} + \sqrt{x_2(rx_1 + sx_2)} + \sqrt{x_3(x_3 + ax_1 + bx_2)} = 0$$

bringen (vergl. S. v. Kowalevski, Acta mathematica, t. IV, p. 393); da diese Gleichung bei der Substitution

$$x_1 : x_2 : x_3 = \xi_1 : \xi_2 : -(\xi_3 + a\xi_1 + b\xi_2)$$

ungeändert bleibt, so giebt es auch, wie man leicht nachweisen kann, gewisse zugehörige Integrale, welche bei dieser Substitution höchstens ihr Vorzeichen ändern.

Diesen Substitutionen, welche die Integrale ungeändert lassen, entsprechen nun Transformationen der zugehörigen Thetafunctionen, bei welchen die ursprünglichen und die transformirten Parameter der Thetafunctionen einander gleich sind und somit eine sogenannte

complexe Multiplication stattfindet, d. i. eine solche Transformation, welche Frobenius (Journal für Mathematik, Bd. 95, S. 264) eine „principale" nennt. Dies findet nun allgemein, nicht in einzelnen Fällen allein, statt: Sobald eine Thetafunction durch eine Transformation in eine andere Thetafunction übergeführt wird, die in das Product von Thetafunctionen von weniger Variablen zerfällt, (was ja eine Reduction des zur ursprünglichen Thetafunction gehörigen Integrals auf Integrale niedereren Ranges zur Folge hat), so existirt für diese Thetafunction mindestens *eine* principale Transformation. — Dies nun nachzuweisen, diese Transformationen näher zu untersuchen, und sodann aus denselben die Beziehungen herzuleiten, welche zwischen den Parametern der ursprünglichen Thetafunction bestehen, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

Die Parameter der Thetafunctionen will ich in bekannter Weise mit $\tau_{\alpha\beta}$, $(\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha})$ bezeichnen, wo die Indices α und β, wie später auch γ und δ, die Werthe $1, 2, \ldots, \varrho$ anzunehmen haben. Wenn nun $\tau'_{\alpha\beta}$ die transformirten Parameter bedeuten, so hängen diese mit den $\tau_{\alpha\beta}$ durch die Gleichungen

$$(1) \qquad n_{\varrho+\alpha,\beta} + \sum_{\gamma} n_{\varrho+\alpha,\varrho+\gamma}\,\tau'_{\beta\gamma} = \sum_{\gamma} n_{\gamma,\delta}\,\tau_{\alpha\gamma} + \sum_{\gamma,\delta} n_{\gamma,\varrho+\delta}\,\tau_{\alpha\gamma}\tau'_{\beta\delta}$$

zusammen, wobei das System der ganzen Zahlen $n_{\varkappa,\lambda}$ den Bedingungen

$$(2) \qquad \sum_{\varkappa} \zeta_\varkappa \zeta_\lambda n_{\varkappa,\mu}\, n_{\varrho+\varkappa,\varrho+\lambda} = \sum_{\varkappa} \zeta_\varkappa \zeta_\lambda n_{\mu,\varkappa}\, n_{\varrho+\lambda,\varrho+\varkappa} = \begin{cases} n, & \text{für } \lambda = \mu, \\ 0, & \text{für } \lambda \gtrless \mu \end{cases}$$

zu genügen hat, in denen $\varkappa$, λ, μ, wie im folgenden auch ν, die Werthe $1, 2, \ldots, 2\varrho$ annehmen, und sodann die Indices modulo 2ϱ auf die Zahlen $1, 2, \ldots, 2\varrho$ reducirt werden sollen; $\zeta_\varkappa$ soll den Werth $+1$ oder -1 bedeuten, je nachdem $\varkappa \leq \varrho$ oder $\varkappa > \varrho$ ist. Die Zahl n nennt man den Grad der Transformation.

Zugleich mit den Gleichungen (1) bestehen noch die weiteren Gleichungen

$$(3) \qquad \omega_{\alpha\varkappa} = \sum_{\lambda} n_{\varkappa\lambda}\, \omega'_{\alpha\lambda},$$

in denen die $\omega_{\alpha\beta}$ beliebig sind und nur der Bedingung genügen, dass ihre Determinante von Null verschieden ist, während die $\omega_{\alpha,\varrho+\beta}$ durch die Gleichungen

$$(4) \qquad \omega_{\alpha,\varrho+\beta} = \sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma}\tau_{\gamma\beta}$$

bestimmt sind. Die $\omega'_{\alpha\varkappa}$, die dann durch die Gleichungen (3) vollkommen bestimmt sind, hängen mit den $\tau'_{\alpha\beta}$ durch Gleichungen zu-

sammen, die den Gleichungen (4) ganz analog gebildet sind. Diese Transformation will ich entsprechend den Coefficienten $n_{\varkappa\lambda}$ mit (N) bezeichnen.

Es sei jetzt (N') eine andere Transformation mit den Coefficienten $n'_{\varkappa\lambda}$, bei welcher also an Stelle der Gleichungen (3) die Gleichungen

$$\omega'_{\alpha\varkappa} = \sum_{\lambda} n'_{\varkappa\lambda}\,\omega''_{\alpha\lambda} \tag{5}$$

treten. Die aus den beiden Transformationen (N) und (N') zusammengesetzte Transformation, d. i. diejenige Transformation, welche ich erhalte, wenn ich zuerst die Transformation (N) und dann die Transformation (N') ausführe, bezeichne ich mit

$$(N)\,(N') = (M).$$

Und die Coefficienten $m_{\varkappa\lambda}$ dieser Transformation findet man bekanntlich dadurch, dass man aus den Gleichungen (5) die Ausdrücke für $\omega'_{\alpha\varkappa}$ in die Gleichungen (3) einsetzt:

$$m_{\varkappa\lambda} = \sum_{\mu} n_{\varkappa\mu}\,n'_{\mu\lambda}. \tag{6}$$

Ist insbesondere (N') die supplementäre Transformation, die ich mit $(N)^{-1}$ bezeichnen will, d. h. ist

$$n'_{\varkappa\lambda} = \zeta_\varkappa \zeta_\lambda\, n_{\varrho+\lambda,\varrho+\varkappa}, \tag{7}$$

wo $\zeta_\varkappa$ die oben angegebene Bedeutung hat, so ist bei der Zusammensetzung die Reihenfolge ohne Einfluss:

$$(N)(N)^{-1} = (N)^{-1}(N),$$

und das Resultat der Zusammensetzung ist eine Multiplication mit n; denn in beiden Fällen wird zu Folge der Gleichungen (2)

$$m_{\lambda\varkappa} = 0, \quad \text{wenn} \quad \lambda \gtrless \varkappa, \quad m_{\lambda\lambda} = n, \tag{8}$$

so dass die Gleichungen zwischen $\omega_{\alpha\varkappa}$ und $\omega''_{\alpha\varkappa}$ die Form $\omega_{\alpha\varkappa} = n\,\omega''_{\alpha\varkappa}$ annehmen.

Ist ferner N eine principale Transformation, d. h. ist $\tau'_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}$, so kann man bekanntlich den $\omega_{\alpha\beta}$ solche Werthe geben, dass

$$\omega_{\alpha\varkappa} = \mu_\alpha\, \omega'_{\alpha\varkappa} \tag{9}$$

wird. Die Grössen μ_α nennt man die Multiplicatoren der bei dieser Transformation stattfindenden complexen Multiplication, und dieselben sind die Wurzeln der Eliminationsresultante der $\omega'_{\alpha\varkappa}$ aus den Gleichungen $\mu_\alpha \omega'_{\alpha\varkappa} = \sum\limits_{\lambda} n_{\varkappa\lambda}\,\omega'_{\alpha\lambda}$, in welche für den Fall einer principalen Transformation die Gleichungen (3) sich verwandeln. —

Wendet man auf die aus den Grössen $\omega_{\alpha\varkappa}$ gebildeten Thetafunctionen, bei welchen die principale Transformation (N) stattfindet,

irgend eine Transformation (H) an, so findet auch für diese transformirten Thetafunctionen eine principale Transformation statt, und zwar ist dieselbe

$$(H)^{-1}(N)(H),$$

und die Multiplicatoren sind

$$h\mu_\alpha,$$

wenn h der Grad der Transformation (H) bedeutet. Bezeichnet man nämlich die durch die Transformation (H) aus den $\omega_{\alpha\varkappa}$ entstehenden Grössen mit $\overline{\omega}_{\alpha\varkappa}$, so treten durch die Transformation $(H)^{-1}$ an Stelle der $\overline{\omega}_{\alpha\varkappa}$ die Grössen $\frac{1}{h}\,\omega_{\alpha\varkappa}$ (siehe (8)), durch die principale Transformation (N) an Stelle der $\omega_{\alpha\varkappa}$ die Grössen $\frac{1}{\mu_\alpha}\omega_{\alpha\varkappa}$ (vergl. (9)) und endlich durch die Transformation (H) an Stelle der $\omega_{\alpha\varkappa}$ wieder die $\overline{\omega}_{\alpha\varkappa}$; folglich kommen durch die gesammte Transformation $(H)^{-1}(N)(H)$ die Grössen $\frac{1}{h\mu_\alpha}\overline{\omega}_{\alpha\varkappa}$ an Stelle der $\overline{\omega}_{\alpha\varkappa}$ zu stehen. Und damit ist die obige Behauptung erwiesen.

Da eine transformirte Thetafunction durch die supplementäre Transformation wieder in die ursprüngliche zurückgeführt wird, so folgt daraus, dass eine principale Transformation der transformirten Thetafunction auch eine solche der ursprünglichen Thetafunction zur Folge hat. Dies gilt natürlich auch, wenn die transformirte Thetafunction in ein Product von Thetafunctionen mit weniger Variablen zerfällt. Folglich kann man die sämmtlichen principalen Transformationen der ursprünglichen Thetafunction herstellen, sobald man diejenigen der zerfallenden Thetafunction kennt: Ist (P) diejenige Transformation, welche eine Thetafunction in eine zerfallende Thetafunction überführt, ist (H) die principale Transformation der zerfallenden Thetafunction, so findet bei der ursprünglichen Thetafunction die principale Transformation

$$(P)(\mathsf{H})(P)^{-1}$$

statt.

Es handelt sich also darum, die Transformation H herzustellen.

Es sei nun

$$\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_\varrho) = \prod_{\sigma=0}^{h} \vartheta(v_{\nu_\sigma+1}, v_{\nu_\sigma+2}, \ldots, v_{\nu_{\sigma+1}}),$$

wo $\nu_1 = 1$, $\nu_{h+1} = \varrho$ sein soll, die in ein Product von Thetafunctionen zerfallende Thetafunction; dann muss bekanntlich in derselben

$$\tau_{ce} = \tau_{ec} = 0 \tag{10}$$

sein, wenn

$$c > \nu_p \quad \text{und zugleich} \quad e \leq \nu_p, \quad \text{für} \quad p = 1, 2, \ldots, h.$$

Um die principalen Transformationen dieser Thetafunction zu erhalten, lässt man in der Gleichung (1) $\tau'_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}$ werden, setzt für

die $\tau_{\alpha\beta}$ diese speciellen Werthe (10), und bestimmt unter der Voraussetzung, dass die von Null verschiedenen $\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\beta\alpha}$ gegenseitig unabhängig seien, die Coefficienten $n_{\varkappa\lambda}$; die erhaltenen Systeme $n_{\varkappa\lambda}$ geben dann die principalen Transformationen. Nach der Substitution dieser Werthe für $\tau_{\alpha\beta}$ besteht das System der Gleichungen (1) aus Gruppen von der Form:

$$n_{\varrho+i,j}+\sum_s n_{\varrho+i,\varrho+s}\tau_{js}=\sum_r n_{rj}\tau_{ir}+\sum_{rs} n_{r,\varrho+s}\tau_{ir}\tau_{js},$$

wo

$$\nu_k<i\leqq\nu_{k+1},\quad \nu_l<j\leqq\nu_{l+1},\quad \text{für}\quad k,l=0,1,\ldots,h,$$

und die Summation bezüglich r von ν_k+1 bis ν_{k+1}, bezüglich s von ν_l+1 bis ν_{l+1} auszuführen ist. Aus diesen Gleichungen erkennt man, dass erstens, wenn k und l verschieden sind, alle in den betreffenden Gleichungen vorkommenden $n_{\varkappa\lambda}$ Null sein müssen, denn die τ_{js} und τ_{ir} sind sämmtlich verschieden und sollen gegenseitig unabhängig sein, und dass zweitens, wenn $k=l$ ist, die $n_{\varkappa,\lambda}$ auch Null sind mit Ausnahme von $n_{i,i}$ und $n_{\varrho+j,\varrho+j}$, die denselben Werth haben müssen:

$$n_{i,i}=n_{\varrho+j,\varrho+j},\quad \nu_\varkappa<i,j\leqq\nu_{\varkappa+1},$$

denn die in den betreffenden Gleichungen vorkommenden τ_{js} und τ_{ir} sind verschieden, bis auf τ_{ij}, das sowohl als Coefficient von $n_{i,i}$ als auch von $n_{\varrho+i,\varrho+i}$ sich findet. Folglich ist allgemein

$$n_{\varkappa,\lambda}=0,\quad \text{für}\quad \varkappa\gtrless\lambda,$$

$$n_{\varkappa,\varkappa}=n_{\varrho+\varkappa,\varrho+\varkappa}=\mu_f,\quad \text{wenn}\quad \nu_f<\varkappa\leqq\nu_{f+1},\quad \text{für}\quad f=0,1,\ldots,h.$$

Aus den Gleichungen (2) folgt sodann, dass $\mu_f^2=n$, so dass man

$$\mu_f=\varepsilon_f\mu$$

setzen kann, wo μ eine ganze Zahl und

$$\varepsilon_f=+1\quad\text{oder}\quad -1$$

ist. Hieraus ersieht man, dass diese Transformation zusammengesetzt ist aus einer Multiplication mit μ und der linearen Transformation, bei welcher die Coefficienten die folgenden Werthe haben:

$$\eta_{\varkappa,\lambda}=0,\quad \text{für}\quad \varkappa\gtrless\lambda,$$

$$\eta_{\alpha,\alpha}=\eta_{\varrho+\alpha,\varrho+\alpha}=\varepsilon_f,\quad \text{wenn}\quad \nu_f<\alpha\leqq\nu_{f+1},\quad \text{für}\quad f=0,1,\ldots,h.$$

Da hier die Multiplicationen mit ganzen Zahlen nicht in Betracht kommen, so sind diese linearen Transformationen die gesuchten principalen Transformationen der in ein Product von Thetafunctionen zerfallenden Thetafunction, die wir oben mit (H) bezeichnet haben. Die dabei auftretenden Multiplicatoren sind eben diese Grössen $\eta_{\alpha\alpha}=\varepsilon_f=\pm 1$. — Indem man nun dies Resultat zu den Betrachtungen auf Seite 130 hinzunimmt, kann man das Ergebniss in folgender Weise aussprechen:

Transformirt man eine Thetafunction durch die Transformation (P), *und die transformirte Thetafunction zerfällt in ein Product von mehreren Thetafunctionen, so existiren für die ursprüngliche Thetafunction die principalen Transformationen*

$$(P)\,(\mathsf{H})\,(P)^{-1} = (K),$$

und die Multiplicatoren bei denselben sind

$$p\,\eta_{\alpha\alpha} = p\,\varepsilon_f = \pm\, p, \quad \textit{wenn} \quad \nu_f < \alpha \leqq \nu_{f+1}, \quad \textit{für} \quad f = 0, 1, \ldots, h,$$

wo p *den Grad der Transformation* (P) *bedeutet.*

Von diesen principalen, für diese Thetafunction charakteristischen Transformationen *sind* h, *eine weniger als die Anzahl der Thetafunctionen, in welche bei der Transformation die ursprüngliche Thetafunction zerfällt, gegenseitig vollkommen unabhängig und lassen sich nicht auf einander zurückführen.* Denn die sämmtlichen Transformationen (H) lassen sich aus den h speciellen Transformationen (H), bei welchen

$$\varepsilon_0 = -1,\ \varepsilon_1 = \ \ 1,\ \varepsilon_2 = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, \varepsilon_h = 1,$$

bez.

$$\varepsilon_0 = \ \ 1,\ \varepsilon_1 = -1,\ \varepsilon_2 = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, \varepsilon_h = 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_0 = \ \ 1,\ \varepsilon_1 = \ \ 1,\ \varepsilon_2 = 1, \ldots, \varepsilon_{h-1} = 1,\ \varepsilon_h = 1,$$

und der Transformation, bei welcher

$$\varepsilon_0 = -1,\ \varepsilon_1 = -1,\ \varepsilon_2 = -1, \ldots, \varepsilon_h = -1,$$

zusammensetzen. Da nun die letztere Transformation bei jeder Thetafunction möglich ist, so bleiben nur die ersten h Transformationen als für die zerfallende Thetafunction charakteristisch übrig, und diese lassen sich offenbar nicht auf einander zurückführen. Da nun zu jeder Transformation (H) eine besondere Transformation (K) gehört, so giebt es demnach auch genau h wesentlich verschiedene Transformationen (K).

Diese principalen Transformationen (K) sind dadurch ausgezeichnet, dass *sie mit ihren supplementären identisch sind.* Denn wenn man die Transformation (K) einmal ausführt, so treten an Stelle der $\omega_{\alpha\varkappa}$ die Grössen $\dfrac{\omega_{\alpha\varkappa}}{\eta_{\alpha\alpha}p}$, folglich geht beim Wiederholen der Transformation $\omega_{\alpha\varkappa}$ in

$$\left(\frac{1}{\eta_{\alpha\alpha}p}\right)^2 \omega_{\alpha\varkappa} = \frac{1}{p^2}\,\omega_{\alpha\varkappa}$$

über, d. h. es findet eine Multiplication mit p^2 statt. Da nun bekanntlich, wenn von zwei Transformationen, welche nach einander ausgeführt eine Multiplication mit einer ganzen Zahl hervorbringen, eine zu der andern supplementär sein muss, so ist die Transformation (K) zu sich selbst supplementär. — Wenn nun $k_{\varkappa\lambda}$ die Coefficienten der Transforma-

tion (K) sind, so sind $\zeta_\varkappa\,\zeta_\lambda\,k_{\varrho+\lambda,\varrho+\varkappa}$ diejenigen der supplementären Transformation (vergl. (7)), folglich muss hier

$$k_{\varkappa,\lambda}=\zeta_\varkappa\,\zeta_\lambda\,k_{\varrho+\lambda,\varrho+\varkappa}$$

sein, oder:

$$k_{\alpha\beta}=k_{\beta+\varrho,\alpha+\varrho},$$
$$k_{\alpha,\varrho+\alpha}=0,\quad k_{\alpha,\varrho+\beta}=-k_{\beta,\varrho+\alpha},$$
$$k_{\varrho+\alpha,\alpha}=0,\quad k_{\varrho+\alpha,\beta}=-k_{\varrho+\beta,\alpha}.$$

Der Grad der principalen Transformation ist p^2. Denn bei einer zusammengesetzten Transformation ist der Grad gleich dem Producte der Grade der einzelnen Transformationen, aus denen sie zusammengesetzt ist. — Ist aber insbesondere *der Grad von* (P), *d. i.* p, *eine gerade Zahl*, so kann man die Transformation (K) zerlegen in eine Multiplication mit 2 und eine ebenfalls wieder *zu sich supplementären Transformation* (K^0) *vom Grade* $\left(\frac{1}{2}\,p\right)^2$, *die wieder eine principale Transformation der Thetafunction ist, und zwar mit den Multiplicatoren* $\frac{1}{2}\,\eta_{\alpha\alpha}p$. Um dies zu zeigen, will ich die Ausdrücke der $k_{\varkappa\lambda}$ in den Coefficienten $p_{\varkappa\lambda}$ der Transformation (P) angeben, wie sich dieselben aus den Gleichungen (6) mit Hilfe der Bedingungen (2) unmittelbar ergeben: Wenn ich die Annahme mache, dass $\eta_{1,1},\ \eta_{2,2},\ldots,\eta_{g,g}$ diejenigen der Multiplicatoren seien, welche gleich $+1$ sind, während die übrigen $\eta_{g+1,g+1},\ldots,\eta_{\varrho,\varrho}$ den Werth -1 haben, eine Annahme, die ich bekanntlich machen kann, ohne dadurch eine Beschränkung einzuführen, so ist

$$(11)\qquad \begin{aligned} k_{\varkappa,\varkappa}&=p+2\zeta_\varkappa\sum_i\left(p_{\varrho+\varkappa,i}\,p_{\varkappa,\varrho+i}-p_{\varkappa,i}\,p_{\varrho+\varkappa,\varrho+i}\right),\\ k_{\varkappa,\lambda}&=\qquad 2\zeta_\lambda\sum_i\left(p_{\varrho+\lambda,i}\,p_{\varkappa,\varrho+i}-p_{\varkappa,i}\,p_{\varrho+\lambda,\varrho+i}\right),\ \text{für } \lambda\gtrless\varkappa,\end{aligned}$$

wo die Summe bezüglich i von $g+1$ bis zu ϱ auszudehnen ist. Ist nun p eine gerade Zahl, so sind die sämmtlichen Coefficienten $k_{\varkappa\lambda}$ gerade Zahlen, und hieraus folgt, dass die Transformation (K) aus einer Multiplication mit 2 und einer Transformation (K^0) mit den Coefficienten

$$k^0_{\varkappa\lambda}=\frac{1}{2}\,k_{\varkappa\lambda}$$

zusammengesetzt ist. Dass diese Transformation (K^0) eine principale Transformation mit den Multiplicatoren $\frac{1}{2}\,p\,\eta_{\alpha\alpha}$ ist, bedarf wohl kaum noch eines besonderen Beweises.

Der Specialfall dieses Satzes für $p=2$ verdient noch besonders hervorgehoben zu werden: *Wenn durch eine Transformation zweiten Grades eine Thetafunction in eine zerfallende Thetafunction übergeführt*

wird, so existirt für diese Thetafunction eine principale Transformation, die linear ist, und deren Multiplicatoren die Werthe $+1$ *und* -1 *haben.*

Mittelst dieses Satzes kann man leicht diejenigen hyperelliptischen Integrale bestimmen, bei welchen die zugehörigen Thetafunctionen durch eine quadratische Transformation in zerfallende Thetafunctionen übergeführt werden. Einer linearen Transformation der Thetafunctionen entspricht nämlich eine lineare gebrochene Substitution der betreffenden Integrale:

$$x = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}. \tag{12}$$

Der supplementären Transformation entspricht diejenige Substitution, die ich erhalte, wenn ich (12) nach ξ auflöse:

$$\xi = \frac{-\delta x + \beta}{\gamma x - \alpha}.$$

Sollen nun durch eine quadratische Transformation die Thetafunctionen in ein Product von mehreren Thetafunctionen zerfallen, so müssen beide Substitutionen identisch, also $\alpha = -\delta$ und demnach

$$x = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi - \alpha}$$

sein, und diese Substitutionen müssen ferner die Wurzelgrössen in den Integralen ungeändert lassen. Nun kann man diese Substitution, je nachdem $\gamma = 0$ oder $\gamma \gtrless 0$ ist, in der Form

$$\left(\alpha x + \tfrac{1}{2}\beta\right) = -\left(\alpha\xi + \tfrac{1}{2}\beta\right),$$

oder

$$(\gamma x - \alpha) = \frac{\alpha^2 + \beta\gamma}{\gamma\xi - \alpha}$$

schreiben. Und hieraus erkennt man, dass die Wurzelgrössen in den Integralen durch lineare Substitutionen so umgewandelt werden können, dass sie bei der Substitution

$$x' = -\xi' \quad \text{oder} \quad x' = \frac{\varkappa}{\xi'}$$

ungeändert bleiben; sie müssen also eine der folgenden Formen haben:

$$\sqrt{(x-a)(x+a)(x-b)(x+b)\cdots} = \sqrt{R(x^2)}, \tag{13a}$$

$$\sqrt{x(x-a)\left(x-\frac{\varkappa}{a}\right)(x-b)\left(x-\frac{\varkappa}{b}\right)\cdots} = \sqrt{R_1(x)}, \tag{13b}$$

$$\sqrt{(x-a)\left(x-\frac{\varkappa}{a}\right)(x-b)\left(x-\frac{\varkappa}{b}\right)\cdots} = \sqrt{R_2(x)}. \tag{13c}$$

Die beiden letzten Wurzelgrössen lassen sich aber durch die Substitution

$$x = \sqrt{\varkappa}\,\frac{\xi+1}{\xi-1} \tag{14}$$

auf die erstere zurückführen.*) Folglich müssen *die hyperelliptischen Integrale, bei denen die zugehörigen Thetafunctionen durch eine quadratische Transformation in ein Product von Thetafunctionen von weniger Variablen übergeführt werden, durch eine lineare gebrochene Substitution so umgewandelt werden können, dass die Wurzelgrösse nur das Quadrat der Variablen enthält.* — Für Thetafunctionen mit zwei Argumenten ist dies Resultat schon von Königsberger (Journal für Mathematik, Bd. 67, S. 74) ausgesprochen worden, nur hat sich derselbe dabei der Form (13b) der Wurzelgrösse bedient.

Das oben entwickelte Hauptresultat kann man in folgender Weise umkehren: *Ist bei einer Thetafunction eine principale Transformation möglich, bei der die ersten g Multiplicatoren gleich p, die übrigen $\varrho-g$ gleich $-p$ sind, so existiren zwei Thetafunctionen, von denen die eine nur g, die andere $\varrho-g$ Variable enthält, und deren Product rational durch jene Thetafunctionen ausgedrückt werden kann.*

Dies kann man dadurch nachweisen, dass man die principale Transformation (K), oder dieselbe mit einer Multiplication zusammengesetzt, in der Weise $(P)\,(\mathsf{H})\,(P)^{-1}$ zerlegt, und dann auf die Thetafunction die Transformation (P) anwendet. Denn die durch (P) transformirte Thetafunction ist rational durch die ursprünglichen Thetafunctionen ausdrückbar, und sie zerfällt in das Product zweier Thetafunctionen, weil für sie (H) eine principale Transformation ist. Für $\varrho = 2$ ist diese Zerlegung leicht ausführbar. Ist nämlich

$$\begin{matrix} k_{11}, & k_{12}, & 0\;, & k_{14}, \\ k_{21}, & k_{22}, & -k_{14}, & 0\;, \\ 0\;, & -k_{41}, & k_{11}, & k_{21}, \\ k_{41}, & 0\;, & k_{12}, & k_{22}, \end{matrix}$$

---

*) Auf Grund dieser Bemerkung ist die Reduction der hyperelliptischen Integrale

$$\int f(x)\,\frac{dx}{\sqrt{R_1(x)}} \quad \text{und} \quad \int f_1(x)\,\frac{dx}{\sqrt{R_2(x)}}$$

in einer wohl einfacheren Weise ausführbar, als dies durch Malet (Journal für Mathematik, Bd. 76, S. 97) und Brioschi (Comptes rendus, t. LXXXV, p. 708) geschehen ist. Durch die Substitution (14) gehen nämlich diese Integrale in

$$\int F(\xi)\,\frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi^2)}} = \int \left\{F_1(\xi^2) + \xi F_2(\xi^2)\right\} \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi^2)}}$$

über, und macht man jetzt die Substitution $\xi^2 = x'$, so erhält man

$$\int F_1(x')\,\frac{dx'}{\sqrt{x' R(x')}} + \int F_2(x')\,\frac{dx'}{2\sqrt{R(x')}}.$$

Und damit ist die Reduction ausgeführt. Wenn ursprünglich unter den Wurzelzeichen ganze Functionen von dem $2n$ten, bez. $(2n-1)$ten Grade standen, so sind nach der Reduction daselbst nur ganze Functionen von dem $n$ten, bez. $(n+1)$ten Grade zu finden.

worin in Folge der Bedingungsgleichungen (2)

$$k_{11}+k_{22}=0,\quad k_{ii}^2+k_{12}k_{21}+k_{14}k_{41}=p^2,\quad \text{für } i=1,2$$

das Coefficientensystem der Transformation (K), und setzt man diese Transformation mit einer Multiplication mit $(2k_{11}\pm p)$ zusammen, so sind, abgesehen von dem Fall, dass gleichzeitig k_{12}, k_{21}, k_{14}, k_{41} Null sind, die Coefficienten der Transformation (P) die folgenden:

$$\begin{array}{llll}
k_{11}\pm p, & k_{12}, & 0, & k_{14}, \\
k_{21}, & k_{22}\mp p, & -k_{14}, & 0, \\
0, & -k_{41}, & k_{11}\pm p, & k_{21}, \\
k_{41}, & 0, & k_{12}, & k_{22}\mp p.
\end{array}$$

Ist aber $\varrho>2$, so wird eine derartige Zerlegung von (K) sehr umständlich. Wohl aber kann man den obigen Satz leicht beweisen, wenn man die Eigenschaften der Thetafunctionen zu Hilfe nimmt. Es bedeute $\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)$ eine derjenigen Thetafunctionen, welche bis auf einen hinzutretenden Exponentialfactor ungeändert bleibt, wenn man $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ gleichzeitig um $2\omega_{1,\varkappa}, 2\omega_{2,\varkappa}, \ldots, 2\omega_{\varrho,\varkappa}$ vermehrt. Wenn dann $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varrho$ die Multiplicatoren bei einer principalen Transformation sind, so ist in Folge dieser Transformation $\Theta(\mu_1 u_1, \mu_2 u_2, \ldots, \mu_\varrho u_\varrho)$ eine rationale Function derselben Thetafunctionen mit den Argumenten $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$. Setzt man nun in dem Additionstheorem der Thetafunctionen, d. i. in der Darstellung von

$$\Theta(v_1+w_1, v_2+w_2, \ldots, v_\varrho+w_\varrho)\,\Theta(v_1-w_1, v_2-w_2, \ldots, v_\varrho-w_\varrho)$$

durch Thetafunctionen mit den Argumenten $v_1, v_2, \ldots, v_\varrho$, bez. $w_1, w_2, \ldots, w_\varrho$, die Werthe $pu_1, pu_2, \ldots, pu^\varrho$ an Stelle von $v_1, v_2, \ldots, v_\varrho$ und die Werthe $pu_1, pu_2, \ldots, pu_g, -pu_{g+1}, -pu_{g+2}, \ldots, -pu_\varrho$ an Stelle von $w_1, w_2, \ldots, w_\varrho$, so erhält man

$$\Theta(2pu_1, 2pu_2, \ldots, 2pu_g, 0, 0, \ldots, 0)\,\Theta(0, 0, \ldots 0, 2pu_{g+1}, 2pu_{g+2}, \ldots, 2pu_\varrho)$$

rational ausgedrückt durch Thetafunctionen mit den Argumenten $pu_1, pu_2, \ldots, pu_\varrho$, bez. $pu_1, pu_2, \ldots, pu_g, -pu_{g+1}, -pu_{g+2}, \ldots, -pu_\varrho$. Diese Thetafunctionen aber kann man, die ersteren, weil eine gewöhnliche Multiplication vorliegt, die anderen, weil p und $-p$ die Multiplicatoren einer principalen Transformation sind, durch Thetafunctionen mit den Argumenten $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ ausdrücken. Mithin ist

$$\Theta(2pu_1, 2pu_2, \ldots, 2pu_g, 0, 0, \ldots, 0)\,\Theta(0, 0, \ldots, 0, 2pu_{g+1}, 2pu_{g+2}, \ldots, 2pu_\varrho)$$

eine rationale Function von Thetafunctionen mit den Argumenten $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$. — Nun ist aber $\Theta(2pu_1, 2pu_2, \ldots, 2pu_g, 0, 0, \ldots, 0)$ eine Thetafunction von g Argumenten: $\overline{\Theta}(u_1, u_2, \ldots, u_g)$, denn diese Function $\Theta(2pu_1, \ldots)$ bleibt bis auf einen hinzutretenden Exponentialfactor ungeändert, wenn man die g Argumente $u_1, u_2, \ldots, u_g$ um

$2\omega_{1,\varkappa}, 2\omega_{2,\varkappa}, \ldots, 2\omega_{g,\varkappa}$ vermehrt. Dasselbe gilt auch von der andern Thetafunction: es ist

$$\Theta(0, 0, \ldots, 0, 2pu_{g+1}, 2pu_{g+2}, \ldots, 2pu_\varrho) = \bar{\bar{\Theta}}(u_{g+1}, u_{g+2}, \ldots, u_\varrho).$$

Folglich ist

$$\bar{\Theta}(u_1, u_2, \ldots, u_g)\, \bar{\bar{\Theta}}(u_{g+1}, u_{g+2}, \ldots, u_\varrho)$$

gleich einer rationalen Function der ursprünglichen Thetafunctionen. Und damit ist obiger Satz bewiesen. —

Wenn eine Thetafunction nach einer Transformation in ein Product von Thetafunctionen mit weniger Variablen zerfällt, so ist dies auch bei allen Thetafunctionen der Fall, die aus jener durch lineare Transformationen abgeleitet werden; mithin bestehen auch für alle diese Thetafunctionen principale Transformationen von dieser besondern Form (K), und alle diese Transformationen werden nach den Bemerkungen auf Seite 130 gegenseitig in der Weise:

$$(K') = (L)\,(K)\,(L)^{-1}$$

aus einander abgeleitet, wo (L) eine lineare Transformation bedeutet. Ich will nun eine möglichst einfache dieser Transformationen (K') herstellen, d. h. eine solche, in der möglichst viele der Coefficienten Null sind.

Zu dem Zwecke bringe ich die Transformation (P) durch das von Kronecker (Monatsberichte der Berliner Academie 1866, S. 608) angegebene Verfahren auf die Normalform, d. h. ich zerlege (P) in der Weise

$$(P) = (L')\,(P_1),$$

wo (L') eine lineare Transformation bedeutet, und in (P_1) die Coefficienten

$$p_{\varrho+\alpha,\beta} = 0, \quad p_{i,j} = 0, \; p_{\varrho+j,\varrho+i} = 0, \quad \text{wenn} \quad 0 < i < j \leqq \varrho.$$

Für die aus der ursprünglichen Thetafunction mittelst der Transformation (L') hergeleiteten Thetafunction gilt nach den obigen Bemerkungen die principale Transformation

$$\begin{aligned}(K_1) &= (L')^{-1}\,(K)\,(L') = (L')^{-1}(P)\,(\mathrm{H})\,(P)^{-1}\,(L')\\ &= (L')^{-1}(L')\,(P_1)\,(\mathrm{H})\,(P_1)^{-1}\,(L')^{-1}\,(L') = (P_1)\,(\mathrm{H})(P_1)^{-1},\end{aligned}$$

und in dieser ist, wie man aus den Gleichungen (11) mit Hilfe der Gleichungen (2) findet:

$$k_{\alpha,\alpha} = k_{\varrho+\alpha,\varrho+\alpha} = \begin{cases} p, & \text{für } \alpha \geqq g, \\ -p, & \text{für } \alpha > g, \end{cases}$$

und ausserdem können von Null verschieden sein nur die Glieder:

$$k_{\sigma,\tau} = k_{\varrho+\tau,\varrho+\sigma}, \quad k_{\sigma,\varrho+c} = -k_{c,\varrho+\sigma},$$

wenn $\sigma > g$, $\tau \leqq g$, $c < \sigma$ ist. Für $\varrho = 2$, $g = 2$ hat demnach das Coefficientensystem folgende Gestalt:

$$\begin{array}{cccccccc}
p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{17} & -k_{18}, \\
0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{27} & -k_{28}, \\
k_{31} & k_{32} & -p & 0 & k_{35} & k_{36} & 0 & -k_{38}, \\
k_{41} & k_{42} & 0 & -p & k_{45} & k_{46} & k_{47} & 0, \\
0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & k_{57} & k_{58}, \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & k_{67} & k_{68}, \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p & 0, \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p.
\end{array}$$

Im folgenden will ich die keine Beschränkung enthaltende Annahme machen, dass

$$g \geqq \varrho - g;$$

ausserdem will ich überall $k_{\sigma,\tau}$ an Stelle von $k_{\varrho+\tau,\varrho+\sigma}$, ferner $-k_{\sigma,\varrho+c}$ (wo $c < \sigma$) an Stelle von $k_{c,\varrho+\sigma}$ setzen, und dann, wo ich $k_{\sigma,\tau}$ oder $k_{\sigma,\varrho+c}$ schreibe, die beiden Glieder des Coefficientensystems verstehen, wo dieser Buchstabe steht.

Eine weitere Vereinfachung der principalen Transformation (K') erhalte ich dadurch, dass ich für die mit (K) in der Form $(L_q)(K)(L_q)^{-1}$ zusammenzusetzenden Transformationen (L_q) die folgenden Transformationen nehme:

(L_1): $\omega_{\alpha,\varkappa} = \omega'_{\alpha,\varkappa}$, ausgenommen $\omega_{\alpha,i} = \omega'_{\alpha,i} \pm \omega'_{\alpha,\varrho+i}$, wo $0 < i \leqq g$;

(L_2): $\omega_{\alpha,\varkappa} = \omega'_{\alpha,\varkappa}$, ausgenommen $\omega_{\alpha,\varrho+i} = \omega'_{\varrho+i} \pm \omega'_{\alpha,i}$, wo $0 < i \leqq g$;

(L_3): $\omega_{\alpha,\varkappa} = \omega'_{\alpha,\varkappa}$, ausgenommen $\omega_{\alpha,i} = \omega'_{\alpha,i} \pm \omega'_{\alpha,j}$, $\omega_{\alpha,\varrho+j} = \omega'_{\alpha,\varrho+j} \mp \omega'_{\alpha,\varrho+i}$ wo $0 < i,j \leqq g$;

(L_4): $\omega_{\alpha,\varkappa} = \omega'_{\alpha,\varkappa}$, ausgenommen $\omega_{\alpha,r} = \omega'_{\alpha,r} \pm \omega'_{\alpha,i}$, $\omega_{\alpha,\varrho+i} = \omega'_{\alpha,\varrho+i} \mp \omega'_{\alpha,\varrho+r}$, wo $0 < i \leqq g < r \leqq \varrho$;

(L_5): $\omega_{\alpha,\varkappa} = \omega'_{\alpha,\varkappa}$, ausgenommen $\omega_{\alpha,i} = \omega'_{\alpha,i} \pm \omega'_{\alpha,\varrho+r}$, $\omega_{\alpha,r} = \omega'_{\alpha,r} \mp \omega'_{\alpha,\varrho+i}$, wo $0 < i \leqq g < r \leqq \varrho$;

(L_6): $\omega_{\alpha,\varkappa} = \omega'_{\alpha,\varkappa}$, ausgenommen $\omega_{\alpha,r} = \omega'_{\alpha,r} \pm \omega'_{\alpha,s}$, $\omega_{\alpha,\varrho+s} = \omega'_{\alpha,\varrho+s} \mp \omega'_{\alpha,\varrho+r}$, wo $0 < r,s \leqq \varrho$.

Denn dadurch treten in (K') bei der Transformation (L_1):

$$\begin{array}{lll}
 & k_{c,\varrho+i} \pm k_{c,i} & \text{an Stelle von } k_{c,\varrho+i}; \\
\text{bei } (L_2): & k_{c,i} \pm k_{c,\varrho+i} & \text{,, \quad ,, \quad ,, } k_{c,i} \\
\text{bei } (L_3): & \left\{\begin{array}{l} k_{c,j} \pm k_{c,i} \\ k_{c,\varrho+i} \mp k_{c,\varrho+j} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} \text{,, \quad ,, \quad ,, } k_{c,j}, \\ \text{,, \quad ,, \quad ,, } k_{c,\varrho+i}; \end{array}\right\}
\end{array}$$

bei (L_4): $\left\{\begin{array}{lll} k_{r,\varrho+c} \mp k_{i,\varrho+c} & \text{an Stelle von} & k_{r,\varrho+c},\ c \gtrless r, \\ k_{r,i} \quad \mp 2p & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & k_{r,i}; \end{array}\right\}$

bei (L_5): $\left\{\begin{array}{lll} k_{c,\varrho+r} \mp k_{c,i} & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & k_{c,\varrho+r},\ c \gtrless r, \\ k_{r,\varrho+i} \mp 2p & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & k_{r,\varrho+i}; \end{array}\right\}$

bei (L_6): $\left\{\begin{array}{lll} k_{r,f} \quad \mp k_{s,f} & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & k_{r,f},\ \text{für } f = 1, 2, \ldots, g, \\ k_{r,\varrho+e} \mp k_{s,\varrho+e} & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & k_{r,\varrho+e},\ \text{für } e = 1, 2, \ldots, r-1, \\ & & \qquad r+1, \ldots, \varrho. \end{array}\right\}$

Dabei hat c die Werthe $g+1, g+2, \ldots, \varrho$ zu durchlaufen, und $k_{\alpha,\varrho+\beta}$ ist durch $-k_{\beta,\varrho+\alpha}$ zu ersetzen, wenn $\alpha < \beta$.

Wenn nun durch diese, und auch andere Transformationen erreicht werden kann, dass die Zahlen, die, abgesehen von $k_{cc} = -p$, in der $c$ten Zeile stehen:

(14) $k_{c,1}, k_{c,2}, \ldots, k_{c,g}, k_{c,\varrho+1}, k_{c,\varrho+2}, \ldots, k_{c,\varrho+c-1}, k_{c+1,\varrho+c}, k_{c+2,\varrho+c}, \ldots, k_{\varrho,\varrho+c}$,

für $c = g+1, g+2, \ldots, \gamma$, und selbstverständlich, die mit ihnen in Folge von $k_{\alpha,\varrho+\beta} = -k_{\beta,\varrho+\alpha}$, $k_{\alpha,\beta} = k_{\varrho+\alpha,\varrho+\beta}$ gleichwerthigen Coefficienten, noch Null werden, so soll dies schon als ausgeführt betrachtet werden, und es sollen also ausser den Zahlen $k_{\varkappa,\varkappa} = \pm p$ nur noch die Zahlen (14) für $c = \gamma+1, \gamma+2, \ldots, \varrho$ von Null verschieden sein. Indem ich alsdann abwechselnd die Transformationen (L_1) und (L_2) für (L_q) nehme, und zwar zuerst für $i=1$, dann für $i=2,3,\ldots,g$, kann ich durch das bekannte kettenbruchartige Verfahren nach einander

(15) $$k_{\gamma+1,\varrho+1},\ k_{\gamma+1,\varrho+2}, \ldots, k_{\gamma+1,\varrho+g},$$

und damit zugleich auch die gleichwerthigen Coefficienten $k_{e,\varrho+\gamma+1}$, (was ich im folgenden nicht immer besonders hervorheben werde), zum Verschwinden bringen; hierauf mache ich dadurch, dass ich für (L_q) die Transformation (L_3) nehme, und zwar, indem ich abwechselnd i und j zuerst die Werthe 1 und 2, dann 2 und 3, u. s. w. gebe, auch noch

(16) $$k_{\gamma+1,2},\ k_{\gamma+1,3}, \ldots, k_{\gamma+1,g}$$

zu Null, so dass in der $(\gamma+1)$ten Zeile nur die Glieder

$$k_{\gamma+1,1},\ k_{\gamma+1,\gamma+1} = -p,\ k_{\gamma+2,\varrho+\gamma+1},\ k_{\gamma+3,\varrho+\gamma+1}, \ldots, k_{\varrho,\varrho+\gamma+1}$$

von Null verschieden sind. — Jetzt wiederholt man diese Operation: mittelst der Transformationen (L_1) und (L_2) für $i = 2, 3, \ldots, g$ bringt man $k_{\gamma+2,\varrho+2}, k_{\gamma+2,\varrho+3}, \ldots, k_{\gamma+2,\varrho+g}$, dann mittelst der Transformation (L_3) noch $k_{\gamma+2,3}, k_{\gamma+2,4}, \ldots, k_{\gamma+2,g}$ zum Verschwinden. Und so fährt man fort, bis endlich, abgesehen von $k_{\varkappa\varkappa} = \pm 1$, von Null verschieden nur noch sind:

$$k_{c,1},\ k_{c,2}, \ldots, k_{c,c-\gamma}, \quad \text{für} \quad c = \gamma+1, \gamma+2, \ldots, \varrho,$$

$$\left.\begin{array}{l} k_{e,\varrho+1},\ k_{e,\varrho+2}, \ldots, k_{e,\varrho+e-\gamma-1} \\ k_{e,\varrho+e-1},\ k_{e+1,\varrho+e-1}, \ldots, k_{\varrho,\varrho+e-1} \end{array}\right\} \text{für } e = \gamma+2, \gamma+3, \ldots, \varrho,$$

und die damit gleichwerthigen Coefficienten, wie dies aus $k_{\alpha,\beta}=k_{\varrho+\beta,\varrho+\alpha}$, $k_{\alpha,\varrho+\beta}=-k_{\beta,\varrho+\alpha}$ folgt. Für $\varrho=6$, $g=\gamma=3$ haben $(g+1)$te, $(g+2)$te, ϱte Zeile, wenn ich nur a_λ, b_λ, c_λ an Stelle von $k_{g+1,\lambda}$, $k_{g+2,\lambda}$, $k_{\varrho,\lambda}$ setze, jetzt die folgende Gestalt:

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_1 & 0 & 0 & -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{10} & -c_{10}, \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & -p & 0 & b_7 & 0 & 0 & b_{10} & 0 & -c_{11}, \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & -p & c_7 & c_8 & 0 & c_{10} & c_{11} & 0. \end{array}$$

Die Gleichungen (2) zwischen den Coefficienten der Transformation reduciren sich hier auf

$$(17)\qquad \sum_u k_{r,u}k_{s,\varrho+u}-\sum_v k_{s,v}k_{r,\varrho+v}-2pk_{s,\varrho+r}=0,\quad \gamma<r<s\leqq\varrho,$$

wo die Summation über u von 1 bis $r-\gamma$, über v von 1 bis $r-\gamma-1$ auszuführen ist. Unter diesen Gleichungen befinden sich insbesondere die Gleichungen

$$k_{\gamma+1,1}\,k_{s,\varrho+1}-2pk_{s,\varrho+\gamma+1}=0,\quad \text{für}\quad s=\gamma+2,\ldots,\varrho,$$

und aus diesen geht hervor, dass $k_{\gamma+1,1}$ *nicht* Null sein kann, denn sonst würden auch $k_{\gamma+2,\varrho+\gamma+1}$, $k_{\gamma+3,\varrho+\gamma+1},\ldots,k_{\varrho,\varrho+\gamma+1}$ Null sein, und dies ist ein Widerspruch damit, dass die Coefficienten (14) für $c=\gamma+1$ nicht verschwinden sollen.

Die weitere Reduction werde ich nur für den Fall ausführen, dass *p eine ungerade Primzahl* ist. Dies geschieht in folgender Weise: Es kann $k_{\gamma+1,1}$ nicht durch p theilbar sein, denn sonst könnte man diese Zahl, da sie gerade ist, durch mehrmalige Wiederholung der Transformation (L_4) für $r=\gamma+1$, $i=1$ zu Null machen, was, wie eben gezeigt, ausgeschlossen ist. Dann folgt aber aus den eben schon einmal angeführten, in dem System (17) enthaltenen Gleichungen

$$(18)\qquad k_{\gamma+1,1}\,k_{s,\varrho+1}-2pk_{s,\varrho+\gamma+1}=0,$$

dass $k_{\gamma+2,\varrho+1}$, $k_{\gamma+3,\varrho+1},\ldots,k_{\varrho,\varrho+1}$ durch p theilbar sind. Durch mehrmalige Anwendung der Transformation (L_5) für $i=1$, $r=\gamma+2$, dann $\gamma+3,\ldots,\varrho$, indem man berücksichtigt, dass die $k_{\varkappa,\lambda}$ gerade Zahlen sind, macht man

$$(19)\qquad k_{\gamma+2,\varrho+1},\ k_{\gamma+3,\varrho+1},\ldots,k_{\varrho,\varrho+1},$$

und damit auch, wie aus (18) folgt

$$(20)\qquad k_{\gamma+2,\varrho+\gamma+1},\ k_{\gamma+3,\varrho+\gamma+1},\ldots,k_{\varrho,\varrho+\gamma+1}$$

zu Null. — Nun wiederholt man diese Operation: Es kann $k_{\gamma+2,2}$ nicht durch p theilbar sein, sonst könnte man erst diese Zahl mittelst der Transformation (L_4), und dann die Zahl $k_{\gamma+1,1}$ mittelst der Transformation (L_6) zu Null machen, was ausgeschlossen ist. Unter den Gleichungen (17) sind nun auch die folgenden enthalten:

$$k_{\gamma+2,1}k_{s,\varrho+1}+k_{\gamma+2,2}k_{s,\varrho+2}-k_{s,1}k_{\gamma+2,\varrho+1}-2pk_{s,\varrho+\gamma+2}=0,\ \text{für}\ s=\gamma+3,\ldots,\varrho,$$

und wenn man darauf Rücksicht nimmt, dass die Zahlen $k_{s,\varrho+1}$ und $k_{\gamma+2,\varrho+1}$ zu Null gemacht sind, so erkennt man hieraus, dass $k_{s,\varrho+2}$ durch p theilbar ist. Und jetzt kann man wieder mit Hilfe der Transformation (L_5)

$$k_{\gamma+3,\varrho+2},\ k_{\gamma+4,\varrho+2},\ldots,\ k_{\varrho,\varrho+2},$$

und damit zugleich auch

$$k_{\gamma+3,\varrho+\gamma+2},\ k_{\gamma+4,\varrho+\gamma+2},\ldots,\ k_{\varrho,\varrho+\gamma+2}$$

zum Verschwinden bringen. Und so fährt man fort, bis, abgesehen von $p_{\varkappa\varkappa}=\pm p$, nur noch von Null verschieden die folgenden Zahlen sind:

$$k_{c,1},\ k_{c,2},\ldots,\ k_{c,c-\gamma},\quad \text{für}\quad c=\gamma+1,\ \gamma+2,\ldots,\ \varrho,$$

d. i. also diejenigen $k_{\alpha\beta}$, bei denen $\alpha\geqq\beta+\gamma$. Selbstverständlich sind von den Coefficienten diejenigen, welche zu Folge von $k_{\varrho+\alpha,\varrho+\beta}=k_{\beta,\alpha}$ mit diesen dieselben Werthe haben, auch von Null verschieden. — Damit ist die Reduction ausgeführt.

Die Coefficientensysteme, in denen $\gamma>g$ ist, unterscheiden sich von denjenigen, in welchen $\gamma=g$, nur dadurch, dass in ersteren noch mehr Coefficienten Null sind, wie in dem letzteren; also kann man allgemein sagen: *in dem reducirten System können, abgesehen von $k_{\varkappa\varkappa}=\pm p$, von Null verschieden sein nur die Coefficienten*

$$k_{\alpha,\beta}=k_{\varrho+\beta,\varrho+\alpha},$$

wenn $\alpha>\beta+g$ oder $\beta>\alpha+g$.

Dem also reducirten System der Coefficienten $k_{\varkappa\lambda}$ der principalen Transformation (K) will ich noch dadurch eine andere Form geben, dass ich es mit der Transformation $(\overline{L})$, bei welcher

$$\omega_{\alpha,i}=\omega'_{\alpha,i},\qquad \omega_{\alpha,\varrho+i}=\omega'_{\alpha,\varrho+i},$$
$$\omega_{\alpha,r}=\omega'_{\alpha,\varrho+r},\qquad \omega_{\alpha,\varrho+r}=-\,\omega'_{\alpha,r},$$

wo $i=1,2,\ldots,g$ und $r=g+1,\ g+2,\ldots,\ \varrho$ ist, in der bekannten Weise $(\overline{L})(K)(\overline{L})^{-1}$ verbinde. Die Gleichungen des Systems (K):

$$\omega_{\alpha,i}=p\,\omega'_{\alpha,i},\qquad \omega_{\alpha,\varrho+i}=p\,\omega'_{\alpha,\varrho+i}+\sum_r k_{\varrho+i,\varrho+r}\,\omega'_{\alpha,\varrho+r},$$

$$\omega_{\alpha,r}=\sum_i k_{r,i}\,\omega'_{\alpha,i}-p\,\omega'_{\alpha,r},\qquad \omega_{\alpha,\varrho+r}=-\,p\,\omega'_{\alpha,\varrho+r},$$

wo i die Werthe $1,2,\ldots,g$ und r die Werthe $g+1,g+2,\ldots,\varrho$ anzunehmen hat und $k_{r,i}=k_{\varrho+i,\varrho+r}=0$ ist, wenn $r<i+g$, gehen dadurch über in

$$\omega_{\alpha,i}=\quad p\,\omega'_{\alpha,i},\quad \omega_{\alpha,\varrho+i}=-\sum_r k_{\varrho+i,\varrho+r}\,\omega'_{\alpha,r}+p\,\omega'_{\alpha,\varrho+i},$$

$$\omega_{\alpha,r}=-\,p\,\omega'_{\alpha,r},\quad \omega_{\alpha,\varrho+r}=\quad\sum_i k_{r,i}\,\omega'_{\alpha,i}-p\,\omega'_{\alpha,\varrho+r}.$$

Und hieraus erkennt man, dass in dem neuen System von den Coefficienten $\bar{k}_{\lambda,\varkappa}$ nur die folgenden: $\bar{k}_{\varkappa,\varkappa} = \pm p$ und $\bar{k}_{\varrho+i,r} = -\bar{k}_{\varrho+r,i} = k_{\varrho+i,\varrho+r} = k_{r,i}$ für $r \geqq i+g$ von Null verschieden sein können.

Das Resultat, zu dem wir gekommen sind*, kann ich jetzt in der folgenden Weise aussprechen: *Wenn eine Thetafunction durch eine Transformation* (P), *deren Grad* p *eine ungerade Primzahl ist, in ein Product von Thetafunctionen von weniger Variablen zerfällt, so kann die ursprüngliche Thetafunction durch eine lineare Transformation so umgeändert werden, dass für dieselbe eine principale Transformation besteht, bei welcher*

$$k_{\alpha,\alpha} = k_{\varrho+\alpha,\varrho+\alpha} = \begin{cases} p, & \text{für } \alpha \leqq g, \\ -p, & \text{für } \alpha > g, \end{cases}$$

und die übrigen Coefficienten $k_{\varkappa,\lambda}$ *Null sind, mit Ausnahme von*

$$k_{\alpha+\varrho,\beta} = -k_{\varrho+\beta,\alpha}, \quad \text{für} \quad \alpha \geqq \beta+g \quad \text{oder} \quad \beta \geqq \alpha+g,$$

welches gerade Zahlen sind. g *und* $\varrho-g$, *wobei* $g \geqq \varrho-g$, *sind die Anzahl der Variablen der Thetafunctionen, in welche die ursprüngliche Thetafunction bei der Transformation zerfällt.* — Die Werthe der Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ für diese Thetafunction erhält man aus den Gleichungen (1), indem man in denselben $\tau'_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}$ setzt und für $n_{\varkappa,\lambda}$ diese speciellen Werthe der $k_{\varkappa,\lambda}$ substituirt: man findet, dass $\tau_{\alpha\beta}$ *beliebig ist, wenn zugleich*

$$\alpha \text{ u. } \beta \leqq g, \quad \text{oder} \quad \alpha \text{ u. } \beta > g$$

und, wenn $\alpha > g \geqq \beta$ *ist, dass*

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \alpha < g+\beta, \\ \dfrac{k_{\varrho+\alpha,\beta}}{2p} = \dfrac{l_{\alpha\beta}}{p}, & \text{wenn } \alpha \geqq g+\beta, \end{cases}$$

wobei $l_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, k_{\varrho+\alpha,\beta}$ *ganze Zahlen sind.*

Die Transformation (P), *durch welche die Thetafunction zum Zerfallen gebracht wird, hat, wie man sich leicht überzeugt, das Coefficientensystem*

$$p_{\alpha\alpha} = p, \quad p_{\varrho+\alpha,\varrho+\alpha} = 1, \quad p_{\varkappa,\lambda} = k_{\varkappa,\lambda},$$

wo $k_{\varkappa\lambda}$ diese ganz speciellen Coefficienten des reducirten Systems sind.

Für $g = \varrho - 1$, für den Fall also, dass eine Thetafunction nur eine Variable enthält, ist dieser Satz durch Königsberger (Journal für Mathematik, Bd. 67, S. 74) als von Weierstrass herrührend, mitgetheilt. Vergl. auch Aufsätze von S. v. Kowalevski (Acta mathematica, t. IV, p. 393), Picard (Comptes rendus, t. XCII, p. 506, t. XCIII, p. 696).

Halle, im Januar 1885.

Note über die Normalcurven für $p = 5, 6, 7$.

Von

Max Noether in Erlangen.

Unter den Normalcurven einer algebraischen Classe vom Geschlecht p bieten sich am Natürlichsten diejenigen dar, welche durch alle zwischen den p Functionen φ bestehenden Relationen definirt sind; eine Darstellung, welche für alle Classen ausser den hyperelliptischen möglich ist.*) Wenn dann die darunter existirenden

$$\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$$

linear-unabhängigen quadratischen Relationen $p-2$ überhaupt von einander unabhängige Relationen liefern, was für $p \geqq 5$ und nicht specielle Werthe der Moduln stattfindet, so definiren schon diese Relationen die Curve; und durch lineare Transformationen muss es dann weiter möglich sein, dieselben in einer Form herzustellen, in der sie die $3p-3$ Moduln explicit aufweisen. Solche kanonische Formen will ich hier für die Hauptfälle von $p = 5, 6, 7$ mittheilen.

1.

$p = 5$.

Bekanntlich hat man für $p = 5$ drei quadratische homogene Gleichungen zwischen den 5 Grössen $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ mit ganz willkürlichen Coefficienten. Von 3 linearen Combinationen derselben, mit je 12 Parametern, kann man 2, vermöge der 24 Parameter der linearen Substitution für die φ, zu Relationen mit gegebenen numerischen Coefficienten machen; die dritte Relation bleibt dann willkürlich und enthält in ihren 12 Coefficienten die Moduln der Classe.

Geht man etwa von der *ebenen* Normalcurve, der Curve 6[ter] Ordnung mit 5 Doppelpunkten, aus, so mag man diese zunächst mittels Curven 3[ter] Ordnung, die durch die 5 Doppelpunkte und zwei will-

*) Vgl. meinen Aufsatz „Ueber die invariante Darstellung der algebraischen Functionen", Math. Ann. Bd. XVII.

kürliche einfache Punkte der Curve gelegt werden, transformiren, und zwar vermöge der so eingeführten zwei willkürlichen Parameter in eine Curve 6^{ter} Ordnung mit solchen 5 Doppelpunkten a, b, c, b', c', von denen b' dem Punkte b, c' dem Punkte c unendlich benachbart liegen. Nimmt man dann vermöge linearer Transformation der Ebene für die Punkte a, b, c feste Punkte und für die Geraden bb', cc' feste Richtungen, so enthält die Gleichung der Curve gerade noch 12 Parameter.

Für diese Punkte a, b, c habe man bez. die Coordinaten:

$$x_2 = x_3 = 0; \quad x_3 = x_1 = 0; \quad x_1 = x_2 = 0;$$

für die Richtungen bb', cc' bezüglich:

$$x_1 - x_3 = 0; \quad x_1 - x_2 = 0.$$

Für die Curven φ kann man dann nehmen:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= x_1(x_2x_3 - x_1x_2 - x_1x_3), \\ \varphi_2 &= x_2(x_2x_3 - x_1x_2 - x_1x_3), \\ \varphi_3 &= x_3(x_2x_3 - x_1x_2 - x_1x_3), \\ \varphi_4 &= x_1^{\,2}x_2, \\ \varphi_5 &= x_1^{\,2}x_3, \end{aligned}$$

und die drei quadratischen Relationen werden:

$$\begin{cases} \varphi_3\varphi_4 = \varphi_2\varphi_5 = \varphi_1(\varphi_1 + \varphi_4 + \varphi_5), \\ \sum a_{i\varkappa}\varphi_i\varphi_\varkappa = 0, \end{cases}$$

wo die dritte, nachdem vermöge der beiden ersten zwei Producte der φ weggehoben sind, noch die 12 Moduln linear aufweist.

Man hätte auch, von den 3 allgemeinen quadratischen Relationen zwischen den φ ausgehend, nachdem man 2 lineare Combinationen mit verschwindenden Determinanten gebildet, durch einfache geometrische Betrachtungen auf die hier angeschriebene kanonische Form kommen können.

2.

$p = 6$.

Man hat hier zwischen den 6 Functionen φ 6 linear-unabhängige quadratische Relationen, von denen 4 überhaupt von einander unabhängige die Normalcurve bestimmen. Diese vier Relationen haben diesmal nicht mehr willkürliche Coefficienten. Ich werde zeigen, dass man sie in eine solche Form bringen kann, dass drei der Relationen nur gegebene Zahlencoefficienten erhalten, während die vierte alle Coefficienten völlig willkürlich hat. Reducirt man diese Relation dann durch die 5 übrigen, so enthält dieselbe linear noch $20 - 5 = 15$ Parameter als Moduln.

Hierzu genügt wieder die Betrachtung der *ebenen* Normalcurve für $p=6$*): der Curve 6^{ter} Ordnung mit vier Doppelpunkten a, b, c, d, eine Curve, die vermöge ebener linearer Transformation gerade 15 Parameter aufweist. Vermöge einer solchen mögen a, b, c, d bez. die Coordinaten erhalten:

$$x_2=x_3=0;\quad x_3=x_1=0;\quad x_1=x_2=0;\quad x_1=x_2=x_3.$$

Für die 6 linear-unabhängigen Ausdrücke φ nehme man etwa:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= x_1 \,.\, x_2(x_1-x_3), & \varphi_4 &= x_1 \,.\, x_3(x_1-x_2),\\
\varphi_2 &= x_2 \,.\, x_2(x_1-x_3), & \varphi_5 &= x_2 \,.\, x_3(x_1-x_2),\\
\varphi_3 &= x_3 \,.\, x_2(x_1-x_3), & \varphi_6 &= x_3 \,.\, x_3(x_1-x_2),
\end{aligned}$$

woraus die 5 linear-unabhängigen quadratischen Relationen folgen:

$$\varphi_2\varphi_6-\varphi_3\varphi_5=0,\quad \varphi_3\varphi_4-\varphi_1\varphi_6=0,\quad \varphi_1\varphi_5-\varphi_2\varphi_4=0,$$
$$\varphi_5(\varphi_1-\varphi_3)-\varphi_3(\varphi_1-\varphi_2)=0,$$
$$\varphi_5(\varphi_4-\varphi_6)-\varphi_3(\varphi_4-\varphi_5)=0.$$

Als unabhängige derselben kann man etwa wählen:

$$\varphi_1\varphi_5-\varphi_2\varphi_4=0,\quad \varphi_1\varphi_6-\varphi_3\varphi_4=0,$$
$$\varphi_5(\varphi_1-\varphi_3)-\varphi_3(\varphi_1-\varphi_2)=0,$$

wozu dann eine Relation

$$\sum a_{i\varkappa}\varphi_i\varphi_\varkappa=0,$$

mit beliebigen Parametern $a_{i\varkappa}$ tritt.

3.

$p=7$.

Hier existiren zwischen den 7 linear-unabhängigen Functionen φ 10 linear-unabhängige quadratische Relationen, von denen 5 überhaupt von einander unabhängige zur Definition der Normalcurve aufzustellen sind. Zu diesem Zwecke gehe ich auch hier von der *ebenen* Normalcurve 7^{ter} Ordnung mit 8 Doppelpunkten, f_7 aus. Die Transformation auf diese Form enthält**) noch *einen* willkürlichen Parameter, den wir uns so bestimmt denken, dass zwei der 8 Doppelpunkte der f_7 unendlich benachbart liegen — Bestimmungsarten, die, wie die Entstehungsart der ebenen Normalcurven als specielle Projectionen von Raumcurven schon für $p=5$ und 6 lehrt, für $p>4$ immer möglich sind. Vermöge linearer Transformation enthält die Curve f_7 dann $35-8-1-8=18$ Parameter, die Moduln der Classe.

---

*) Vgl. Brill und Noether, Ueber die algebraischen Functionen etc., diese Annalen Bd. VII, pag. 298.

**) Vgl. das Citat in der vorhergehenden Anmerkung.

Die Doppelpunkte von f_7 seien a, b, c, d; e, f, g, h, und sei d dem Punkte a benachbart. Vermöge linearer Transformation mögen a, b, c bez. die Coordinaten erhalten:

$$x_2 = x_3 = 0; \quad x_3 = x_1 = 0; \quad x_1 = x_2 = 0,$$

und die Richtung ad sei durch $x_2 - x_3 = 0$ gegeben. Der achte Parameter der Transformation erlaubt dann noch, ϱx_1 für x_1, bei beliebigem ϱ, zu setzen.

Die vier übrigen Punkte e, f, g, h, deren Lage willkürlich bleibt, werden sich dann durch zwei Kegelschnitte

$$K = 0, \quad K' = 0$$

bestimmen, von denen man K noch durch c, K' durch b legen kann:

$$K = x_1 A + x_2 B; \qquad K' = x_1 A' + x_3 B',$$

wo

$$A = x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \qquad B = b_2 x_2 + b_3 x_3,$$
$$A' = x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3, \qquad B' = b_2' x_2 + b_3' x_3.$$

Durch die acht Punkte $a, \ldots, h$ geht ein Büschel von Curven 3ter Ordnung:

$$C - \lambda C' = 0,$$

wo man unter C und C' die Ausdrücke verstehen kann:

$$C = x_3 K - x_2 K',$$
$$C' = (x_1 + a_0' x_3) K - (x_1 + a_0 x_2) K',$$

für

$$a_0 = a_2 + a_3, \quad a_0' = a_2' + a_3'.$$

Für die 7 linear-unabhängigen Functionen φ kann man dann die folgenden Ausdrücke nehmen:

$$\varphi_1 = Cx_1, \quad \varphi_2 = Cx_2, \quad \varphi_3 = Cx_3,$$
$$\varphi_4 = C'x_1, \quad \varphi_5 = C'x_2, \quad \varphi_6 = C'x_3,$$
$$\varphi_7 = Kx_1(x_2 - x_3).$$

Um die Beziehungen zwischen diesen Ausdrücken zu erhalten, stelle ich zunächst noch ein zweites System von 7 linear-unabhängigen Functionen φ auf:

$$\psi_1 = (K - K')x_1 x_2, \quad \psi_2 = K'x_2 x_3, \quad \psi_3 = Kx_2 x_3,$$
$$\psi_4 = K'x_2(x_2 - x_3), \quad \psi_5 = K'x_1(x_2 - x_3),$$
$$\psi_6 = Kx_3(x_2 - x_3), \quad \psi_7 = Kx_1(x_2 - x_3).$$

Die linearen Beziehungen zwischen den ψ_i und den φ_i werden:

$$\varphi_1 = \psi_1 - \psi_7,$$
$$\varphi_2 = \psi_3 - \psi_2 - \psi_4,$$
$$\varphi_3 = \psi_3 - \psi_2 - \psi_6,$$

$$\varphi_4 = -a_3\psi_5 + b_2(\psi_2+\psi_4) + b_3\psi_2 - a_2'\psi_7 - b_2'\psi_3 - b_3'(\psi_3-\psi_6),$$
$$\varphi_5 = \psi_1 + a_0'\psi_3 - a_0(\psi_2+\psi_4),$$
$$\varphi_6 = \psi_1 + \psi_5 - \psi_7 - a_0\psi_2 + a_0'(\psi_3-\psi_6),$$
$$\varphi_7 = \psi_7.$$

Hieraus ergeben sich unmittelbar die folgenden quadratischen Relationen:

$$(1) \qquad \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 = \varphi_4 : \varphi_5 : \varphi_6,$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \psi_3\psi_5 - \psi_2\psi_7 = 0, \\ \psi_3\psi_4 - \psi_6(\psi_2+\psi_4) = 0, \\ \psi_3(\psi_7-\psi_5) - \psi_1\psi_6 = 0 \end{cases}$$

und aus diesen die weitere:

$$(2') \qquad \psi_1\psi_4 - (\psi_2+\psi_4)(\psi_7-\psi_5) = 0.$$

Von den Relationen (1) ist die eine:

$$\varphi_2\varphi_6 - \varphi_3\varphi_5 = 0,$$

eine lineare Folge von (2) und (2'), und aus der weiteren Verbindung von (1) mit (2), (2') ergiebt sich noch:

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi_4\psi_4 - \varphi_5\psi_5 = 0, \\ \varphi_4(\psi_3-\psi_2) - \varphi_5(\psi_1+\psi_5-\psi_7) = 0, \\ \varphi_4\psi_6 - \varphi_6\psi_7 = 0. \end{cases}$$

In (2), (2'), (3) hat man 7 linear-unabhängige quadratische Relationen, von denen (2) und die erste aus (3) vier überhaupt von einander unabhängige Relationen zwischen den den 7 Grössen ψ_i abgeben.

Die letzten 3 Relationen ergeben sich mit Hülfe der Gleichung der ebenen Curve f_7. Die allgemeinste Curve 7^{ter} Ordnung, welche die Punkte $a, \ldots, h$ zu Doppelpunkten hat, enthält noch 11 Constanten, und ihre Gleichung wird:

$$f_7 = KK'x_1(x_2-x_3)^2 + \psi_7(\alpha C+\beta C') + C^2\sum \alpha_i x_i + CC'\sum \beta_i x_i$$
$$+ C'^2\sum \gamma_i x_i = 0,$$

mit den 11 Constanten $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Die gesuchten Relationen folgen durch Bildung von $x_1 . f_7$, $x_2 . f_7$, $x_3 . f_7$:

$$(4) \qquad \begin{cases} \psi_7\psi_5 + \psi_7(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_4) + \varphi_1\sum_1^3{}^i(\alpha_i\varphi_i+\beta_i\varphi_{i+3}) + \varphi_4\sum_1^3{}^i\gamma_i\varphi_{i+3} = 0, \\ \psi_7\psi_4 + \psi_7(\alpha\varphi_2+\beta\varphi_5) + \varphi_2\sum{}^i(\alpha_i\varphi_i+\beta_i\varphi_{i+3}) + \varphi_5\sum{}^i\gamma_i\varphi_{i+3} = 0, \\ \psi_5\psi_6 + \psi_7(\alpha\varphi_3+\beta\varphi_6) + \varphi_3\sum{}^i(\alpha_i\varphi_i+\beta_i\varphi_{i+3}) + \varphi_6\sum{}^i\gamma_i\varphi_{i+3} = 0. \end{cases}$$

Die erste dieser Relationen (4) liefert mit den 4 oben genannten die 5 zur Definition der Normalcurve dienlichen Relationen. —

Die Relationen (4) drücken sich in den Grössen $\varphi_1, \ldots, \varphi_7$ einfacher aus, als in den Grössen $\psi_1, \ldots, \psi_7$. Ich entwickle desshalb noch die einfachste Form, in die sich alle 5 Relationen, in den Grössen $\varphi_1, \ldots, \varphi_7$ ausgedrückt, bringen lassen.

Aus den Ausdrücken der φ_i durch die ψ_i folgt zunächst:

$$A\psi_5 = \sum_1^7{}^{\varkappa} u_\varkappa \varphi_\varkappa,$$

wo

$$\begin{aligned} &u_4 = a_0 - a_0', \quad u_5 = b_2 - b_2', \quad u_6 = b_3 - b_3', \\ &u_1 = -u_5 - u_6, \\ &u_2 = a_0 b_2' - a_0' b_2, \quad u_3 = a_0 b_3' - a_0' b_3, \\ &u_7 = a_2' u_4 - u_5, \\ &A = u_6 - a_3 u_4 \end{aligned}$$

und hieraus

$$u_4 A \psi_6 = -\sum_1^7{}^{\varkappa} u_\varkappa \varphi_\varkappa + A a_0(\varphi_2 - \varphi_3) - A(\varphi_5 - \varphi_6) + A\varphi_7,$$

$$A(\psi_1 + \psi_5 - \psi_7) = \sum u_\varkappa \varphi_\varkappa + A\varphi_1.$$

Durch Multiplication der ersten dieser beiden Beziehungen mit φ_1, der zweiten mit φ_2 ergeben sich aber, wenn man beachtet, dass

$$\psi_6 \varphi_1 = \varphi_3 \varphi_7,$$
$$(\psi_1 + \psi_5 - \psi_7)\varphi_2 = \varphi_3(\varphi_1 + \varphi_7),$$

die Relationen

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} u_4 A \varphi_3 \varphi_7 &= \varphi_1 \Big\{ -\sum u_\varkappa \varphi_\varkappa + A a_0(\varphi_2 - \varphi_3) - A(\varphi_5 - \varphi_6) \\ &\qquad + A\varphi_7 \Big\}, \\ A\varphi_3(\varphi_1 + \varphi_7) &= \varphi_2 \Big\{ \sum u_\varkappa \varphi_\varkappa + A\varphi_1 \Big\}. \end{aligned} \right.$$

Weiter schreibt sich die erste Relation von (4) hier:

$$(6) \quad \frac{1}{A}\varphi_7 \sum_1^7{}^{\varkappa} u_\varkappa \varphi_\varkappa + \varphi_7(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_4) + \varphi_1 \sum (\alpha_i \varphi_i + \beta_i \varphi_{i+3}) + \varphi_4 \sum \gamma_i \varphi_{i+3} = 0.$$

Nimmt man noch die beiden Relationen

$$(7) \qquad \varphi_1\varphi_5 - \varphi_2\varphi_4 = 0, \qquad \varphi_1\varphi_6 = \varphi_3\varphi_4 = 0$$

so hat man in (5), (6), (7) hier die 5 von einander unabhängigen Relationen. Aus (7) folgt eine dritte, und mit Hülfe von diesen aus den beiden Relationen (5) je eine, aus (6) zwei weitere von jenen linear-unabhängige Relationen. —

Die Beziehungen (5), (6), (7) enthalten noch 19 Parameter; indess kann man einen derselben, wie schon oben gesagt, durch eine einfache Transformation wegschaffen. Setzt man:

$$\varphi_7 = \chi_7, \quad \varphi_1 = \chi_1, \quad u_4\varphi_2 = \chi_2, \quad u_4\varphi_3 = \chi_3,$$

$$\frac{1}{u_4}(\varphi_4 - a_0\varphi_1) = \chi_4, \quad \varphi_5 - a_0\varphi_2 = \chi_5, \quad \varphi_6 - a_0\varphi_3 = \chi_6,$$

und

$$\frac{1}{A}\sum_1^7{}^{\varkappa} u_\varkappa \varphi_\varkappa = \sum_1^7{}^{\varkappa} v_\varkappa \chi_\varkappa,$$

wo dann auch die $v_\varkappa$ wegen des willkürlichen a_0 von einander unabhängig werden, so werden die 5 quadratischen Relationen:

$$(8) \quad \begin{cases} \chi_1\chi_5 - \chi_2\chi_4 = 0, \\ \chi_1\chi_6 - \chi_3\chi_4 = 0, \\ \chi_1\left(\sum_1^7{}^{\varkappa} v_\varkappa\chi_\varkappa + \chi_5 - \chi_6 - \chi_7\right) + \chi_3\chi_7 = 0, \\ \chi_2\left(\sum v_\varkappa\chi_\varkappa + \chi_1\right) - \chi_3(\chi_1 + \chi_7) = 0, \\ \chi_7\left(\sum v_\varkappa\chi_\varkappa + \alpha'\chi_1 + \beta'\chi_4\right) + \chi_1\sum_1^6{}^{i} \alpha_i'\chi_i \\ \qquad\qquad + \chi_4\sum_1^3{}^{i} \beta_i'\chi_{i+3} = 0, \end{cases}$$

mit den 18 Parametern $v_1, \ldots, v_7, \alpha', \beta', \alpha_1', \ldots, \alpha_6', \beta_1', \beta_2', \beta_3'$ als Moduln.

Auf ganz analogem Wege lassen sich auch die quadratischen Relationen für $p = 8$ ableiten, indem man von der ebenen Normalcurve der 8ten Ordnung, mit zwei dreifachen und 7 zweifachen Punkten, ausgeht. Und ferner viele specielle Fälle, in welchen die Relationen besondere Formen annehmen.*) Ohne auf diese Rechnungen jetzt weiter einzugehen, füge ich noch eine allgemeine Bemerkung bei. Für $p = 5$ und $p = 6$ waren die Relationen derart, dass *alle* bis auf die

*) Einige solche finden sich in einer Note des jüngst früh verstorbenen L. Kraus, diese Annalen, Bd. XVI, p. 245.

letzte *numerische* waren, während die letzte vollständig willkürliche Coefficienten hatte, die, nach Reduction durch die übrigen Relationen, die Moduln vorstellten. Eine analoge Darstellung würde auch bei beliebigem höherem p auf $3p - 3$ Moduln führen; denn eine allgemeine quadratische Relation zwischen p Grössen enthält $\frac{1}{2}p(p+1) - 1$ Coefficienten, von welchen, nach linearer Reduction der Relation durch die übrigen $\frac{1}{2}(p-2)(p-3) - 1$ von ihr linear-unabhängigen numerischen quadratischen Relationen, noch $3p-3$ Parameter übrig blieben. Es entsteht die Frage, ob eine solche Darstellung der Relationen auch für $p > 6$ — welche also für $p = 7$ durch lineare Transformation der obigen Relationen (8) folgen müsste — möglich ist?

Erlangen, Januar 1885.

Notiz
über geodätische Linien auf den dreiaxigen Flächen zweiten Grades, welche sich durch elliptische Functionen darstellen lassen.

Von

A. v. Braunmühl in München.

Es ist bekannt, dass man im Falle der Involution zwischen den sechs Verzweigungspunkten eines hyperelliptischen Integrales erster Gattung (und zwar nur in diesem Falle) dasselbe durch eine Transformation zweiten Grades auf die Summe zweier elliptischer Integrale erster Gattung reduciren kann. Da nun die geodätischen Linien auf den Flächen zweiten Grades, die sich bekanntlich im Allgemeinen durch hyperelliptische Integrale erster Gattung darstellen, von zwei Parametern abhängen, so muss es unter ihnen ausser den bekannten, die durch die Kreispunkte gehen, immer noch andere geben, die sich durch elliptische Functionen darstellen lassen. Diesen Gegenstand habe ich untersucht und bin zu nachstehenden Resultaten gekommen.

1. Ist von zwei geodätischen Linien, welche die Durchschnittscurve zweier confocalen Flächen zweiten Grades berühren und bezüglich auf der einen oder andern dieser Flächen verlaufen, die eine durch elliptische Functionen darstellbar, so ist es auch die andere; der Bogen der von ihnen berührten Krümmungslinie kann durch elliptische Integrale ausgedrückt werden.

Man kann die geodätischen Linien eines Ellipsoides oder zweischaligen Hyperboloides bekanntlich in zwei Arten trennen, je nachdem sie eine Krümmungslinie des einen oder anderen Systems berühren. Nun lässt sich die Involutionsbedingung zwischen sechs Punkten auf fünfzehn verschiedene Arten umschreiben, folglich entsprechen jeder der beiden Gattungen von geodätischen Linien fünfzehn reducirbare Fälle, von denen jedoch vermöge der Grenzen, welchen der zu bestimmende Parameter unterworfen ist, nur vier ins Auge zu fassen

sind. Die genauere Untersuchung dieser Fälle liefert dann folgendes Resultat:

2. Auf jedem Ellipsoide oder zweischaligen Hyperboloide giebt es je nach dem Axenverhältniss mindestens fünf und höchstens sieben Schaaren geodätischer Linien, deren Punkte sich auf die angeführte Art durch elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen. Zwei, bezüglich drei dieser Systeme gehören zu den geodätischen Linien der ersten Art, die andern zwei oder drei zu denen der zweiten Art, während ein Fall je nach dem Axenverhältniss der einen oder anderen Art zugezählt werden muss.

3. Setzt man ferner zwischen den Quadraten der Halbaxen des Ellipsoides, die der Grösse nach α, β, γ sein mögen, die Bedingung

$$\beta^2 = \alpha\gamma$$

voraus, so lassen sich geodätische Linien, welche durch die Kreispunkte dieses Ellipsoides gehen, auf Kreisfunctionen und elliptische Integrale erster Gattung reduciren*), während sie im allgemeinen Falle bekanntlich auf elliptische Transcendenten dritter Gattung führen. Aehnliches gilt für das zweischalige Hyperboloid.

Auf dem einschaligen Hyperboloide wird die Anzahl der Möglichkeiten eine grössere, da hier noch eine dritte Art geodätischer Linien hinzutritt, die keine Krümmungslinie berühren.

4. Es giebt auf jedem einschaligen Hyperboloide höchstens dreizehn und mindestens elf Schaaren geodätischer Linien, deren Punkte sich durch elliptische Functionen eines Parameters ausdrücken lassen; dabei sind im Allgemeinen die Erzeugenden der Fläche nicht mitgerechnet, nur wenn zwischen den Quadraten der Halbaxen des Hyperboloides die Bedingung

$$\alpha\beta = (\alpha + \beta)\gamma$$

besteht, dann fällt eines dieser dreizehn Systeme mit den Erzeugenden zusammen. Drei dieser Schaaren gehören zu den geodätischen Linien der ersten Art, drei weitere zu denen der zweiten Art. Unter den geodätischen Linien der dritten Art, die wieder in zwei Gruppen zu theilen sind, befinden sich fünf Schaaren, während zwei weitere je nach dem Axenverhältniss der Fläche bezüglich zu den Linien erster oder dritter Art und zweiter oder dritter Art gehören.

Zwischen sechs Punkten 1, 2, 3, 4, 5 können bekanntlich gleichzeitig mehrere Involutionen stattfinden, von denen folgende drei Gruppen auf unseren Fall Anwendung finden:

*) Dieser Fall wurde von Herrn Cayley in den Memoirs of the Royal Astronomical Society Part. II, Vol. XXXIX behandelt, ohne dass er jedoch bemerkte, dass die Coordinaten der Punkte einer solchen geodätischen Linie sich direct durch elliptische Functionen ausdrücken lassen.

(1) (14) (23) (56); (14) (25) (36),

(2) (12) (45) (36); (14) (23) (56); (16) (25) (34),

(3) (12) (45) (36); (16) (34) (25); (14) (23) (56); (14) (25) (36)*).

5. Bestehen für irgend eine Fläche die beiden Involutionen (1) gleichzeitig, so vereinigen sich zwei Systeme einer und derselben Art zu einem einzigen und zwischen den Axen einer solchen Fläche tritt eine Bedingungsgleichung auf. Bestehen die drei Involutionen (2) gleichzeitig, so vereinigen sich drei Schaaren derselben Art in eine; die Axen der Fläche sind dann durch zwei Bedingungen verbunden; und endlich zieht das gleichzeitige Eintreten der vier Involutionen das Zusammenfallen der vier zur selben Art gehörigen Schaaren nach sich, wodurch das Axenverhältniss der Fläche ein bestimmtes wird. So fallen z. B. die vier Schaaren der ersten Art auf einem Ellipsoid in eine Schaar zusammen, wenn das Axenverhältniss $\sqrt{3}:\sqrt{2}:\sqrt{1}$ ist.

München, im Januar 1885.

---

*) Vergl. Segre, Sur un cas particulier de la surface de Kummer, Berichte der k. sächs. Ges. d. Wissenschaften, 1884.

Ueber die elliptische Curve fünfter Ordnung des Raumes von vier Dimensionen.

(Auszug aus einem Schreiben an Herrn F. Klein).

Von

Franz Meyer in Tübingen.

In ihrer neuesten Arbeit*) kommen Sie u. A. auf das Gleichungssystem zurück, welches Hr. Bianchi (Bd. 17 dieser Annalen, p. 253) für die elliptische Normalcurve fünfter Ordnung aufgestellt hat. Es scheint darum nicht uninteressant, dass ein allgemeineres Gleichungssystem dieser Art bei rein algebraischen Untersuchungen auftritt.

Ich gehe aus von folgendem Satze, den ich in meiner Schrift „Apolarität etc.**)“ (p. 277 ff.) zuerst aufgestellt und bewiesen habe, dass es im Allgemeinen immer ein *einziges* (eigentliches) Tetraeder giebt, das einer eigentlichen Fläche F_2 zweiter Ordnung (Classe) ein- (um-) und einer eigentlichen cubischen Raumcurve φ_3 um- (ein-) beschrieben ist.

Es kommt hier Alles auf die Gleichung dieses Tetraeders an.

Die Raumcurve φ_3 stelle ich in der bekannten kanonischen Form dar:

$$(1)\qquad \varrho s_0 = \mu^3, \quad \varrho s_1 = 3\lambda\mu^2, \quad \varrho s_2 = 3\lambda^2\mu, \quad \varrho s_1 = \lambda^3$$

wo die s Punktcoordinaten sind.

Der ganz beliebigen F_2 dagegen gebe ich folgende *symbolische* Form:

$$(2)\qquad F_2 = \begin{vmatrix} a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3, & a_1 s_0 + a_2 s_1 + a_3 s_2 + a_4 s_3 \\ b_0 s_0 + b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3, & b_1 s_0 + b_2 s_1 + b_3 s_2 + b_4 s_3 \end{vmatrix} = 0$$

i. e.

$$(2)\qquad \begin{aligned} F_2 \equiv\; & s_0^2 p_{01} + s_1^2 p_{12} + s_2^2 p_{23} + s_3^2 p_{34} \\ & + s_0 s_1 p_{02} + s_1 s_2 p_{13} + s_2 s_3 p_{24} \\ & + s_0 s_2 (p_{03} - p_{12}) + s_1 s_3 (p_{14} - p_{23}) + s_0 s_3 (p_{04} - p_{13}) = 0, \end{aligned}$$

wo die p zehn beliebige Grössen bedeuten.

---

*) Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe. Berichte der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften vom 14. Nov. 1884.

**) Tübingen 1883. [Soeben ist in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Abhandlungen, herausgegeben von Dr. Böklen, II. Heft, eine Arbeit von mir erschienen, die für den in Rede stehenden Satz einen elementaren Beweis enthält. Den 27. Juni 1885.]

(Gehen speciell die p_{ik} über in die wirklichen Determinanten $\begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix}$, so erhalte ich eine F_2, deren Lage zur φ_3 in meiner Schrift studirt ist).

Dann ist die Gleichung des, F_2 ein- und φ_3 umbeschriebenen Tetraeders (l. c. p. 277):

$$(3)\qquad \mu^4 P_4 - \mu^3\lambda P_3 + \mu^2\lambda^2 P_2 - \mu\lambda^3 P_1 + \lambda^4 P_0 = 0$$

wo

$$(4)\qquad P_i \equiv p_{kl}p_{nm} + p_{km}p_{nl} + p_{kn}p_{lm} \quad (p_{ik} = -p_{ki})$$

$$(i, k, l, m, n \text{ cyklisch} = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Zu allem Weiteren ist die Discussion über das Verschwinden der P erforderlich. Das Verschwinden von nur einem P bietet nichts Charakteristisches. Alle übrigen Möglichkeiten sind in folgendem Schema zusammengefasst:

$$(5)\begin{cases} \text{Ia. } P_i=0, P_k=0, P_l\gtrless 0, P_m\gtrless 0, P_n\gtrless 0;\ p_{mn}\gtrless 0, p_{lm}\gtrless 0, p_{ln}\gtrless 0. \\ \text{Ib. } P_i=0, P_k=0, P_l\gtrless 0, P_m\gtrless 0, P_n\gtrless 0;\ p_{mn}=p_{lm}=p_{ln}=0, \\ \text{IIa. } P_i=0, P_k=0, P_l=0, P_m\gtrless 0, P_n\gtrless 0;\ p_{mn}=0, \\ \text{IIb. } P_i=0, P_k=0, P_l=0, P_m=0, P_n=0;\ p_{mn}\gtrless 0, \\ \text{III. } P_i=0, P_k=0, P_l=0, P_m=0, P_n\gtrless 0;\ p_{ni}=p_{nk}=p_{nl}=p_{nm}=0. \end{cases}$$

Das gemeinte Gleichungssystem, das mit dem Bianchi'schen die Haupteigenschaften gemein hat, fliesst aus dem Fall IIb, sobald man statt der einen F_2 (2) eine ganze vierfache lineare Schaar solcher gegeben sein lässt, d. h. sobald die p_{ik} die Form haben:

$$(6)\qquad p_{ik} = \sum_{l=0}^{l=4} p_{ik}^{(l)} x_l$$

wo die x variable Parameter sind.

Deutet man die x als (homogene) Coordinaten eines Punktes in einem Hülfsraum von vier Dimensionen, so sage ich, dass die 5 „Flächenräume zweiter Ordnung“

$$(7)\qquad P_i = 0$$

eine Curve fünfter Ordnung gemein haben (deren Gleichungen für specielle Werthe der $p_{ik}^{(l)}$ in die Bianchi'schen Gleichungen übergehen).

Zum Beweise genügt es, sich auf eine *dreifach*-lineare Schaar von $F_2(2)$ d. i. auf die Formen:

$$(8)\qquad p_{ik} = \sum_{l=0}^{l=3} p_{ik}^{(l)} x_l$$

zu beschränken, und zu zeigen, dass die fünf, im Raume der x befindlichen Flächen zweiter Ordnung

(9) $$P_i = 0$$

fünf Punkte gemein haben.

Dies geht aus der obigen Tabelle sofort hervor, denn von den acht Schnittpunkten der drei Flächen:

(10) $$P_i = 0, \; P_k = 0, \; P_l = 0$$

liegen alle diejenigen auch auf den beiden letzten Flächen:

(11) $$P_m = 0, \; P_n = 0,$$

die nicht der Ebene

(12) $$p_{mn} = 0$$

angehören. Diese Ebene trifft die beiden ersten der drei Flächen (10) $P_i = 0$, $P_k = 0$ i. e. ihre Schnittcurve in *vier* Punkten, von denen aber nur *drei* auch der dritten Fläche $P_l = 0$ angehören, da der vierte bestimmt ist durch die Ebenen:

(13) $$p_{lm} = 0, \; p_{ln} = 0, \; p_{mn} = 0; \quad \text{q. e. d.}$$

Etwaige Einwände, wie z. B. dass die drei Flächen (10) eine ganze gerade Linie gemein haben könnten, oder dass ihre acht Schnittpunkte theilweise coincidiren könnten, werden leicht durch passende Specialisirungen widerlegt.

Aus dem System (7) *geht das Bianchi'sche hervor, sobald man die neunfache Schaar* (2) *von* F_2 (*die* p_{ik} *als variabel gedacht*) *mittelst der Relationen:*

$$a p_{01} = p_{24}, \quad a p_{12} = p_{30}, \quad a p_{23} = p_{41}, \quad a p_{34} = p_{02}, \quad a p_{40} = p_{13}$$

in eine vierfache Schaar übergehen lässt.

a ist dabei eine feste Constante; Bianchi schreibt statt der Buchstaben p, P resp. x, φ. —

Interessant ist, dass genau dieselbe Zahl 5, die oben abgeleitet wurde, auch ein anderes modernes, schon vielfach behandeltes, Problem löst.

Lässt man nämlich das „F_2-Gebüsch" (8) speciell in ein solches übergehen, das auf der φ_3 sechs feste Grundpunkte besitzt, so fliesst aus der obigen Discussion, mit Hülfe der in meiner Schrift (l. c.) erörterten Eigenschaften der Determinantendarstellung (2) sofort das bekannte Resultat:

„Es giebt fünf, (invariantentheoretisch) verschiedene Involutionen vierter Ordnung mit gemeinsamer (gegebener) Functionaldeterminante."

Die beiden Gleichungen fünften Grades, die den beiden genannten Problemen zu Grunde liegen, sind also, abgesehen von der verschiedenen Wahl der Coefficienten, ihrer Natur nach *die gleichen.*

Tübingen, den 19. Januar 1885.

Ueber die Multiplication trigonometrischer Reihen.

Von

Alfred Pringsheim in München.

In einem früheren Aufsatze: „Ueber die Multiplication bedingt convergenter Reihen"*) habe ich u. a. gezeigt, dass — wenn a_ν, a'_ν positive mit wachsendem Index niemals zunehmende Grössen bedeuten — die Convergenz der Reihe $\sum a_\nu a'_\nu$ eine hinreichende Bedingung bildet für die Anwendbarkeit der Cauchy'schen Multiplicationsregel auf die beiden nur als bedingt convergent vorausgesetzten Reihen $\sum (-1)^\nu a_\nu$, $\sum (-1)^\nu a'_\nu$ **). Im folgenden will ich nun mit Benützung der dort gefundenen Resultate den analogen Nachweis für zwei trigonometrische Reihen führen, deren Coefficienten Grössen von der Beschaffenheit jener a_ν, a'_ν mit durchweg gleichen oder alternirenden Vorzeichen sind.

Seien also a_ν, a'_ν zwei unendliche Folgen positiver, mit wachsendem ν niemals zunehmender Grössen von der Beschaffenheit, dass $\lim a_\nu = \lim a'_\nu = 0$ wird und $\sum a_\nu a'_\nu$ convergirt, während $\sum a_\nu$, $\sum a'_\nu$ einzeln divergiren dürfen. Alsdann sind die beiden Reihen

$$(1) \qquad f_1(x) = \sum_1^\infty a_\nu \sin \nu x, \qquad f_2(x) = \sum_1^\infty a'_\nu \sin \nu x$$

im Intervalle $-\pi \leq x \leq +\pi$ — und somit schliesslich für jedes endliche reelle x — convergent (und zwar durchweg *gleichmässig* — mit eventuellem Ausschluss der Stelle $x = 0$ bezw. $x = \pm 2m\pi$, in deren Umgebung die Summen $f_1(x)$, $f_2(x)$ sogar über alle Grenzen wachsen können, ohne dass aber jene Reihen für irgend eine in noch so kleiner, angebbarer Entfernung von 0 bezw. $\pm 2m\pi$ gelegene Stelle x divergent werden). Bildet man nun nach der Cauchy'schen Regel

*) Math. Ann. Bd. XXI, S. 327 ff.

**) a. a. O. S. 363.

(2a) $$f(x) = \sum_1^{\infty}{}_{\nu} \sum_1^{\nu}{}_{\varkappa} a_\varkappa a'_{\nu+1-\varkappa} \sin \varkappa x \sin(\nu+1-\varkappa)x$$

oder auch mit Benützung der Formel $2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

(2b) $$f(x) = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty}{}_{\nu} \left\{ \left(\sum_1^{\nu}{}_{\varkappa} a_\varkappa a'_{\nu+1-\varkappa} \cos(\nu+1-2\varkappa)x \right) - c_{\nu+1} \cos(\nu+1)x \right\},$$

wo zur Abkürzung

(3) $$\sum_1^{\nu}{}_{\varkappa} a_\varkappa a'_{\nu+1-\varkappa} = c_{\nu+1}$$

gesetzt ist, so hat man nach dem von Abel erweiterten Multiplications-Satze*)

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

sofern die Reihe (2a) bezw. (2b) convergirt. Betrachtet man zunächst die Stelle $x = 0$ (bezw. $\pm 2m\pi$), so wird dort $f(x)$ gerade so wie $f_1(x)$ und $f_2(x)$ gliedweise zu Null: es bleibt also nur die Convergenz der obigen Reihe nach Ausschluss von $x = 0$ (bezw. $\pm 2m\pi$) zu erweisen. Für alle übrigen Werthe von x ist nun aber der eine Bestandtheil der Reihe (26), nämlich $\sum c_{\nu+1} \cos(\nu+1)x$ durchweg convergent: denn die Grössen $c_{\nu+1}$ sind offenbar identisch mit den Gliedern derjenigen Reihe, welche durch Anwendung der Multiplicationsregel auf die beiden Reihen $\sum a_\nu$, $\sum a'_\nu$ entstehen würde, und haben, wie ich früher gezeigt habe,**) die Eigenschaft, dass $\lim c_\nu = 0$ und $\sum (c_\nu - c_{\nu+1})$ unbedingt convergent ist, sodass hiermit in der That die Richtigkeit der obigen Behauptung erwiesen ist, und die weitere Convergenzuntersuchung sich also lediglich noch auf die Reihe

$$\varphi(x) = \sum_1^{\infty}{}_{\nu} \sum_1^{\nu}{}_{\varkappa} a_\varkappa a_{\nu+1-\varkappa} \cos(\nu+1-2\varkappa)x$$

zu erstrecken hat. Fasst man in den sämmtlichen Gliedern dieser Reihe d. h. in den Aggregaten von der Form:

$$a_1 a'_\nu \cos(\nu-1)x + a_2 a'_{\nu-1} \cos(\nu-3)x + \cdots + a_{\nu-1} a_2' \cos(\nu-3)x$$
$$+ a_\nu a_1' \cos(\nu-1)x$$

je zwei zur Mitte symmetrisch liegende Summanden zusammen und setzt zur Abkürzung

(4) $$\begin{cases} a_\varkappa a'_\lambda + a_\lambda a'_\varkappa = A_{\varkappa\lambda}, & (\varkappa \lessgtr \lambda) \\ a_\varkappa a'_\varkappa = A_{\varkappa\varkappa} \end{cases}$$

---

*) Crelle's Journal Bd. I, S. 316. — S. auch a. a. O. S. 330.

**) a. a. O. S. 354, 355.

so geht dieselbe — wenn man noch die Glieder mit geradem und ungeradem ν sondert — über in:

$$(5)\quad \varphi(x) = \sum_1^\infty \left\{ \begin{array}{l} A_{\nu+1,\nu+1} \qquad + A_{\nu,\nu+2}\cos 2x + \cdots + A_{1,2\nu+1}\cos 2\nu x \\ + A_{\nu+1,\nu+2}\cos x + A_{\nu,\nu+3}\cos 3x + \cdots + A_{1,2\nu+2}\cos(2\nu+1)x \end{array} \right\}.$$

Um die Convergenz dieser Reihe zu beweisen, betrachte ich zunächst diejenige Reihe $\Phi(x)$, welche aus ihr hervorgeht, wenn man die Glieder nach den Cosinus steigender Multipla von x ordnet, also:

$$(6)\quad \Phi(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \left\{ \cos 2\nu x \sum_1^\infty{}^{\varkappa} A_{\varkappa,\varkappa+2\nu} + \cos(2\nu+1)x \sum_1^\infty{}^{\varkappa} A_{\varkappa,\varkappa+2\nu+1} \right\}$$

$$= \sum_0^\infty{}^{\nu} \left(\sum_1^\infty{}^{\varkappa} A_{\varkappa,\varkappa+\nu} \right) \cos \nu x .$$

Diese Reihe ist aber convergent, weil ihre Coefficienten positive, mit wachsendem ν niemals zunehmende und für $\nu = \infty$ verschwindende Grössen sind.

Es ist nämlich

$$\sum_1^\infty{}^{\varkappa} A_{\varkappa,\varkappa} = \sum_1^\infty{}^{\varkappa} a_\varkappa a'_\varkappa$$

nach Voraussetzung convergent, also endlich und bestimmt. Ausserdem folgt, da die Grössen $A_{\varkappa,\lambda}$, gerade so wie die $a_\varkappa$, $a'_\varkappa$, mit wachsenden Indices niemals zunehmen

$$\sum_1^\infty{}^{\varkappa} A_{\varkappa,\varkappa+\nu+1} \leqq \sum_1^\infty{}^{\varkappa} A_{\varkappa,\varkappa+\nu} < 2 \sum_1^\infty{}^{\varkappa} a_\varkappa a'_\varkappa$$

und

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_1^\infty{}^{\varkappa} A_{\varkappa,\varkappa+\nu} = 0$$

(da die Glieder dieser unbedingt convergenten Reihe für $\nu = \infty$ sämmtlich gegen Null convergiren).

Lässt sich daher schliesslich zeigen, dass für $0 < |x| \leqq \pi$ die Gleichung $\varphi(x) = \Phi(x)$ besteht, so ist damit die Convergenz der Reihe (5) vollständig bewiesen. Es möge nun die Summe der ersten n Doppelglieder der Reihe (5) und (6) bezw. mit $\varphi_n(x)$, $\Phi_n(x)$ bezeichnet werden — (NB. Diese Zusammenfassung von je zwei consecutiven Gliedern thut offenbar der Allgemeinheit des Convergenzbeweises keinen Eintrag, da die betreffenden Glieder auch einzeln genommen schliesslich gegen Null convergiren) — sodass also

$$\varphi_n(x) = \sum_0^{n-1}{}_\nu \left\{ \begin{array}{l} A_{\nu+1,\nu+1} \qquad\quad + A_{\nu,\nu+2}\cos 2x + \cdots + A_{1,2\nu+1}\cos 2\nu x \\ A_{\nu+1,\nu+2}\cos x + A_{\nu,\nu+3}\cos 3x + \cdots + A_{1,2\nu+2}\cos(2\nu+1)x \end{array} \right\}$$

$$= \sum_0^{n-1}{}_\nu \left\{ \cos 2\nu x \sum_1^{n-\nu}{}_\varkappa A_{\varkappa,\varkappa+2\nu} + \cos(2\nu+1)x \sum_1^{n-\nu}{}_\varkappa A_{\varkappa,\varkappa+2\nu+1} \right\}$$

$$\Phi_n(x) = \sum_0^{n-1}{}_\nu \left\{ \cos 2\nu x \sum_1^{\infty} A_{\varkappa,\varkappa+2\nu} + \cos(2\nu+1)x \sum_1^{\infty}{}_\varkappa A_{\varkappa,\varkappa+2\nu+1} \right\}$$

und daher

$$\Delta_n = \Phi_n(x) - \varphi_n(x)$$

$$= \sum_0^{n-1}{}_\nu \left\{ \cos 2\nu x \sum_{n-\nu+1}^{\infty}{}_\varkappa A_{\varkappa,\varkappa+2\nu} + \cos(2\nu+1)x \sum_{n-\nu+1}^{\infty}{}_\varkappa A_{\varkappa,\varkappa+2\nu+1} \right\}$$

$$= \sum_0^{n-1}{}_\nu \left\{ \cos 2\nu x \sum_1^{\infty}{}_\varkappa A_{\varkappa+n-\nu,\varkappa+n+\nu} + \cos(2\nu+1)x \sum_1^{\infty}{}_\varkappa A_{\varkappa+n-\nu,\varkappa+n+\nu+1} \right\}$$

oder wenn noch

$$\sum_1^{\infty}{}_\varkappa A_{\varkappa+\mu,\varkappa+\nu} = C_{\mu,\nu} \tag{7}$$

gesetzt wird:

$$\Delta_n = \sum_0^{n-1}{}_\nu \left\{ C_{n-\nu,n+\nu}\cos 2\nu x + C_{n-\nu,n+\nu+1}\cos(2\nu+1)x \right\}, \tag{8}$$

so kommt es jetzt lediglich noch darauf an zu zeigen, dass Δ_n für hinlänglich grosse Werthe von n beliebig klein wird. Was nun zunächst die hierher in Betracht kommenden Grössen $C_{\mu,\nu}$ betrifft, so genügen dieselben offenbar Beziehungen von der Form

$$C_{\mu+1,\nu+1} \left\{ \begin{array}{l} \leq C_{\mu,\nu+1} \\ \leq C_{\mu+1,\nu} \end{array} \right\} \leq C_{\mu,\nu} \tag{9}$$

und

$$\lim C_{\mu,\nu} = 0$$

sowohl für $\mu = \infty$ *oder* $\nu = \infty$, wie auch für ($\mu = \infty$, $\nu = \infty$). Man hat sodann

$$\Delta_n = C_{n,n} + C_{n,n+1}\cos x + C_{n-1,n+1}\cos 2x + C_{n-1,n+2}\cos 3x + \cdots$$
$$\cdots + C_{1,2n-1}\cos(2n-2)x + C_{1,2n}\cos(2n-1)x$$

und daher durch Multiplication mit $2\sin\frac{x}{2}$

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\Delta_n = 2C_{n,n}\sin\frac{x}{2} + C_{n,n+1}\left(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) + C_{n-1,n+1}\left(\sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right)$$
$$+ C_{n-1,n+2}\left(\sin\frac{7x}{2} - \sin\frac{5x}{2}\right) + \cdots + C_{1,2n-1}\left(\sin\frac{(4n-3)x}{2} - \sin\frac{(4n-5)x}{2}\right)$$
$$+ C_{1,2n}\left(\sin\frac{(4n-1)x}{2} - \sin\frac{(4n-3)x}{2}\right)$$

oder anders geordnet

$$\begin{aligned}2\Delta_n.\sin\frac{x}{2}=C_{n,n}\sin\frac{x}{2}&+(C_{n,n}-C_{n,n+1})\sin\frac{x}{2}\\&+(C_{n,n+1}-C_{n-1,n+1})\sin\frac{3x}{2}\\&+(C_{n-1,n+1}-C_{n-1,n+2})\sin\frac{5x}{2}\\&+(C_{n-1,n+2}-C_{n-2,n+2})\sin\frac{7x}{2}\\&+\cdots\cdots\cdots\\&+(C_{2,2n-2}-C_{2,2n-1})\sin\frac{(4n-7)x}{2}\\&+(C_{2,2n-1}-C_{1,2n-1})\sin\frac{(4n-5)x}{2}\\&+(C_{1,2n-1}-C_{1,2n})\sin\frac{(4n-3)x}{2}\\&+C_{1,2n}\sin\frac{(4n-1)x}{2}.\end{aligned}$$

Von den hier auftretenden Differenzen der Grössen $C_{\mu,\nu}$ ist die erste, dritte, ... letzte positiv (event. auch Null), die zweite, vierte, ... vorletzte negativ (event. auch Null). Mithin kann man setzen:

$$\begin{aligned}2\left|\Delta_n\sin\frac{x}{2}\right|&<C_{n,n}+(C_{n,n}-C_{n,n+1})-(C_{n,n+1}-C_{n-1,n+1})\\&\quad+(C_{n-1,n+1}-C_{n-1,n+2})-(C_{n-1,n+2}-C_{n-2,n+2})\\&\quad+\cdots\cdots\cdots\\&\quad+(C_{2,2n-2}-C_{2,2n-1})-(C_{2,2n-1}-C_{1,2n-1})\\&\quad+(C_{1,2n-1}-C_{1,2n})+C_{1,2n}\\&<2(C_{nn}+C_{n-1,n+1}+\cdots+C_{1,2n-1})\\&\quad-2(C_{n,n+1}+C_{n-1,n+2}+\cdots+C_{1,2n})+2C_{1,2n}\end{aligned}$$

oder kürzer geschrieben

$$(10)\qquad\left|\Delta_n\sin\frac{x}{2}\right|<\sum_0^{n-1}{}^{\nu}\left\{C_{n-\nu,n+\nu}-C_{n-\nu,n+\nu+1}\right\}+C_{1,2n}.$$

Nun ist nach Gl. (7):

$$\begin{aligned}C_{n-\nu,n+\nu}-C_{n-\nu,n+\nu+1}&=\sum_1^{\infty}{}^{\varkappa}\left\{A_{\varkappa+n-\nu,\varkappa+n+\nu}-A_{\varkappa+n-\nu,\varkappa+n+\nu+1}\right\}\\&=\sum_1^{\infty}{}^{\varkappa}\left\{a_{\varkappa+n-\nu}(a'_{\varkappa+n+\nu}-a'_{\varkappa+n+\nu+1})+a'_{\varkappa+n-\nu}(a_{\varkappa+n+\nu}-a_{\varkappa+n+\nu+1})\right\}\\&<a_{n-\nu}\sum_1^{\infty}{}^{\varkappa}(a'_{\varkappa+n+\nu}-a'_{\varkappa+n+\nu+1})+a'_{n-\nu}\sum_1^{\infty}{}^{\varkappa}(a'_{\varkappa+n+\nu}-a'_{\varkappa+n+\nu+1})\\&<a_{n-\nu}a'_{n+\nu}+a'_{n-\nu}a_{n+\nu}\end{aligned}$$

und somit

$$\sum_0^{\nu-1}\left\{C_{n-\nu,n+\nu}-C_{n-\nu,n+\nu+1}\right\}<\sum_0^{n-1}(a_{n-\nu}a'_{n+\nu}+a_{n+\nu}a'_{n-\nu})$$

$$<\sum_1^{2n-1}a_\nu a'_{2n-\nu}+a_n a'_n$$

$$<c_{2n}+a_n a'_n \qquad \text{(Gl. 3)}$$

sodass die Ungleichung (10) schliesslich übergeht in:

$$\left|\Delta_n \sin\frac{x}{2}\right|<c_{2n}+C_{1,2n}+a_n a'_n.$$

Da aber jede der rechts stehenden Grössen durch Wahl hinlänglich grosser Werthe von n beliebig klein wird, so folgt das nämliche — so lange x von 0 verschieden ist — für $|\Delta_n|$ selbst d. h. die Reihe (5) mit der Summe $\varphi(x)$ convergirt für $0<|x|\leqq\pi$ — und folglich für alle endlichen reellen x mit Ausschluss von $x=0$ bezw. $=\pm 2m\pi$ — gegen den Werth $\Phi(x)$. In der Nähe der Stelle $x=0$ (bezw. $\pm 2m\pi$) wird sie offenbar im allgemeinen*) ungleichmässig convergiren: in der That muss man auch, um Δ_n hinlänglich klein zu machen, n grösser und grösser nehmen, je näher x an die Stelle 0 (bezw. $\pm 2m\pi$) heranrückt.

Als Resultat der bisherigen Untersuchungen ergiebt sich:

Die Reihen

$$f_1(x)=\sum_1^\infty a_\nu \sin \nu x, \qquad f_2(x)=\sum_1^\infty a'_\nu \sin \nu x$$

wo die a_ν, a'_ν positive, mit wachsendem ν niemals zunehmende und für $\nu=\infty$ so verschwindende Grössen bedeuten, dass $\sum a_\nu a'_\nu$ convergirt, lassen sich nach der Cauchy'schen Regel multipliciren, sodass also:

$$(11)\ f_1(x)\cdot f_2(x)=f(x)=\sum_1^\infty\sum_1^\nu a_\varkappa a'_{\nu+1-\varkappa}\sin\varkappa x\cdot\sin(\nu+1-\varkappa)x$$

$$=\frac{1}{2}\sum_1^\infty\left\{\left(\sum_1^\nu a_\varkappa a'_{\nu+1-\varkappa}\cos(\nu+1-2\varkappa)x\right)-c_{\nu+1}\cos(\nu+1)x\right\}$$

wenn

$$\sum_1^\nu a_\varkappa a'_{\nu+1-\varkappa}=c_{\nu+1}$$

gesetzt wird.

*) Nämlich allemal, wenn nicht mindestens eine der beiden Reihen Σa_ν, $\Sigma a'_\nu$ convergirt — ein Fall der hier überhaupt nicht weiter in Betracht kommt, weil ja dann die betreffende Sinusreihe unbedingt convergirt.

Dabei stimmt $f(x)$ mit eventuellem Ausschluss der Stelle $x=0$ (bezw. $\pm 2m\pi$) mit der Summe der geordneten Cosinusreihe

$$F(x)=\frac{1}{2}C_{0,0}+\frac{1}{2}C_{0,1}\cos x+\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}(C_{0,\nu+1}-c_{\nu+1})\cos(\nu+1)x$$

wo:

$$C_{0,0}=\sum_{1}^{\infty}{}^{\varkappa}a_{\varkappa},\,a'_{\varkappa},$$

$$C_{0,\nu+1}=\sum_{1}^{\infty}{}^{\varkappa}(a_{\varkappa}a'_{\varkappa+\nu+1}+a_{\varkappa+\nu+1}a'_{\varkappa})\qquad\text{(Gl. (7) u. (4)).}$$

Für die Stelle $x=0$ hat man $f(0)=0$ (und ebenso allgemein für $x=\pm 2m\pi$), dagegen $F(0)=\lim f(0\pm\delta)$, also im allgemeinen von Null verschieden, und zwar positiv endlich oder unendlich je nach der Beschaffenheit von $\lim f(0\pm\delta)=\lim f_1(0\pm\delta)\cdot\lim f_2(0\pm\delta)$. (NB. Sind also $\lim f_1(0\pm\delta)$, $\lim f_2(0\pm\delta)$ endlich und von Null verschieden, so besitzt $f(x)$ an der Stelle $x=0$ bezw. $\pm 2m\pi$ eine endliche hebbare Unstetigkeit*).

Setzt man durchweg $(x+\pi)$ an Stelle von x, so folgt mit Berücksichtigung der Beziehung $\sin\nu(x+\pi)=(-1)^{\nu}\sin\nu x$, dass die Multiplicationsregel auch gültig bleibt, wenn an Stelle der durchweg positiv gedachten Grössen a_{ν}, a'_{ν} solche mit alternirenden Vorzeichen treten. (NB. An die Stelle der ausgezeichneten Werthe $x=0$ bezw. $\pm 2m\pi$ treten hier natürlich die Werthe $x=\pm(2m+1)\pi$, wo m eine ganze Zahl incl. Null bedeutet).

Ferner kann man das Product zweier ähnlich gearteten Cosinusreihen oder einer Sinus- und einer Cosinus-Reihe ganz analog behandeln. Setzt man etwa

$$\varphi_1(x)=\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}a_{\nu}\cos\nu x,\qquad\varphi_2(x)=\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}a'_{\nu}\cos\nu x,$$

so ergiebt sich offenbar

$$\text{(12)}\qquad\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)=\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\sum_{0}^{\nu}{}^{\varkappa}a_{\varkappa}a'_{\nu-\varkappa}\cos\varkappa x\cos(\nu-\varkappa)x$$

$$=a_0a_0'+\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}(a_0a_{\nu}'+a_0'a_{\nu})\cos\nu x$$

$$+\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\sum_{1}^{\nu}{}^{\varkappa}a_{\varkappa}a'_{\nu+1-\varkappa}\cos\varkappa x\cos(\nu+1-\varkappa)x$$

---

*) S. den folgenden Aufsatz, Art. V.

$$= a_0 a_0' + (a_0 a_1' + a_0' a_1) \cos x$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_1^\infty \Big\{ (2 a_0 a'_{\nu+1} + 2 a_0' a_{\nu+1} + c_{\nu+1}) \cos (\nu + 1) x$$

$$+ \sum_1^\nu a_\varkappa a'_{\nu+1-\varkappa} \cos (\nu + 1 - 2\varkappa) x \Big\}$$

und

$$(13) \quad \varphi_1(x) \cdot f_2(x) = \sum_0^\infty \sum_1^\nu a_\varkappa a'_{\nu-\varkappa} \cos \varkappa x \sin (\nu - \varkappa) x$$

$$= a_0 \sum_1^\infty a'_\nu \sin \nu x$$

$$+ \sum_1^\infty \sum_1^\nu a_\varkappa a'_{\nu+1-\varkappa} \cos \varkappa x \sin (\nu + 1 - \varkappa) x$$

$$= a_0 a_1' \sin x + \frac{1}{2} \sum_1^\infty \Big\{ (2 a_0 a'_{\nu+1} + c_{\nu+1}) \sin (\nu + 1) x$$

$$+ \sum_1^\nu a_\varkappa a'_{\nu+1-\varkappa} \sin (\nu + 1 - 2\varkappa) x \Big\},$$

da die Convergenz dieser Reihen aus dem bisher gesagten ohne weiteres ersichtlich ist. Auch lässt sich wiederum das erste dieser Producte durch blosse Umordnung der Glieder in eine gewöhnliche Cosinusreihe, das zweite in eine Sinusreihe umformen (wobei aber analog wie früher gewisse Stellen auszuschliessen sind).

Aus den Gleichungen (11), (12), (13) zusammengenommen ergiebt sich dann aber — wenn b_ν, b'_ν Grössen von ähnlicher Beschaffenheit wie a_ν, a'_ν bedeuten — unmittelbar die Anwendbarkeit der Multiplicationsregel auf zwei zusammengesetzte trigonometrische Reihen von der Form

$$a_0 + \sum_1^\infty (a_\nu \cos \nu x \pm b_\nu \sin \nu x),$$

$$a_0' + \sum_1^\infty (a'_\nu \cos \nu x \pm b'_\nu \sin \nu x)$$

und zwar lässt sich auch hier wieder die resultirende Productreihe nach Ausschluss gewisser Stellen x in eine nach steigenden Vielfachen von x geordnete Sinus-Cosinus-Reihe umformen.

Dieses Resultat lässt sich schliesslich noch folgendermassen verallgemeinern. Zunächst kann man statt x durchweg setzen px, wo p

eine positive ganze Zahl bezeichnen mag. Bedeutet sodann q eine weitere positive ganze Zahl, so hat man:

$$a_0 + \sum_1^\infty \{a_\nu \cos(p\nu \pm q)x + b_\nu \sin(p\nu + q)x\}$$

$$= a_0 + \cos qx \sum_1^\infty \{a_\nu \cos p\nu x + b_\nu \sin p\nu x\}$$

$$\pm \sin qx \sum_1^\infty \{b_\nu \cos p\nu x - a_\nu \sin p\nu x\}$$

u. s. f. — sodass sich also das Multiplicationsresultat für zwei Reihen dieser Art aus den bisher gewonnenen Resultaten zusammensetzen lässt.

Schreibt man endlich noch $x + \alpha$ statt x (wo α beliebig reell), so erhält man den folgenden Multiplicationssatz:

Bedeuten a_ν, a'_ν, b_ν, b'_ν Grössen mit durchweg gleichem oder durchweg alternirendem Vorzeichen, welche mit wachsendem ν niemals zunehmen und für $\nu = \infty$ so verschwinden, dass die Reihen $\sum a_\nu a'_\nu$, $\sum a_\nu b'_\nu$, $\sum b_\nu a'_\nu$, $\sum b_\nu b'_\nu$ unbedingt convergiren, so lässt sich das Product der beiden Reihen

$$a_0 + \sum_1^\infty \{a_\nu \cos(p\nu \pm q)(x+\alpha) \pm b_\nu \sin(p\nu \pm q)(x+\alpha\},$$

$$a'_0 + \sum_1^\infty \{a'_\nu \cos(p\nu \pm q)(x+\alpha) \pm b'_\nu \sin(p\nu \pm q)(x+\alpha\}$$

durch eine einfach unendliche Reihe darstellen, deren Glieder nach der Cauchy'schen Regel zu bilden sind, und die sich auch — nach Ausschluss gewisser Stellen x — in eine gewöhnliche (d. h. nach steigenden Multiplen von $(x+\alpha)$ geordnete) trigonometrische Reihe umformen lässt.

Ich möchte bei dieser Gelegenheit eine Ungenauigkeit berichtigen, welche mir in dem oben citirten Aufsatze „Ueber die Multiplication bedingt convergenter Reihen" nachträglich aufgefallen ist. Es soll da an einer Stelle*) gezeigt werden, dass das Verschwinden von

$$\lim a_n \sum_1^n{}_\varkappa b_\nu \quad \text{und} \quad \lim b_n \sum_1^n{}_\varkappa a_\varkappa \qquad (n = \infty)$$

*) a. a. O. S. 360 ff. Uebrigens findet sich da auch auf S. 362 ein sinnstörender Druckfehler: es muss im Nenner des dort mehrfach vorkommenden Ausdruckes $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$ stets a_n statt a_{2n} heissen.

welche als *hinreichende* Bedingung für das Verschwinden von

$$\lim c_n = \lim \sum_0^n {}^{\varkappa} a_\varkappa b_{n-\varkappa}$$

erkannt worden, auch eine *nothwendige* Bedingung hierfür darstellt. Die Richtigkeit dieser letzteren Behauptung ergiebt sich aber ganz ohne weiteres, wenn man beachtet, dass die $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ der Voraussetzung gemässs positive, mit wachsendem Index niemals zunehmende Grössen bedeuten und dass daher

$$c_n \left\{ \begin{array}{l} > a_n \sum_0^n {}^{\varkappa} b_\varkappa, \\ > b_n \sum_0^n {}^{\varkappa} a_\varkappa, \end{array} \right.$$

während der an der betreffenden Stelle geführte Beweis — abgesehen von seiner ganz überflüssigen Weitläufigkeit — auf der im allgemeinen gar nicht zutreffenden Supposition beruht, dass, wenn $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\varepsilon_n}{n}$ gesetzt wird und $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ist, ε_n für $n = \infty$ einen bestimmten Grenzwerth besitzt. —

München October 1883.

Ueber analytische Ausdrücke mit hebbaren Unstetigkeiten.

Von

Alfred Pringsheim in München.

I. Definition und erste Beispiele.

Wenn eine Function $f(x)$ der reellen Variablen x so beschaffen ist, dass die Functionswerthe auf beiden Seiten einer gewissen Stelle $x=a$ beliebig wenig von einander differiren, sobald nur x hinlänglich der Stelle a genähert wird, während $f(a)$ selbst einen Werth besitzt, der von jenen Nachbarwerthen um ein Endliches oder Unendlichgrosses abweicht, so sagt man, $f(x)$ erleide an der Stelle $x=a$ eine *hebbare* Unstetigkeit (sofern ja durch Abänderung des Functionswerthes für diese einzelne Stelle die betreffende Unstetigkeit „gehoben“ werden kann). Präciser ausgedrückt muss sich also in einem solchen Falle bei beliebig klein vorgegebenem σ eine Grösse δ so fixiren lassen, dass für

$$0<\delta_1\leqq\delta, \qquad 0<\delta_2\leqq\delta$$

die Differenz

$$|f(a+\delta_1)-f(a+\delta_2)|<\sigma$$

wird, während

$$\left.\begin{array}{l}|f(a+\delta_1)-f(a)|\\ |f(a-\delta_2)-f(a)|\end{array}\right\}>A$$

bleibt, wo A eine positive endliche Grösse bedeutet.

Diese Definition lässt sich offenbar mutatis mutandis auch sofort auf Functionen einer complexen Variablen übertragen, wobei dann naturgemäss derartige hebbare Unstetigkeiten nicht bloss in einzelnen Punkten sondern auch längs ganzer Linien gedacht werden können.

Riemann, der wohl zuerst auf die Möglichkeit derartiger Discontinuitäten aufmerksam gemacht haben dürfte*), hat meines Wissens kein Beispiel eines analytischen Ausdruckes mit der gedachten Eigenschaft angegeben. Dass aber wirklich im Sinne der älteren Mathematiker

*) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse: § 10 am Ende. (Ges. Werke, S. 21).

analytische d. h. durch arithmetische Operationszeichen darstellbare Functionen dieser Gattung existiren, hat Herr Seidel dargethan, indem er den folgenden Ausdruck construirte:*)

$$(1) \qquad P = \lim P_n = \lim \frac{n}{x^n + x^{-n} + n} \qquad (n = \infty),$$

welcher bei reeller Variabilität des x lediglich für $x = \pm 1$ den Werth 1 annimmt, sonst aber durchweg verschwindet, also in der That an den beiden Stellen $x = \pm 1$ eine hebbare Unstetigkeit erleidet — während bei complex veränderlichem x die nämliche Art von Discontinuität allgemein für $|x| = 1$, also längs der ganzen Peripherie des Einheitskreises auftritt.

Ein noch einfacheres Beispiel liefert auch derjenige Ausdruck, von welchem Herr Du Bois-Reymond zur Erläuterung der unendlich verzögerten Reihenconvergenz ausging,**) nämlich:

$$(2) \qquad S = \lim S_n = \lim \frac{nx}{1 + nx} \qquad (n = \infty)$$

welcher für alle reellen und complexen x mit Ausschluss von $x = 0$ den Werth 1, dagegen für $x = 0$ den Werth 0 hat.

Von ähnlicher Natur sind ferner die folgenden beiden von mir bei anderer Gelegenheit***) aufgestellten Ausdrücke

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} \lim \left\{ \dfrac{n}{x^n + n} + \dfrac{nx^n}{nx^n + 1} \right\} \\ \lim \left\{ \dfrac{x^n}{x^n + n} + \dfrac{1}{nx^n + 1} \right\} \end{array}\right. \qquad (n = \infty),$$

welche längs des Einheitskreises den Werth 2, sonst durchweg den Werth 1 annehmen.†)

---

*) Crelle's Journal, Bd. 73, S. 304.

**) „Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen" — Antritts-Programm etc. S. 25. — Die Reihenform für den obigen Grenzwerth, nämlich

$$S = \sum_1^\infty \left\{ \frac{\nu x}{1 + \nu x} - \frac{(\nu - 1)x}{1 + (\nu - 1)x} \right\} = \sum_1^\infty \frac{x}{\nu^2 x^2 + \nu x(2 - x) - x + 1}$$

ist für den hier vorliegenden Zweck nicht brauchbar, weil bei Annäherung des x an den Nullpunkt von der negativen Seite her, die Reihe gerade in unmittelbarer Nähe der Unstetigkeitsstelle $x = 0$ in Folge des Auftretens unendlich grosser Glieder unendlich oft unbrauchbar wird.

***) Math. Ann. Bd. XXII, S. 115.

†) Bei Beschränkung der Variablen x auf das reelle Gebiet wären etwa noch als besonders einfache Ausdrücke der betrachteten Art zu nennen:

$$\lim (\cos x)^n, \quad \lim (\sin x)^n, \quad \lim \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n.$$

Schliesslich wäre hier noch, wenn man die oben gegebene Definition der hebbaren Unstetigkeit dahin erweitert, dass an den betreffenden Unstetigkeitsstellen a der Ausdruck $f(a)$ eventuell auch unbestimmt werden darf, das Quadrat der von Herrn Weierstrass mitgetheilten Tannery'schen Function, nämlich

$$\lim\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right)^2 \text{*)}$$

anzuführen, ein Ausdruck, welcher im allgemeinen den Werth 1 repräsentirt, längs des Einheitskreises unbestimmt wird.

Allen diesen Ausdrücken sind zweierlei charakteristische Merkmale gemeinsam, durch welche sie sich von den in der Analysis zumeist vorkommenden Functionalausdrücken unterscheiden, nämlich:

1) Sie besitzen mit Ausnahme der Unstetigkeitsstellen durchweg *constante* Werthe.
2) Sie haben die Form von expliciten Grenzwerthen, welche ausser von der Variablen x von einem ins Unendliche wachsenden Parameter n abhängen.

Nun könnte man freilich ad 1) durch multiplicative oder additive Verbindung dieser Ausdrücke mit einer beliebig veränderlichen, an der betreffenden Stelle stetigen Function $\varphi(x)$ jene hebbare Unstetigkeit auch ohne weiteres auf irgendwie veränderliche Functionen übertragen: immerhin würde aber bei derartigen Combinationen — wie $P \,.\, \varphi(x)$, $\varphi(x) + S$ — die hebbare Unstetigkeit nicht als ein wesentliches und untrennbares Ingrediens des veränderlichen Bestandtheiles der Function, sondern als eine rein äusserlich damit verbundene Zuthat erscheinen.

Ad 2) wäre zu bemerken, dass man jeden der obigen Grenzwerthe auch in die analytisch üblichere Form einer convergirenden unendlichen Reihe umsetzen könnte, wie man ja jeden beliebigen Grenzwerth $G = \lim G_n$ folgendermassen umformen kann:

$$G = G_\varkappa + \sum_{\varkappa}^{\infty}(G_{\nu+1} - G_\nu)$$

(worauf auch Herr Seidel a. a. O. ausdrücklich aufmerksam macht): indessen würde eine Reihe dieser Form immer nur einen sehr *speciellen* Reihentypus repräsentiren, nämlich denjenigen, welcher durch die Existenz einer rationalen Summatrix charakterisirt ist, wobei also die Summe der ersten n Glieder als rationale Function von n darstellbar ist.**)

---

*) Monatsberichte der Berliner Akademie 1881. S. 218.

**) Dass die betreffenden Reihen für den Fall einer complexen Variablen x — gerade so wie die Reihe für den Ausdruck (2) oben für negative x — in

Nach alledem müssen die obigen Ausdrücke den Eindruck ganz specieller ad hoc construirter Beispiele machen, welche die Möglichkeit hebbarer Discontinuitäten allenfalls wie ein ganz exceptionelles analytisches Curiosum erscheinen lassen, schwerlich aber die Vermuthung erwecken, dass das Auftreten der gedachten Erscheinung ein überaus häufiges ist, und dass unzählige — um mit Jacobi zu reden — „vernünftige" Functionen solche Unstetigkeiten besitzen. Dass das letztere nun wirklich der Fall ist, soll die folgende Betrachtung lehren: es wird sich dabei zeigen, dass in der Theorie der Functionen einer reellen Variablen — und von solchen soll im folgenden durchweg nur die Rede sein — die hebbaren Unstetigkeiten ganz und garnichts ungewöhnliches sind, dass sie beispielsweise noch weit häufiger auftreten, als die sprungweisen Veränderungen, welche seit der Entdeckung der Fourier'schen Reihen Jedermann geläufig geworden sind. Die ungleichmässige Convergenz, welche die Ursache jener *sprungweisen* Aenderungen bildet, erzeugt nämlich noch viel öfter *hebbare* Unstetigkeiten: insbesondere wird sich ergeben, dass *jede* bedingt convergirende Reihe die Bildung von unendlich vielen Functionen mit der verlangten Eigenschaft ermöglicht.

II. Unbedingt convergirende Reihen mit einer Stelle bedingter Convergenz.

Es werde mit $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$,... eine unendliche Folge von Functionen der reellen Variablen x bezeichnet, welche innerhalb eines gewissen Intervalles $x_0 < x < x_1$ stetig sind. Ist sodann die Reihe

$$S(x) = \sum_0^\infty \varphi_\nu(x)$$

für dieses Intervall im allgemeinen *unbedingt*, nur für eine gewisse Stelle a desselben *bedingt*, aber *gleichmässig* convergent, so stellt die Summe $S(x)$ eine für das ganze Intervall, insbesondere auch für $x = a$ stetige Function von x dar. Werden jetzt die Glieder der obigen Reihe irgendwie umgestellt, so wird bei geeigneter Wahl der neuen Anordnung an der Stelle a, wo die Reihe nur bedingt convergirt, jede beliebige Summe hervorgebracht werden können, während für das ganze übrige Intervall — auch in der beiderseitigen unmittelbaren Nachbarschaft der Stelle a — die Summe der Reihe in keiner Weise alterirt wird. Es wird somit die Summe der gehörig umgeordneten Reihe eine

---

der unmittelbaren Nähe der Unstetigkeitsstelle bezw. Unstetigkeitslinie unendlich oft versagen, habe ich bereits früher gelegentlich der Betrachtung der Ausdrücke (3) betont: a. a. O. S. 116.

Function darstellen, welche an der Stelle a eine hebbare Unstetigkeit von beliebig vorzuschreibender Grösse besitzt.

Von diesem allgemeinen Principe mache ich nun die folgende Anwendung. Es sei $\sum_{0}^{\infty} c_\nu$ eine bedingt convergirende Reihe, $f(x)$ eine von der reellen Veränderlichen x abhängige Function (die übrigens auch complexe Werthe annehmen darf). Ferner besitze der absolute Betrag von $f(x)$ an irgend einer Stelle $x = a$, an welcher $f(x)$ als stetig vorausgesetzt wird, ein Maximum, sodass also innerhalb eines gewissen die Stelle a enthaltenden Intervalles $x = x_0$ bis $x = x_1$ $\left|\frac{f(x)}{f(a)}\right|$ durchweg < 1, nur für $x = a$ gerade $= 1$ wird. Alsdann ist die Reihe

$$S(x) = \sum_{0}^{\infty} c_\nu \left\{\frac{f(x)}{f(a)}\right\}^\nu$$

für das Intervall $x_0 \ldots x_1$ *unbedingt* convergent mit einziger Ausnahme der Stelle $x = a$, wo sie in $\sum c_\nu$ übergeht und also der Voraussetzung gemäss nur bedingt convergirt. Es stellt somit $S(x)$ als Summe einer convergenten Potenzreihe in $f(x)$ innerhalb jenes Intervalles — und zwar nach dem Abel-Dirichlet'schen Stetigkeitssatze einschliesslich der Stelle $x = a$ — eine stetige Function von $f(x)$ und folglich, soweit $f(x)$ selbst stetig, eine solche von x dar: letzteres gilt also insbesondere für die Stelle $x = a$. Hingegen wird wiederum die gehörig umgeordnete Reihe, deren Summe mit $\overline{S(x)}$ bezeichnet werden möge, an der Stelle a einen von $S(a) = \sum c_\nu$ um eine beliebig vorzuschreibende Grösse abweichende Werthe annehmen, während im ganzen übrigen Intervalle $\overline{S(x)}$ mit $S(x)$ völlig übereinstimmt: die Function $\overline{S(x)}$ besitzt also für $x = a$ eine hebbare Unstetigkeit.

So convergirt z. B. die folgende Reihe

$$c_0 + c_1 \cos^2 x + c_2 \cdot \cos^4 x + \cdots + c_n \cos^{2n} x + \cdots$$

für alle endlichen reellen x mit Ausschluss derjenigen von der Form $x = \pm m\pi$ (wo m eine ganze positive Zahl einschliesslich der Null bedeutet) *unbedingt*, für $x = \varkappa\pi$ jedoch nur bedingt, sofern die Reihe $\sum c_\nu$ wiederum als bedingt convergent vorausgesetzt wird: ihre Summe erleidet mithin bei geeigneter Umordnung der Glieder an allen Stellen $x = \varkappa\pi$ die nämliche hebbare Unstetigkeit. Nimmt man etwa speciell $c_\nu = (-1)^\nu \frac{1}{\nu}$, $c_0 = 0$, so hat man bekanntlich

$$S(x) = \frac{\cos^2 x}{1} - \frac{\cos^4 x}{2} + \frac{\cos^6 x}{3} - \cdots = \lg(1 + \cos^2 x)$$

und diese Reihe ist convergent und stetig für alle endlichen reellen x, auch diejenigen von der Form $x = \pm m\pi$, wo

$$\cos(\pm m\pi) = \cos m\pi = (-1)^m$$

und

$$S(\pm m\pi) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \lg 2$$

wird. Ordnet man hingegen die obige Reihe beispielsweise so um, dass auf je zwei positive Glieder je ein negatives folgt, also folgendermassen:

$$\overline{S(x)} = \sum_0^\infty \left\{ \frac{\cos^{8\nu+2} x}{4\nu+1} + \frac{\cos^{8\nu+6} x}{4\nu+3} - \frac{\cos^{4\nu+4} x}{2\nu+2} \right\},$$

so erscheint an allen Stellen $x = \pm m\pi$ die Summe

$$\overline{S(\pm m\pi)} = \sum_0^\infty \left\{ \frac{1}{4\nu+1} + \frac{1}{4\nu+3} - \frac{1}{2\nu+2} \right\} = \frac{3}{2} \lg 2$$

und es erhält somit $\overline{S(x)}$ dort plötzlich das Increment $\frac{1}{2} \lg 2$.

Aehnliches gilt — wenn $\sum c_\nu$ wieder als nur bedingt convergent vorausgesetzt wird — von den Reihen:

$$\sum_0^\infty \frac{c_\nu}{(1+x^2)^\nu}, \qquad \sum c_\nu \left(\frac{\sin x}{x}\right)^\nu,$$

deren Summen in dieser Anordnung für *alle* reellen x endlich und stetig sind, hingegen bei geeigneter Umordnung an der Stelle $x = 0$ unstetig werden*), während bei der folgenden Reihe:

$$\sum_0^\infty c_\nu \left(\frac{p - x^2}{p}\right)^\nu,$$

wo p eine positive Grösse bedeutet, das Convergenz-Intervall die Grenzen $\pm\sqrt{2p}$ besitzt und der Werth $x = 0$ wiederum als kritische Stelle der gedachten Art erscheint. —

Die vorstehende Betrachtung lässt sich u. a. benützen, um eine eigenthümliche analytische Darstellung für solche Functionen zu erhalten, welche mit einer gegebenen Function $f(x)$ durchweg übereinstimmen, jedoch an einer beliebig vorzuschreibenden Stelle $x = a$ eine hebbare

---

*) Hierbei mag, um für $x = 0$ jede Unbestimmtheit zu vermeiden, unter $\frac{\sin x}{x}$ die Reihe

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$$

verstanden werden.

Unstetigkeit besitzen. Hierzu ist offenbar mit Benützung des bisher gesagten nur zweierlei nöthig, nämlich: 1) aus der gegebenen Function $f(x)$ eine andere $\Phi(fx)$ zu bilden, deren absoluter Betrag als absolutes Maximum den Werth 1 und diesen nur an der einen Stelle $x = a$ erreicht; 2) die Coefficienten c_ν der Reihe $S(x) = \sum c_\nu \Phi^\nu(fx)$ so zu wählen, dass die letztere eine Summe von der Form $F(fx)$ besitzt, aus der sich $f(x)$ eindeutig als Function von $S(x)$ darstellen lässt. Ergiebt sich dann etwa aus der Gleichung

$$S(x) = \sum c_\nu \Phi^\nu(fx) = F(fx)$$

die Beziehung

$$f(x) = \psi(Sx) = \psi\left\{\sum c_\nu \Phi^\nu(fx)\right\},$$

so ist offenbar $\psi(S(x))$ ein Ausdruck, welcher bei geeigneter Umordnung der Reihe $S(x)$ an der Stelle $x = a$ hebbar unstetig wird, im übrigen aber durchweg mit $f(x)$ übereinstimmt.

Aus der unbegrenzten Anzahl von Möglichkeiten, welche sich für die wirkliche Ausführung dieser Methode darbieten, möge wegen ihrer relativen Einfachheit die folgende hervorgehoben werden, bei welcher der resultirende Endausdruck mit einer beliebig vorgelegten *reellen* Function $f(x)$ zusammenfällt, jedoch an einer einzelnen vorgeschriebenen Stelle $x = a$ einen rein imaginären Unstetigkeitszuwachs von ebenfalls beliebig vorzuschreibender Grösse erhält.

Sei also $f(x)$ eine Function, welche überhaupt nur reelle Werthe annimmt oder doch nur für ein gewisses Intervall in Betracht kommt, wo dies der Fall ist. An der Stelle a, wo schliesslich die hebbare Unstetigkeit zum Vorschein kommen soll, wird $f(x)$ als stetig vorausgesetzt. Nimmt dann $f(x)$ den Werth $f(a)$ überhaupt bezw. in dem betrachteten Intervalle nur *ein*mal — nämlich für $x = a$ — an, so wird offenbar die Differenz $f(x) - f(a)$ *nur* für $x = a$ verschwinden, und daher der absolute Betrag von $1 + i\{f(x) - f(a)\}$ nämlich

$$\sqrt{1 + \{f(x) - f(a)\}^2}$$

abgesehen von der Stelle $x = a$ stets > 1, an der Stelle $x = a$ gerade $= 1$ sein, und folglich wird der reciproke Werth von $1 + i\{f(x) - f(a)\}$ den Bedingungen des oben mit $\Phi(fx)$ bezeichneten Ausdruckes genügen.

Nimmt dagegen $f(x)$ den Werth $f(a)$ auch noch für andere Werthe von x an, so wird offenbar ein Ausdruck der folgenden Form

$$1 + (x-a)^2 + i\,\{f(x) - f(a)\}$$

einen absoluten Betrag, nämlich

$$\sqrt{\{1 + (x-a)^2\}^2 + \{f(x) - f(a)\}^2}$$

besitzen, welcher *nur* für $x = a$ den Werth 1 annimmt, sonst aber stets > 1 bleibt.

Man umfasst offenbar beide Fälle, wenn man setzt

$$(5)\qquad \frac{1}{1+\varepsilon(x-a)^2+i\left\{f(x)-f(a)\right\}} = \Phi(fx) = \varphi(x),$$

sofern unter ε der Werth 0 oder 1 verstanden wird, je nachdem $f(x)$ den Werth $f(a)$ nur *ein*mal oder öfter annimmt: man hat alsdann $\varphi(a) = 1$, für jedes von a verschiedene x hingegen $|\varphi(x)| < 1$.

Als einfachste Repräsentanten für die Reihe $\sum c_\nu \varphi^\nu(x)$ bieten sich sodann die binomische Reihe für einen negativen ächt gebrochenen Exponenten und die logarithmische Reihe dar, welche beide für $|\varphi(x)| < 1$ unbedingt, für $\varphi(x) = +1$ noch bedingt convergiren. Es ergiebt sich:

$$(6)\qquad \left\{1+\varphi(x)\right\}^{-\frac{1}{m}} = 1 - \frac{1}{m}\varphi(x) + \frac{1.(1+m)}{m.2m}\varphi^2(x) - \frac{1(1+m)(1+2m)}{m.2m.3m}\varphi^3(x) + \cdots$$
$$= S(x) \quad (\text{wo } m \text{ eine ganze Zahl} > 1 \text{ bedeutet})$$

eine Reihe, welche an der einen Stelle $x = a$, wegen $\varphi(a) = 1$ in die *bedingt* convergente Reihe

$$S(a) = 1 - \frac{1}{m} + \frac{1.(1+m)}{m.2m} - \frac{1(1+m)(1+2m)}{m.2m.3m} + \cdots = \sqrt[m]{\frac{1}{2}}$$

übergeht, für alle anderen reellen x aber *unbedingt* convergirt. Löst man die obige Gleichung nach $\varphi(x)$ auf, so folgt

$$\varphi(x) = \frac{1 - S^m(x)}{S^m(x)}$$

also

$$\frac{1}{\varphi(x)} = 1 + \varepsilon(x-a)^2 + i\left\{f(x) - f(a)\right\} = \frac{1}{1 - S^m(x)} - 1,$$

woraus schliesslich:

$$(7)\qquad f(x) = f(a) + i\left\{\varepsilon(x-a)^2 + 2 + \frac{1}{S^m(x) - 1}\right\}$$

Diese Darstellung von $f(x)$ ist gültig für *alle* reellen x, einschliesslich $x = a$, solange die Reihe $S(x)$ in der ursprünglichen Anordnung genommen wird.

Bezeichnet man jetzt aber mit $\overline{S(x)}$ wiederum irgend eine Umordnung der Reihe $S(x)$ und setzt analog mit Gl. (7):

$$(8)\qquad \overline{f(x)} = f(a) + i\left\{\varepsilon(x-a)^2 + 2 + \frac{1}{\overline{S^m(x)} - 1}\right\},$$

so hat man — abgesehen von der Stelle $x = a$ — durchweg $\overline{f(x)} = f(x)$,

während — bei geeigneter Wahl der Umordnung $\overline{S(x)}$ — die Function $\overline{f(x)}$ für $x = a$ um eine beliebig vorzuschreibende rein imaginäre Grösse von $f(a)$ abweichen wird. Soll dieser Zuwachs etwa die beliebig gegebene Grösse λi besitzen, sodass also

$$\overline{f(a)} = f(a) + \lambda i$$

wird, so hat man nur zu beachten, dass aus Gl. (8) folgt:

$$\overline{f(a)} = f(a) + i\left\{2 + \frac{1}{S^m(a) - 1}\right\}$$

d. h.

$$\lambda = 2 + \frac{1}{S^m(a) - 1}$$

und daher

$$\overline{S(a)} = \sqrt[m]{\frac{\lambda - 1}{\lambda - 2}} = S(a) + \left\{\sqrt[m]{\frac{\lambda - 1}{\lambda - 2}} - \sqrt[m]{\frac{1}{2}}\right\}. \tag{9}$$

Ist m eine ungerade Zahl, so ist $\sqrt[m]{\frac{\lambda - 1}{\lambda - 2}}$ stets reell und in Folge dessen λ an keinerlei Grenzen gebunden, da man ja der Reihe $S(a)$ durch geeignete Umordnung *jeden reellen* Zuwachs geben kann. Bei geradzahligen Werthen von m hingegen müssen, damit $\sqrt[m]{\frac{\lambda - 1}{\lambda - 2}}$ reell wird, $\frac{\lambda - 1}{\lambda - 2}$ wesentlich positiv sein, sodass in diesem Falle Werthe von λ, die innerhalb der Grenzen $+1$ und $+2$ liegen, unzulässig wären: für jede Wahl von λ, welche dieser Einschränkung Rechnung trägt, ergeben sich dann immer zwei reelle Werthe für jene Wurzelgrösse*), also auch für $\overline{S(x)}$, d. h. es giebt dann stets *zwei* Umordnungen der Reihe $S(x)$, welche das Verlangte leisten.

Will man die besondere Art der Gliederanordnung, welche $S(a)$ so, wie es Gl. (9) erheischt, in $\overline{S(a)}$ überführt, wirklich angeben, so kann man sich hierzu des Resultates bedienen, welches ich in einem früheren Aufsatze: „Ueber die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen und Producte“ — abgeleitet habe. Es wird da unter anderem gezeigt**), dass die hier mit $S(a)$ bezeichnete Reihe die Werthveränderung

$$\frac{A}{2^{\frac{m-1}{m}}\,\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)} \quad \text{(}A\text{ eine beliebig vorgeschriebene positive oder negative Zahl)}$$

---

*) Unter $\sqrt[m]{\frac{1}{2}}$ kann natürlich stets nur der *positive* Werth verstanden werden (als Summe der Reihe $S(a)$, welche ja wesentlich positiv ist).

**) Math. Ann. Bd. XXII, S. 476 (wobei k hier durch $\frac{1}{m}$, a durch A ersetzt ist).

erleidet, wenn man n negativen Gliedern $(n+h)$ positive zuordnet, wo h durch die infinitäre Gleichung bestimmt ist:

$$h \cong n^{\frac{m-1}{m}} \,.\, A.$$

Damit nun im vorliegenden Falle diese Werthveränderung

$$\frac{A}{2^{\frac{m-1}{m}}\,\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)} = \sqrt[m]{\frac{\lambda-1}{\lambda-2}} - \sqrt[m]{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{m}}\left\{\left(\frac{2\lambda-2}{\lambda-2}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right\}$$

wird, hat man offenbar nur zu setzen

$$A = 2^{\frac{m-2}{m}} \,.\, \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\left\{\left(\frac{2\lambda-2}{\lambda-2}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right\}$$

und daher schliesslich

$$(10) \qquad h \cong 2^{\frac{m-2}{m}}\, n^{\frac{m-1}{m}}\, \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\left\{\left(\frac{2\lambda-2}{\lambda-2}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right\},$$

wo h den (positiven oder negativen) Ueberschuss von positiven Gliedern bedeutet, der auf n negative trifft. —

Nimmt man statt der binomischen Reihe die logarithmische, so ergiebt sich zunächst

$$(11) \qquad \lg(1+\varphi(x)) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu-1}\frac{\varphi^{\nu}(x)}{\nu} = S(x)$$

wo jetzt die für $x=a$ resultirende Reihe

$$\lg(1+\varphi(a)) = \lg 2 = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{\nu} = S(a),$$

wiederum nur bedingt convergirt, während sonst durchweg unbedingte Convergenz stattfindet. Hier wird nun

$$\varphi(x) = e^{S(x)} - 1$$

und daher

$$(12) \qquad f(x) = f(a) + i\left\{\varepsilon(x-a)^2 + 1 - \frac{1}{e^{S(x)}-1}\right\}.$$

Bezeichnet man analog wie oben die umgeordnete Reihe mit $\overline{S(x)}$ und setzt

$$(13) \qquad \overline{f(x)} = f(a) + i\left\{\varepsilon(x-a)^2 + 1 - \frac{1}{e^{\overline{S(x)}}-1}\right\},$$

so muss, damit $\overline{f(x)}$ an der Stelle $x=a$ gegen $f(x)$ den Zuwachs λi erleidet,

$$\overline{f(x)} = f(a) + i\left\{1 - \frac{1}{e^{\overline{S(a)}} - 1}\right\} = f(a) + \lambda i$$

also

$$\lambda = 1 - \frac{1}{e^{\overline{S(a)}} - 1}$$

werden, woraus

$$e^{\overline{S(a)}} = \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1}$$

sich ergiebt: hieraus folgt zunächst — da $e^{\overline{S(a)}}$ wesentlich positiv ist — dass Werthe von λ, welche innerhalb der Grenzen $+1$ und $+2$ liegen, hier wieder auszuschliessen sind. Ist diese Bedingung aber erfüllt, so hat man

$$(14) \qquad \overline{S(a)} = \lg\frac{\lambda - 2}{\lambda - 1} = S(a) + \left\{\lg\frac{\lambda - 2}{\lambda - 1} - \lg 2\right\}$$
$$= S(a) + \frac{1}{2}\lg\left(\frac{\lambda - 2}{2\lambda - 2}\right)^2.$$

Da nun bekanntlich die hier mit $S(a)$ bezeichnete harmonische Reihe den Zuwachs $\frac{1}{2}\lg p$ erhält, wenn man n negativen Gliedern $E(pn)$ positive zuordnet, so kommt die gesuchte Anordnung $\overline{S(a)}$ offenbar dann zu Stande, wenn auf n negative Glieder $E\left\{\left(\frac{\lambda - 2}{2\lambda - 2}\right)^2 n\right\}$ positive kommen. Ist z. B. λ eine rationale Zahl, etwa $\lambda = \frac{q}{p}$, wo p und q ganze Zahlen bedeuten, sodass also $\frac{\lambda - 2}{2\lambda - 2} = \frac{q - 2p}{2q - 2p}$ wird, so erzielt man also die betreffende Anordnung, wenn man auf je $(q - 2p)^2$ positive Glieder $(2q - 2p)^2$ negative folgen lässt. —

Schliesslich möge hier noch bemerkt werden, dass bei diesem ganzen Verfahren die durch eine gewisse Umordnung von $S(x)$ resultirende Werthveränderung von $\overline{f(x)}$ immer nur von der Wahl der *Coefficienten* der Reihe $S(x) = \sum c_\nu \cdot \varphi^\nu(x)$, mit anderen Worten von der Beschaffenheit der nur aus constanten Gliedern bestehenden Reihe $S(a) = \sum c_\nu$, nicht aber von $f(x)$ abhängt, dergestalt dass für eine bestimmte Umordnung $\overline{S(a)}$ der Ausdruck $\overline{f(x)}$ an der Stelle $x = a$ immer *dieselbe* Unstetigkeit erleidet, was auch $f(x)$ bedeuten möge.

III. Reihen, welche an verschiedenen Stellen ihres Convergenz-Intervalles in verschiedenem Grade bedingt convergiren.

Bei den Entwickelungen des vorigen Paragraphen wurden hebbare Unstetigkeiten erzeugt durch Benützung *unbedingt* convergenter Reihen, welche innerhalb ihres Convergenz-Intervalles einzelne Stellen

mit nur *bedingter* Convergenz besitzen. Nun giebt es aber, wie sogleich gezeigt werden soll, auch solche aus Functionen einer Variablen x gebildete Reihen, welche durchweg nur *bedingt* convergiren, innerhalb ihres Convergenz-Intervalles aber einzelne Stellen mit *stärker* bedingter Convergenz besitzen, dergestalt dass gewisse Umordnungen nur an diesen ausgezeichneten Stellen, nicht aber im ganzen übrigen Convergenz-Intervalle Werthveränderungen und somit hebbare Unstetigkeiten hervorbringen. Man könnte diese Erscheinung, auf die meines Wissens bisher noch nicht ausdrücklich hingewiesen worden ist, etwa dadurch am kürzesten charakterisiren, dass man sagt, solche Reihen seien innerhalb ihres Convergenz-Intervalles *in verschiedenem Grade bedingt* convergent.

Zur Erläuterung des eben gesagten mögen die trigonometrischen Reihen dienen. Es sei die Reihe

$$(15) \qquad S(x) = A_0 + \sum_1^{\infty} \{A_\nu \cos \nu x + B_\nu \sin \nu x\}$$

im Intervalle $-\pi \cdots + \pi$ *bedingt*, doch im allgemeinen *gleichmässig convergent*, nur in einer endlichen Anzahl discreter Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_m$*) *divergent*, sodass also $S(x)$ eine für das Intervall $-\pi \cdots + \pi$ im allgemeinen stetige Function bedeutet, welche nur an den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ unendlich wird. Die Reihe (15) convergirt dann offenbar für alle möglichen reellen x mit Ausnahme derjenigen von der Form $x = a_\varkappa \pm 2s\pi$ (s eine ganze Zahl incl. 0, $\varkappa = 1, 2, \ldots, m$). Sie wird somit im allgemeinen (d. h. lediglich mit Ausschluss der sogleich zu bezeichnenden Punkte) auch convergent bleiben, wenn man x durch $(x + \pi)$ ersetzt, wobei

$$\begin{aligned} S(x+\pi) &= A_0 + \sum_1^{\infty} \{A_\nu \cos(\nu x + \nu\pi) + B_\nu \sin(\nu x + \nu\pi)\} \\ &= A_0 + \sum_1^{\infty} (-1)^\nu \{A_\nu \cos \nu x + B_\nu \sin \nu x\} \end{aligned}$$

sich ergiebt. Die Divergenzstellen dieser Reihe, nämlich die Werthe von der Form $x = a_\varkappa \pm (2s+1)\pi$, werden dann von denjenigen der Reihe (15) durchweg verschieden sein — mit einziger Ausnahme des Falles, wo unter den Divergenzstellen $a_\varkappa$ sich die beiden Stellen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ befinden, sofern dann die Werthe

*) In die Zahl dieser Punkte sind eventuell auch die Grenzen $\pm\pi$ aufzunehmen, falls die Reihe dort nicht mehr convergirt.

$$\pm\frac{\pi}{2}+2s\pi=\mp\frac{\pi}{2}+(2s\pm1)\pi$$

und

$$\pm\frac{\pi}{2}-2s\pi=\mp\frac{\pi}{2}-(2s\mp1)\pi$$

als Divergenzstellen beider Reihen erscheinen. — Mit den Reihen $S(x)$ und $S(x+\pi)$ convergiren nun ferner auch die beiden Reihen

$$\frac{1}{2}\{S(x)+S(x+\pi)\}$$

$$=A_0+\sum_1^\infty\{A_{2\nu}\cos 2\nu x+B_{2\nu}\sin 2\nu x\}=P(x),$$

$$\frac{1}{2}\{S(x)-S(x+\pi)\}$$

$$=\sum_1^\infty\{A_{2\nu-1}\cos(2\nu-1)x+B_{2\nu-1}\sin(2\nu-1)x\}=Q(x)$$

und zwar offenbar mit alleiniger Ausnahme der *beiden* Werthesysteme, welche Divergenzstellen für $S(x)$ und $S(x+\pi)$ sind, also der Werthe $x=a_\varkappa\pm2s\pi$ und $x=a_\varkappa\pm(2s+1)\pi$.

Bildet man jetzt

$$(16)\quad \overline{S(x)}=\lim\Big[A_0+\sum_1^m\{A_{2\nu}\cos 2\nu x+B_{2\nu}\sin 2\nu x\}$$
$$+\sum_1^n\{A_{2\nu-1}\cos(2\nu-1)x+B_{2\nu-1}\sin(2\nu-1)x\Big]$$
$$=\lim\{P_m(x)+Q_m(x)\}\qquad(m=\infty,\ n=\infty),$$

so unterscheidet sich diese Reihe von der Reihe $S(x)$ offenbar nur durch die Anordnung der Geraden und wird — abgesehen von den Stellen $a_\varkappa\pm2s\pi$, $a_\varkappa\pm(2s+1)\pi$ — auch dieselbe Summe besitzen wie die Reihe (15), sofern ja nach Ausschluss der bezeichneten Stellen die Partialreihen $P(x)=\lim P_m(x)$ und $Q(x)=\lim Q_n(x)$ überall einzeln convergiren. Dagegen würden an den Stellen $a_\varkappa\pm(2s+1)\pi$, an welchen nach Voraussetzung $S(x)$ convergirt und stetig ist, $\lim P_m(x)$ und $\lim P_n(x)$ einzeln divergiren, und es könnte daher $\overline{S(x)}$ an diesen Stellen nur dann $=S(x)$ werden, wenn entweder geradezu $m=n$ genommen wird oder zum mindesten zwischen m und n ein passendes Abhängigkeitsverhältniss (das, beiläufig bemerkt, je nach der Natur der Coefficienten A_ν, B_ν verschieden ausfallen kann) stattfindet. Andernfalls, d. h. bei Festsetzung irgend eines anderen Abhängigkeitsverhältnisses zwischen m und n, wird $\overline{S(x)}$ an jenen Stellen jeden beliebig

vorgeschriebenen Werth*) annehmen können, bezw. völlig unbestimmt werden, wenn man m und n ganz unabhängig von einander ins Unendliche wachsen lässt. — Was schliesslich noch die Stellen $a_\varkappa \pm 2s\pi$ betrifft, welche auch Divergenzstellen für $S(x)$ waren, so wird $\overline{S(x)}$ dort offenbar ebenfalls divergent oder unbestimmt.

Es ergiebt sich somit das folgende Resultat: Sondert man in der Reihe (15) die Glieder mit geradem und diejenigen mit ungeradem Index, so wird bei gegenseitiger Verschiebung dieser beiden Gliedergruppen eine Summe $\overline{S(x)}$ zum Vorschein kommen, welche überall da, wo die ursprüngliche Reihe convergirt, mit $S(x)$ übereinstimmt — mit Ausschluss der Stellen $a_\varkappa \pm (2s+1)\pi$ (d. h. derjenigen Stellen, welche sich von den Divergenzstellen der Reihe (15) um ungerade Multipla von π unterscheiden): hier wird $\overline{S(x)}$ bei geeigneter Wahl jener Gliederverschiebung hebbare Unstetigkeiten erleiden.

Beispiel: Es sei gegeben

$$S(x) = \cos x - \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{3}\cos 3x - \cdots = \lg\left(2\cos\tfrac{x}{2}\right)$$

eine Reihe, welche offenbar convergirt für $-\pi < x < +\pi$, insbesondere also auch für $x = 0$, wo

$$S(0) = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \cdots = \lg 2$$

wird, während sie an den Stellen $x = \pm\pi$ in die harmonische Reihe $-\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right)$ übergeht, also divergent wird. Die vorgelegte Reihe convergirt somit für alle endlichen reellen x mit Ausnahme derjenigen von der Form $\pm(2s+1)\pi$. Nach dem oben gesagten müssen daher die beiden Partialreihen

$$P(x) = -\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 6x}{6} - \cdots,$$

$$Q(x) = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \cdots$$

(wo beiläufig bemerkt für $-\pi < x < +\pi$, $P(x) = \frac{1}{4}\lg(4\sin^2\varphi)$, $Q(x) = \frac{1}{4}\lg\left(\cot^2\frac{\varphi}{2}\right)$) ausser an den Stellen $x = \pm(2s+1)\pi$ auch noch für $x = \pm 2s\pi$ divergiren.

Bildet man daher

$$\overline{S(x)} = \lim\left\{\sum_1^m{}^{\nu} \frac{\cos(2\nu-1)x}{2\nu-1} - \sum_1^n{}^{\nu} \frac{\cos 2\nu x}{2\nu}\right\} \qquad (m=\infty, n=\infty)$$

---

*) Genauer gesagt kann der Werth von $\overline{S(x)}$ für irgend *eine* der Stellen $a_\varkappa \pm (2s+1)\pi$ beliebig vorgeschrieben werden. Damit ist dann aber die Gliederanordnung von $\overline{S(x)}$, und folglich auch der Werth der Summe für alle anderen Stellen bestimmt.

so wird $\overline{S(x)}$ auch bei beliebiger Wahl von m und n im allgemeinen zwar mit $S(x)$ übereinstimmen, an den Stellen $x = \pm 2s\pi$ jedoch nur dann, wenn $m = n$ oder zum mindesten $m \cong n$ genommen wird. Dagegen nimmt $\overline{S(x)}$ bei Festsetzung eines anderen Abhängigkeitsverhältnisses zwischen m und n für $x = \pm 2s\pi$ jeden beliebig vorgeschriebenen, von $S(\pm 2s\pi) = S(0) = \lg 2$ verschiedenen Werth an. Setzt man z. B. $m = p\varkappa$, $n = q.\varkappa$, wo p, q zwei feste ganze Zahlen bedeuten, während $\varkappa$ mit m und n ins Unendliche wächst, mit anderen Worten: ordnet man die ursprüngliche Reihe $\vartheta(x)$ so um, dass auf p Glieder mit positivem Vorzeichen jedesmal q Glieder mit negativem folgen, so wird die Summe der so umgeordneten Reihe, nämlich

$$\overline{S(x)} = \lim_{\varkappa=\infty} \left\{ \sum_1^{p\varkappa} \frac{\cos(2\nu-1)x}{2\nu-1} - \sum_1^{q\varkappa} \frac{\cos 2\nu x}{2\nu} \right\}$$

$$= \sum_1^{\infty} \left\{ \sum_{p\nu+1}^{p(\nu+1)} \frac{\cos(2\lambda-1)x}{2\lambda-1} - \sum_{q\nu+1}^{q(\nu+1)} \frac{\cos 2\lambda x}{2\lambda} \right\}$$

im allgemeinen mit der ursprünglichen Summe $S(x)$ übereinstimmen (auch an deren Divergenzstellen $x = \pm(2s+1)\pi$, wo sie ebenfalls divergent), jedoch mit Ausschluss der Stellen $x = \pm 2s\pi$, wo

$$\overline{S(\pm 2s\pi)} = \sum_0^{\infty} \left\{ \sum_{p\nu+1}^{p(\nu+1)} \frac{1}{2\nu-1} + \sum_{q\nu+1}^{q(\nu+1)} \frac{1}{2\nu} \right\} = \lg 2 + \frac{1}{2} \lg \frac{p}{q}$$

wird, also um die Grösse $\frac{1}{2} \lg \frac{p}{q}$ von $S(\pm 2s\pi)$ differirt. Sie wird also insbesondere im Intervalle $-\pi < x < +\pi$ die stetige Function $\frac{1}{2} \lg \left(2 \cos \frac{x}{2}\right)$ darstellen mit Ausnahme der Stelle $x = 0$, wo sie eine hebbare Unstetigkeit von der Grösse $\frac{1}{2} \lg \frac{p}{q}$ besitzt. —

IV. Verallgemeinerung der in den beiden vorangehenden Paragraphen entwickelten Methoden.

Jede bedingt convergente Reihe kann aufgefasst als ein Aggregat von zwei divergenten Reihen, deren entgegengesetzten Unendlichkeiten zustrebende Partialsummen mit Zugrundelegung eines geeignet fixirten Abhängigkeitsgesetzes zu einer endlichen Gesammtsumme vereinigt sind. In der That beruhte das Auftreten der in *beiden* vorigen Paragraphen betrachteten Werthveränderungen lediglich auf der Möglichkeit, die Glieder der betreffenden Reihen in zwei Partien zu zerlegen, welche *einzeln* genommen *im allgemeinen* zwar ebenfalls *convergiren*

(NB. in II war diese Convergenz eine unbedingte, in III eine bedingte), *für gewisse Werthe* von x jedoch *divergiren*. Hiernach wird man nun die bisher behandelten besonderen Fälle in folgender Weise zusammenfassen und verallgemeinern können.

Es werde wiederum mit $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ eine unbegrenzte Folge von Functionen bezeichnet, die innerhalb eines gewissen Intervalles $x_0 < x < x_1$ reell, eindeutig bestimmt und im allgemeinen stetig sein mögen; ausserdem sei die Reihe

$$(17) \qquad S(x) = \sum_0^\infty \varphi_\nu(x)$$

für dieses Intervall convergent — gleichgültig ob bedingt oder unbedingt, jedoch im allgemeinen gleichmässig — sodass also $S(x)$ eine im Intervalle $x_0 \ldots x_1$ endliche, eindeutig bestimmte und im allgemeinen stetige Function darstellt. Es werde nun gesetzt:

$$(18) \qquad \varphi_\nu(x) = \varphi_\nu^{(1)}(x) + \varphi_\nu^{(2)}(x) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo die $\varphi_\nu^{(1)}(x) = \varphi_\nu^{(2)}(x)$ Functionen von demselben Charakter wie $\varphi_\nu(x)$ bedeuten, von denen übrigens die eine oder andere für gewisse Werthe von ν beständig Null sein kann (so wäre z. B. in dem im vorigen Paragraphen betrachteten Falle, wo $\varphi_\nu(x) = A_\nu \cos \nu x + B_\nu \sin \nu x$ war, $\varphi_\nu^{(1)}(x)$ nur für *gerade* ν, $\varphi_\nu^{(2)}(x)$ nur für *ungerade* ν $= A_\nu \cos \nu x + B_\nu \sin \nu x$, dagegen $\varphi_\nu^{(1)}(x) = 0$ für ungerade, $\varphi_\nu^{(2)}(x) = 0$ für gerade ν). Sind dann die beiden Reihen:

$$(19) \qquad S^{(1)}(x) = \sum_0^\infty \varphi_\nu^{(1)}(x), \qquad S^{(2)}(x) = \sum_0^\infty \varphi_\nu^{(2)}(x)$$

im Intervalle $x_0 \ldots x_1$ mit $S(x)$ ebenfalls gleichmässig convergent, jedoch an einer gewissen Stelle $x = a$, wo $S(x)$ gleichmässig convergirt, divergent — und zwar bestimmt divergent (d. h. so dass $S^{(1)}(x)$, $S^{(2)}(x)$ dort entweder positiv oder negativ unendlich werden, so wird die folgende Reihe:

$$(20) \qquad \overline{S(x)} = \lim \left\{ \sum_0^{n_1} \varphi_\nu^{(1)}(x) + \sum_0^{n_2} \varphi_\nu^{(2)}(x) \right\} \qquad (n_1 = \infty, n_2 = \infty)$$

zunächst mit Ausschluss der Stelle $x = a$ dieselbe Summe besitzen, wie $S(x)$, unabhängig davon, wie n_1 und n_2 ins Unendliche wachsen; an der Stelle $x = a$ aber nur dann, wenn $n_1 = n_2$ oder doch zwischen n_1 und n_2 ein ganz bestimmtes, aus der besonderen Natur von $\varphi_\nu^{(1)}(x)$, $\varphi_\nu^{(2)}(x)$ sich ergebendes Abhängigkeitsverhältniss stattfindet. In jedem anderen Falle wird für $x = a$ zwischen $S(x)$ und $\overline{S(x)}$ ein Werth-

unterschied bestehen, und zwar sind hierbei die folgenden Möglichkeiten zu unterscheiden.

Sind die $\varphi_\nu^{(1)}(x)$, $\varphi_\nu^{(2)}(x)$ so beschaffen, dass $\lim \varphi_\nu^{(1)}(a) = 0$ und $\lim \varphi_\nu^{(2)}(a) = 0$, so wird je nach Wahl der Beziehung zwischen n_1 und n_2 die Differenz $\overline{S(a)} - S(a)$ jeden beliebig vorzuschreibenden Werth erhalten.

Besitzt hingegen $\varphi_\nu^{(1)}(a)$ für $\nu = \infty$ einen bestimmten endlichen Grenzwerth g — in welchem Falle offenbar $\varphi_\nu^{(2)}(a) = -g$ werden muss wegen $\lim \{\varphi_\nu^{(1)}(a) + \varphi_\nu^{(2)}(a)\} = \lim \varphi_\nu(a) = 0$ — so wird für $n_1 - n_2 = \pm p$ (wo p eine bestimmte positive ganze Zahl bedeutet) offenbar

$$\overline{S(a)} = \lim \left\{ \sum_0^{n_2}{}_\nu \varphi_\nu^{(1)}(a) + \sum_0^{n_2}{}_\nu \varphi_\nu^{(2)}(a) \right\} + \lim \sum_{n_2 \pm 1}^{n_2 \pm p}{}_\nu \varphi_\nu^{(1)}(a) = S(a) \pm pg,$$

kann also nur Werthveränderungen von ganz bestimmter Form erleiden.

In jedem anderen Falle wird $\overline{S(a)}$ divergent oder unbestimmt.

Beispiele: 1. Es sei gegeben

$$S(x) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^\nu$$

(sodass also

$$S(x) = -\lg\left(1 - \frac{x^2}{1+x^2}\right) = -\lg\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \lg(1+x^2)$$

ist), so convergirt diese Reihe für jedes reelle x (und zwar unbedingt und gleichmässig). Setzt man jetzt

$$\frac{1}{\nu}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^\nu = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^\nu} + \frac{1}{\nu} \cdot \frac{x^{2\nu}-1}{(1+x^2)^\nu},$$

so sind die beiden Reihen

$$S^{(1)}(x) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^\nu}, \qquad S^{(2)}(x) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu} \cdot \frac{x^{2\nu}-1}{(1+x^2)^\nu}$$

ebenfalls unbedingt convergent für alle endlichen reellen x mit Ausschluss der Stelle $x = 0$, wo sie beide divergiren. Bildet man daher

$$\overline{S(x)} = \lim \left\{ \sum_1^{n_1}{}_\nu \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^\nu} + \sum_1^{n_2}{}_\nu \frac{1}{\nu} \cdot \frac{x^{2\nu}-1}{(1+x^2)^\nu} \right\} \qquad (n_1 = \infty,\ n_2 = \infty),$$

so wird $\overline{S(x)} = S(x)$ — unabhängig davon, in welcher Weise n_1 und n_2 der Unendlichkeit zustreben — für alle von Null verschiedenen, reellen x; für $x = 0$ jedoch nur dann, wenn $n_2 \cong n_1$. Nimmt man dagegen etwa $n_1 = (p \pm q)n$, $n_2 = pn$ (wo p, q bestimmte positive

ganze Zahlen bedeuten und für den Fall $n_1 = (p - q)n$ natürlich $p > q$ sein muss, so wird

$$\overline{S(0)} = \lim \left\{ \sum_1^{(p \pm q)n} \frac{1}{\nu} - \sum_1^{pn} \frac{1}{\nu} \right\} = \lg\left(\frac{p \pm q}{p}\right) = \lg\left(1 \pm \frac{q}{p}\right)$$

während $S(0) = 0$ ist.

Dieses Resultat lässt sich u. a. noch folgendermassen verwerthen. Es ist

$$x^2 = e^{S(x)} - 1$$

und daher abgesehen von der Stelle $x = 0$ auch

$$e^{\overline{S(x)}} - 1 = x^2,$$

während

$$e^{\overline{S(0)}} - 1 = \pm \frac{q}{p}$$

wird. Setzt man nun eine beliebig vorgelegte Function $F(x)$ in die Form

$$F(x) = \psi(x^2) + x \cdot \chi(x^2),$$

sodass also $F(0) = \psi(0)$ wird, so würde der Ausdruck

$$\overline{F(x)} = \psi\left(e^{\overline{S(x)}} - 1\right) + x\chi(x^2)$$

für alle von Null verschiedenen x mit $F(x)$ übereinstimmen, während $\overline{F(0)} = \psi\left(\pm \frac{q}{p}\right)$ wird: mithin erleidet — wenn nicht zufällig $\psi\left(\pm \frac{q}{p}\right) = \psi(0)$ ist — $\overline{F(x)}$ an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit.

2. Man hat identisch

$$0 = S(x) = \sum_1^{\infty} c_\nu \cos \nu x,$$

sobald für jeden Werth von ν $c_\nu = 0$ ist. Setzt man nun

$$c_\nu = b_\nu - b_\nu,$$

so kann man die Grössen b_ν auf unendlich viele Weisen so wählen, dass die Reihe $\sum b_\nu$ zwar divergirt, dagegen $\sum b_\nu \cos \nu x$ mit Ausnahme der Stellen $x = \pm 2s\pi$ convergirt. In Folge dessen wird die Reihe

$$\overline{S(x)} = \lim \left\{ \sum_1^{n_1} b_\nu \cos \nu x - \sum_1^{n_2} b_\nu \cos \nu x \right\}$$

bei geeigneter Beziehung zwischen n_1 und n_2 an den Stellen $x = \pm 2s\pi$ jeden beliebig vorgeschriebenen Werth annehmen, im übrigen aber wie $S(x)$ beständig verschwinden. Nimmt man z. B.

$$b_\nu = \frac{1}{\sqrt[\varkappa]{\nu}}, \quad n_1 = pn^\varkappa + qn, \quad n_2 = pn^\varkappa, \quad (\varkappa > 1)$$

sodass also

$$\overline{S(x)} = \lim \left\{ \sum_{1}^{pn^\varkappa+qn}{}_{\nu} \frac{\cos \nu x}{\sqrt[\varkappa]{\nu}} - \sum_{1}^{pn^\varkappa}{}_{\nu} \frac{\cos \nu x}{\sqrt[\varkappa]{\nu}} \right\},$$

$$= \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \left\{ \sum_{p\nu^\varkappa+q\nu+1}^{p(\nu+1)^\varkappa+q(\nu+1)}{}_{\lambda} \frac{\cos \lambda x}{\sqrt[\varkappa]{\lambda}} - \sum_{p\nu^\varkappa+1}^{p(\nu+1)^\varkappa}{}_{\lambda} \frac{\cos \lambda x}{\sqrt[\varkappa]{\lambda}} \right\}$$

so wird diese Reihe im allgemeinen den Werth Null besitzen, nur

$$\overline{S(\pm 2\pi)} = \lim \left\{ \sum_{1}^{pn^\varkappa+qn}{}_{\nu} \frac{1}{\sqrt[\varkappa]{\nu}} - \sum_{1}^{pn^\varkappa}{}_{\nu} \frac{1}{\sqrt[\varkappa]{\nu}} \right\} = \lim \sum_{pn^\lambda+1}^{pn^\varkappa+qn}{}_{\nu} \frac{1}{\sqrt[\varkappa]{\nu}}$$

sein. Zur Berechnung dieses Grenzwerthes hat man:

$$\frac{qn}{\sqrt[\varkappa]{pn^\varkappa}} > \sum_{pn^\varkappa+1}^{pn^\varkappa+qn}{}_{\nu} \frac{1}{\sqrt[\varkappa]{\nu}} > \frac{qn}{\sqrt[\varkappa]{pn^\varkappa+qn}}$$

und daher schliesslich

$$S(\pm 2\pi) = \frac{q}{\sqrt[\varkappa]{p}}.$$

Specialisirt man noch weiter

$$\lambda = 2, \quad p = q = 1,$$

so wird

$$\overline{S(x)} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \left\{ \sum_{\nu^2+\nu+1}^{(\nu+1)^2+\nu+1}{}_{\lambda} \frac{\cos \lambda x}{\sqrt{\lambda}} - \sum_{\nu^2+1}^{(\nu+1)^2}{}_{\lambda} \frac{\cos \lambda x}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

$$= \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \left\{ \sum_{1}^{2\nu+2}{}_{\lambda} \frac{\cos(\nu^2+\nu+\lambda)x}{\sqrt{\nu^2+\nu+\lambda}} - \sum_{1}^{2\nu+1}{}_{\lambda} \frac{\cos(\nu^2+\lambda)x}{\sqrt{\nu^2+\lambda}} \right\}$$

eine Reihe von sehr einfacher Anordnung (es erscheinen nämlich die positiven Glieder der Reihe nach in Gruppen von $2, 4, 6, \ldots$, die negativen in solchen von $1, 3, 5, \ldots$ Gliedern), welche also für alle reellen x mit Ausnahme derjenigen von der Form $x = \pm 2s\pi$ verschwindet, für welche letzteren

$$\overline{S(\pm 2s\pi)} = \lim \sum_{n^2+1}^{n^2+n}{}_{\nu} \frac{1}{\sqrt{\nu}} = 1$$

wird. —

3. Setzt man

$$S(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \sin^\nu x,$$

so ist diese Reihe für alle endlichen reellen x ausser denjenigen von

der Form $x = (1 \pm 2s)\frac{\pi}{2}$ unbedingt convergent und hat den Werth $\frac{\sin x}{1 - \sin x}$.

Zerlegt man jetzt $\sin^\nu x$ folgendermassen:

$$\sin^\nu x = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^\nu + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^\nu (x^\nu - 1)$$

(wobei wiederum — zur Vermeidung jeder Unbestimmtheit an der Stelle $x = 0$ — unter $\frac{\sin x}{x}$ die Reihe $\frac{1}{1} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$ verstanden werden mag) und setzt

$$\overline{S(x)} = \lim \left\{ \sum_1^{n_1}{}_\nu \left(\frac{\sin x}{x}\right)^\nu + \sum_1^{n_2}{}_\nu \left(\frac{\sin x}{x}\right)^\nu (x^\nu - 1) \right\} \qquad (n_1 = \infty,\ n_2 = \infty),$$

so divergiren die beiden Partialreihen für $x = 0$ in der Weise, dass die Glieder der ersten sämmtlich $= +1$, die der zweiten sämmtlich $= -1$ werden, während sie im übrigen gleichzeitig mit $S(x)$ unbedingt convergent sind. Man hat daher, wenn p irgend eine positive ganze Zahl bedeutet und $n_1 = n_2 + p$ genommen wird:

$$\overline{S(x)} = \lim \left\{ \sum_1^{n_2+p}{}_\nu \left(\frac{\sin x}{x}\right)^\nu + \sum_1^{n_2}{}_\nu \left(\frac{\sin x}{x}\right)^\nu (x^\nu - 1) \right\} \qquad (n_2 = \infty)$$

$$= \sum_1^{p}{}_\nu \left(\frac{\sin x}{x}\right)^\nu + \sum_1^{\infty}{}_\nu \left(\frac{\sin x}{x}\right)^\nu \left\{ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p + x^\nu - 1 \right\}$$

eine Reihe, welche — abgesehen von den Stellen $x = (1 \pm 2s)\frac{\pi}{2}$ — wie $S(x)$ die Summe $\frac{\sin x}{1 - \sin x}$ besitzt, jedoch für $x = 0$, statt wie $S(x)$ zu verschwinden, den Werth p annimmt.

V. Umformung von Ausdrücken mit sprungweisen Aenderungen (nach Art der Fourier'schen Reihen und Integrale) in solche mit hebbaren Unstetigkeiten.

Ich gehe jetzt zu einer anderen Classe von hierher gehörigen Ausdrücken über, welche die überaus nahe Verwandtschaft zwischen den sprungweisen Aenderungen und den hebbaren Unstetigkeiten auf's deutlichste erkennen lassen.

Es möge $\varphi(x)$ an einer gewissen Stelle $x = a$ eine endliche Discontinuität nach Art einer Fourier'schen Reihe oder eines Fourier'schen Integrales erleiden, dergestalt dass — mit Anwendung der Dirichlet'schen Bezeichnungsweise — $\varphi(a+0)$ und $\varphi(a-0)$ um eine

bestimmte endliche Grösse von einander differiren, während $\varphi(a)$ den Mittelwerth $\frac{1}{2}\{\varphi(a+0)+\varphi(a-0)\}$ annimmt; im übrigen mag $\varphi(a+0)$ an der betreffenden Stelle vorwärts, $\varphi(a-0)$ rückwärts stetig sein. Bildet man alsdann

$$f_1(x)=\varphi(a+(x-a)^2)$$

oder auch

$$f_2(x)=\varphi(a-(x-a)^2),$$

so geht der erste dieser Ausdrücke stets in $\varphi(a+0)$, der zweite in $\varphi(a-0)$ über, gleichgültig von welcher Seite her x der Stelle a genähert wird, während für $x=a$ $f_1(a)=f_2(a)=\frac{1}{2}\{\varphi(a+0)+\varphi(a-0)\}$ wird: es erleiden somit diese beiden Ausdrücke an der Stelle $x=a$ hebbare Unstetigkeiten.

Als einfachste Beispiele dieser Kategorie bieten sich solche Sinusreihen dar, deren Summe für unendlich kleine x einer von Null verschiedenen Grenze zustrebt, und welche daher an der Stelle $x=0$ unstetig werden. So hat man z. B.:

$$\frac{4}{\pi}\sum_0^\infty{}^{\nu}\frac{\sin(2\nu+1)x}{2\nu+1}=\begin{cases}-1 & \text{für } -\pi<x<0,\\ 0 & \text{für } x=0,\\ +1 & \phantom{\text{für }} 0<x<\pi\end{cases}$$

und daher

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_0^\infty{}^{\nu}\frac{\sin(2\nu+1)x^2}{2\nu+1}=\begin{cases}+1 & \text{für } x^2<\pi,\\ 0 & \text{für } x=0\end{cases}$$

d. h. $f(x)$ hat für alle x im Intervalle $-\sqrt{\pi}$ bis $+\sqrt{\pi}$ den Werth 1, verschwindet jedoch für $x=0$.

Aehnlich verhält sich das bestimmte Integral $\int_0^\infty\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha$, welches bekanntlich den Werth $\frac{\pi}{2}$ hat. Macht man darin die Substitution $\alpha=\beta x^2$ — wo β die neue Integrationsvariable bedeutet — und setzt

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\beta x^2}{\beta}d\beta,$$

so hat offenbar $f(x)$ für alle positiven und negativen Werthe von x den Werth 1, während $f(0)$ verschwindet. —

Man kann aber aus Fourier'schen Reihen oder Integralen der betrachteten Art auch noch in anderer Weise Ausdrücke mit hebbaren Unstetigkeiten bilden, z. B. wenn man beachtet, dass das Quadrat — oder allgemeiner gesagt jede gerade Potenz — der eben angeführten

Sinusreihe im Intervalle $-\pi < x < +\pi$ beständig den Werth $+1$, nur für $x=0$ den Werth 0 hat. Diese schon von Hankel gemachte Bemerkung*) lässt sich noch in folgender Weise verallgemeinern.

Es seien $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zwei Functionen, welche an der Stelle $x=a$ bezw. $x=b$ nach Art einer Fourier'schen Reihe endliche Sprünge erleiden, sodass etwa

$$(21)\qquad \begin{cases} \varphi(a-0)=\alpha_1, & \psi(b-0)=\beta_1, \\ \varphi(a+0)=\alpha_2, & \psi(b+0)=\beta_2, \\ \varphi(a)=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2), & \psi(b)=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2) \end{cases}$$

sein möge. Bedeutet dann ξ einen beliebig vorgeschriebenen Werth und setzt man

$$(22)\qquad \begin{cases} \Phi(x)=\varphi(x+a-\xi)-\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2), \\ \Psi(x)=\psi(x+b-\xi)-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2), \end{cases}$$

so wird

$$(23)\qquad \begin{cases} \Phi(\xi-0)=\varphi(a-0)-\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2), \\ \Phi(\xi+0)=\varphi(a+0)-\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)=-\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2), \\ \Phi(\xi)=\varphi(a)-\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)=0, \\ \Psi(\xi-0)=\psi(b-0)-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)=\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2), \\ \Psi(\xi+0)=\psi(b+0)-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)=-\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2), \\ \Psi(\xi)=\psi(b)-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)=0 \end{cases}$$

und folglich, wenn noch

$$(24)\qquad \Phi(x)\cdot\Psi(x)=f(x)$$

gesetzt wird:

$$(25)\qquad \begin{cases} f(\xi-0)=\frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2), \\ f(\xi+0)=\frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2), \\ f(\xi)=0 \end{cases}$$

d. h. $f(x)$ besitzt an der beliebig vorgeschriebenen Stelle $x=\xi$ eine hebbare Unstetigkeit.

---

*) Math. Ann. Bd. XX, S. 97.

Diese Betrachtung lässt sich wiederum benützen, um für eine beliebig vorgelegte Function $f(x)$ — von der nur vorausgesetzt wird, dass sie für ein gewisses Intervall $x_0 \ldots x_1$ durch eine Fourier'sche Reihe oder ein Fourier'sches Integral darstellbar ist, — unendlich viele andere zu construiren, welche in diesem Intervalle mit Ausnahme einer endlichen Anzahl beliebig vorgeschriebener Punkte $a_1, a_2, \ldots a_m$ (wo $f(x)$ als stetig und von Null verschieden vorausgesetzt wird) mit $f(x)$ völlig übereinstimmen, an jenen Stellen $a_1 \ldots a_m$ jedoch verschwinden, also dort hebbar unstetig werden.

Zerlegt man nämlich $f(x)$ irgendwie in zwei mit $f(x)$ stetige und ebenfalls durch Fourier'sche Reihen oder Integrale darstellbare Factoren, etwa

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

(was offenbar stets auf unendlich viele Weisen möglich ist), so kann man mit Hülfe von Fourier'schen Reihen oder Integralen zwei neue Functionen $\overline{f_1(x)}$, $\overline{f_2(x)}$ darstellen, welche in den Intervallen

$$(x_0 \ldots a_1),\ (a_2 \ldots a_3),\ (a_4 \ldots a_5) \ldots$$

mit $f_1(x)$, $f_2(x)$, hingegen in den jedesmal anstossenden Intervallen

$$(a_1 \ldots a_2),\ (a_3 \ldots a_4),\ (a_5 \ldots a_6), \ldots$$

mit $-f_1(x)$, $-f_2(x)$ übereinstimmen, somit in unmittelbarer Nähe der Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ auf verschiedenen Seiten absolut genommen nahezu gleiche, aber entgegengesetzte Werthe besitzen und für die Argumente $a_1, a_2, \ldots, a_m$ selbst verschwinden.

Das Product

$$\overline{f(x)} = \overline{f_1(x)} \cdot \overline{f_2(x)}$$

stellt daher eine Function dar, welche an den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ plötzlich Null wird, im übrigen aber mit $f(x)$ durchweg übereinstimmt.

(NB. Den Factor $f_2(x)$ kann man offenbar auch constant $= +1$ nehmen, wodurch $f_1(x) = f(x)$ wird: man hat dann also nur zwei Fourier'sche Reihen oder Integrale herzustellen, welche abwechselnd die Werthe $+f(x)$ und $-f(x)$ bezw. $+1$ und -1 besitzen).

Es schien mir von einigem Interesse, festzustellen, ob die auf dem soeben betrachteten Wege erzeugten hebbaren Discontinuitäten in geeignet gewählten Fällen sich nicht schliesslich auf dieselbe Ursache zurückführen liessen, welche bei den in Art. II—IV betrachteten Beispielen als wirksam erkannt worden ist. Die Möglichkeit hierzu wird offenbar geboten sein, sobald sich die hier auftretenden Reihenproducte in einfach unendliche Reihen umformen lassen — etwa durch Anwendung der Cauchy'schen Multiplicationsregel: dies ist nun aber mit Benützung des im vorangehenden Aufsatze entwickelten Resultates bei gehöriger Beschaffenheit der Coefficienten thatsächlich der Fall.

Seien also, wie dort angenommen wurde, a_ν, a'_ν positive, mit

wachsendem ν niemals zunehmende und für $\nu = \infty$ verschwindende Grössen, $\sum a_\nu$ und $\sum a'_\nu$ divergent, dagegen $\sum a_\nu a'_\nu$ convergent. Setzt man jetzt wiederum

$$(26) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu x = f_1(x), \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} a'_\nu \sin \nu x = f_2(x),$$

so wird (nach Gl. (11) des vorigen Aufsatzes):

$$(27) \qquad f_1(x) \cdot f_2(x)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\varkappa=1}^{\nu} a_\varkappa a'_{\nu+1-\varkappa} \cos(\nu+1-2\varkappa) - c_{\nu+1} \cos(\nu+1)x \right\} = f(x),$$

wo

$$c_{\nu+1} = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} a_\varkappa a'_{\nu+1-\varkappa}.$$

Ist dann

$$\left.\begin{array}{l} \lim f_1(0+\delta) = -\lim f_1(0-\delta) = g_1 \\ \lim f_2(0+\delta) = -\lim f_2(0-\delta) = g_2 \end{array}\right\} \text{ d. h. endlich und von Null verschieden,}$$

so wird $f(x)$ an die Stelle $x = 0$ hebbar unstetig, indem sich nämlich ergiebt:

$$f(0 \pm \delta) = g_1 g_2$$

dagegen:

$$f(0) = 0.$$

Ordnet man jedoch die Reihe (27) nach steigenden Vielfachen von x, wodurch sie übergeht in:

$$(28) \quad F(x) = \frac{1}{2} C_{0,0} + \frac{1}{2} C_{0,1} \cos x + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} (C_{0,\nu+1} - c_{\nu+1}) \cos(\nu+1)x,$$

wo

$$C_{0,0} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa a'_\varkappa,$$

$$C_{0,\nu+1} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} (a_\varkappa a'_{\varkappa+\nu} + a_{\varkappa+\nu} a'_\varkappa)$$

(s. Gl. (12) des vorigen Aufsatzes), so ist $F(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig und im übrigen für $-\pi \leqq x \leqq \pi$ mit $f(x)$ identisch. Die hebbare Unstetigkeit, welche $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ besitzt, erklärt sich nun aber sofort durch das in Art. IV gesagte. Zerlegt man nämlich die Glieder der Reihe $F(x)$ in zwei Partien

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{0,\nu} \cos \nu x, \qquad \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu+1} \cos(\nu+1)x$$

so convergiren auch diese Partialreihen einzeln genommen im ganzen Intervalle $-\pi \cdots +\pi$ mit Ausschluss der Stelle $x = 0$, und zwar die erste derselben in der Weise, dass sie auch die Umformung

$$\frac{1}{2}\sum_1^\infty{}_\nu \sum_1^\nu{}_\varkappa a_\varkappa a'_{\nu+1-\varkappa} \cos(\nu+1-2\varkappa)x$$

gestattet. Für $x = 0$ hingegen werden diese Reihen sämmtlich divergent und bringen also bei geeigneter Verschiebung der Glieder jeden beliebigen Summenwerth hervor: unter allen möglichen Verschiebungen repräsentirt dann die Reihe für $f(x)$ gerade diejenige, für welche an der Stelle $x = 0$ die Summe 0 resultirt.

Beispiel: Sei $a_\nu = a'_\nu = \frac{1}{\nu}$, also:

$$f_1(x) = f_2(x) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{\sin \nu x}{\nu},$$

so dass also

$$f_1(x) = \pm \frac{\pi - |x|}{2} \quad \text{für} \quad 0 < |x| \leqq \pi,$$
$$f_1(0) = 0,$$

so wird

$$f_1(x)^2 = \frac{1}{2}\sum_1^\infty{}_\nu \left\{\sum_1^\nu{}_\varkappa \frac{\cos(\nu+1-2\varkappa)}{\varkappa(\nu+1-\varkappa)} - c_{\nu+1}\cos(\nu+1)x\right\} = f(x)$$

oder auch, da

$$c_{\nu+1} = \sum_1^\nu{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa(\nu+1-\varkappa)} = \frac{1}{\nu+1}\sum_1^\nu{}_\varkappa\left\{\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\nu+1-\varkappa}\right\} = \frac{2}{\nu+1}\sum_1^\nu{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa}$$
$$= 2\,\frac{\sigma_\nu}{\nu+1}$$

wenn $\sum_1^\nu{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} = \sigma_\nu$ gesetzt wird:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}_\nu \left\{\frac{1}{2}\sum_1^\nu{}_\varkappa \frac{\cos(\nu+1-2\varkappa)x}{\varkappa(\nu+1-\varkappa)} - \frac{\sigma_\nu}{\nu+1}\cos(\nu+1)x\right\}.$$

Man hat alsdann

$$f(x) = \left(\frac{\pi - |x|}{2}\right)^2 \quad \text{für} \quad 0 < |x| \leqq \pi,$$
$$f(0) = 0.$$

Dagegen ergiebt die Umordnung nach steigenden Vielfachen von x, wenn man beachtet, dass

$$C_{0,0} = \sum_{1}^{\infty}{}_{\kappa} \frac{1}{\kappa^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$C_{0,1} = 2\sum_{1}^{\infty}{}_{\kappa} \frac{1}{\kappa \,.\, \overline{\kappa+1}} = 2\sum_{1}^{\infty}{}_{\kappa} \left\{\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa+1}\right\} = 2,$$

$$C_{0,\nu+1} = 2\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\kappa(\kappa+\nu+1)} = \frac{2}{\nu+1}\sum_{1}^{\infty}{}_{\kappa} \left\{\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa+\nu+1}\right\} = 2 \cdot \frac{\sigma_{\nu+1}}{\nu+1}$$

die Reihe:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{12} + \cos x + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu}{\nu+1} \cos(\nu+1)x$$

$$= \frac{\pi^2}{12} \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\cos \nu x}{\nu^2}$$

und zwar ist dann

$$F(x) = \left(\frac{\pi - |x|}{2}\right)^2$$

für $-\pi \leq x \leq +\pi$ einschliesslich der Stelle $x = 0$ — ein Resultat, dessen Richtigkeit man auch leicht verificiren kann (am einfachsten durch Integration der Reihe $f(x)$ zwischen den Grenzen, 0 und x). —

München, October 1883.

Darstellung der zahlentheoretischen Function $E(x)$ durch eine unendliche Reihe.

Von

Alfred Pringsheim in München.

Eine im allgemeinen durch eine Fourier'sche Reihe (oder ähnliche Darstellungsformel) darstellbare Function $f(x)$, welche an einer gewissen Stelle $x = a$ so unstetig wird, dass $f(a+0)$ und $f(a-0)$ um ein Endliches oder Unendlichgrosses verschieden sind, während $f(a)$ entweder $= f(a+0)$ oder $f(a-0)$ sein soll, lässt sich für die Sprungstelle a selbst nicht genau darstellen, sofern die betreffende Darstellungsformel daselbst den Mittelwerth $\frac{1}{2}\{f(a+0) + f(a-0)\}$ liefert. Mit Hülfe von Ausdrücken, wie sie im vorhergehenden Aufsatze betrachtet wurden, lässt sich jedoch die Darstellung zu einer auch für $x = a$ genauen machen: man hat nämlich zu der ursprünglichen Formel nur einen Ausdruck zu addiren, welcher für $x = a$ den Werth

$$\pm \frac{1}{2}\{f(a+0) - f(a-0)\}$$

annimmt, für jedes andere x aber verschwindet.

Von diesem Principe will ich eine Anwendung machen, um die grösste in x enthaltene ganze Zahl $E(x)$ durch eine unendliche Reihe darzustellen. Dabei lege ich einigen Werth darauf, dass diese Entwicklung sich mit durchaus elementaren Mitteln — d. h. ohne Anwendung der Fourier'schen Coefficientenbestimmung oder überhaupt der Infinitesimalrechnung — bewerkstelligen lässt.

Die Variable x werde auf das positive Intervall beschränkt. Bildet man dann zunächst

$$F(x) = x - E(x), \tag{1}$$

so stimmt $F(x)$ im Intervalle von 0 bis 1 — die Grenze 1 ausgeschlossen — mit x überein, springt, sobald x den Werth 1 erreicht, plötzlich nach 0 zurück, um sodann im Intervalle von 1 bis 2 genau ebenso zu verlaufen, u. s. f. Es ist also $F(x)$ eine periodische Func-

tion mit der Periode 1 und zwar ist, wenn m eine positive ganze Zahl h einen ächten Bruch bedeutet

(2) $$F(m) = 0, \quad F(m+h) = h, \quad F(m+1) = 0.$$

Eine solche Function kann man aber — abgesehen von den Sprungstellen — leicht mit Hülfe einer sehr bekannten trigonometrischen Reihe darstellen.

Es ist

$$\sum_1^\infty {}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{\sin \nu x}{\nu} = \frac{x}{2} \quad \text{für} \quad -\pi < x < +\pi.$$

$$\sum_1^\infty {}_\nu \frac{\sin \nu x}{\nu} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & \text{für} \quad 0 < x \leqq \pi, \\ -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & \text{für} \quad -\pi \leqq x < 0 \end{cases}$$

ein Resultat, welches man bekanntlich durch einen einfachen Grenzübergang unmittelbar aus der Binomialreihe herleiten kann. Schreibt man $2\pi x$ für x, so wird

(3) $$\frac{1}{\pi} \sum_1^\infty {}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu} = x \quad \text{zunächst für} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2},$$

(4) $$\frac{1}{\pi} \sum_1^\infty {}_\nu \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu} = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{,,} \quad \text{,,} \quad 0 < x \leqq \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} - x & \text{,,} \quad \text{,,} \quad -\frac{1}{2} \leqq x < 0. \end{cases}$$

Nimmt dann aber x Werthe zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 (1 excl.) an, so setze man x in die Form

$$x = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - x\right)$$

wo jetzt $\left(\frac{1}{2} - x\right)$ offenbar zwischen 0 und $-\frac{1}{2}$ liegt; alsdann ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty {}_\nu \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu} &= \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty {}_\nu \frac{\sin\left\{\nu\pi - 2\nu\pi\left(\frac{1}{2} - x\right)\right\}}{\nu} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty {}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{\sin 2\nu\pi\left(\frac{1}{2} - x\right)}{\nu} \\ &= \frac{1}{2} - x \quad \text{(nach Gl. (3))} \end{aligned}$$

und es gilt somit diese Formel nicht nur in dem beschränkten Intervalle, wie in Gl. (4) angegeben, sondern im ganzen Intervalle $0 < x < 1$, sodass also für dieses nämliche Intervall

(5) $$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty {}_\nu \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu} = x \qquad (0 < x < 1)$$

wird. Da diese Reihe aber die Periode 1 besitzt, so stimmt sie offenbar vollständig mit der oben betrachteten Function $F(x)$ überein — freilich noch mit Ausschluss der Stellen $x = 0, 1, 2, \ldots$, an welchen $F(x)$ verschwindet, während die Reihe (5) dort den Werth $\frac{1}{2}$ annimmt. Bezeichnet man nun aber mit $G(x)$ eine Function, die für alle ganzzahligen x (einschliesslich der Null) den Werth 1 annimmt, für alle anderen Werthe von x verschwindet, so hat man

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu} - \frac{1}{2} G(x)$$

also

$$E(x) = -\frac{1}{2} + x + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu} + \frac{1}{2} G(x). \tag{6}$$

(Diese Formel stimmt für rational gebrochene Werthe $x = \frac{p}{q}$ — für die also $G\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ ist — genau mit derjenigen überein, welche Herr Stern gelegentlich auf einem sehr viel complicirteren Wege abgeleitet hat).*)

Es bleibt jetzt noch die Function $G(x)$ zu bestimmen — was nach dem in dem vorigen Aufsatze gesagten — auf unzählig viele verschiedene Arten geschehen kann. Als vielleicht einfachste Möglichkeit bietet sich hier sofort der Ausdruck dar:

$$\begin{aligned} G(x) &= \lim (\cos \pi x)^{2n} \qquad (n = \infty) \\ &= 1 - \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \left\{ (\cos \pi x)^{2\nu} - (\cos \pi x)^{2\nu+1} \right\} \\ &= 1 - \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \sin^2 \pi x \,.\, \cos^{2\nu} \pi x, \end{aligned} \tag{7}$$

welcher in der That für alle ganzzahligen x (incl. $x = 0$) den Werth 1 annimmt, für alle anderen x verschwindet.

Der Ausdruck (6) für $E(x)$ erhält indessen eine einheitlichere Form, wenn man auch $G(x)$ durch eine trigonometrische Reihe im gewöhnlichen Sinne (d. h. eine solche die nur linear aus $\cos \nu\pi x$, $\sin \nu\pi x$ zusammengesetzte Glieder enthält) darstellt. Zwar liesse sich offenbar die soeben für $G(x)$ entwickelte Reihe in diesem Sinne umformen (mit Hülfe der bekannten Formel für $\cos^{\varkappa} \pi x$): indessen

*) Crelle's Journal Bd. 59. S. 151. Dort wird auch erwähnt, dass Herr Schaar dieselbe Formel ebenfalls abgeleitet hat. Doch ist mir die betreffende Arbeit — (in den Mém. des sav. étr. publiés par l'acad. des sc. de Belgique, T. 23) — bisher nicht zugänglich gewesen.

erscheint es mir einfacher die folgende neue Entwicklung vorzunehmen. Es ist

$$\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{\sin(2\nu-1)x}{2\nu-1}\begin{cases} = \;\;1 & \text{für} \quad 0 < x < \pi, \\ = -1 & \;\;\text{„} \quad -\pi < x < 0, \\ = \;\;0 & \qquad\qquad x = 0 \end{cases}$$

(wie übrigens wiederum unmittelbar durch Addition der beiden bereits oben benützten trigonometrischen Reihen sich ergiebt), folglich nimmt das Quadrat dieser Reihe den Werth $+1$ an für alle x mit Ausschluss der Stellen $x=0$ und $x=\pm m\pi$, für welche es verschwindet. Setzt man dann noch πx für x, so ergiebt sich sofort

$$G(x) = 1 - \frac{16}{\pi^2}\left\{\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{\sin(2\nu-1)\pi x}{2\nu-1}\right\}^2 \tag{8}$$

also ein Ausdruck, welcher in der That für alle ganzzahligen x (incl. $x=0$) den Werth 1 annimmt, sonst aber verschwindet. Das hierin vorkommende Reihenquadrat kann man mit Hülfe der Multiplicationsregel ausführen.

Dabei wird, wenn man bemerkt, dass

$$\sum_{1}^{\nu}{}_{\varkappa}\frac{1}{(2\varkappa-1)(2\nu+1-2\varkappa)} = \frac{1}{\nu}\sum_{1}^{\nu}{}_{\varkappa}\frac{1}{2\varkappa-1}$$

ist:

$$G(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left\{\sum_{1}^{\nu}{}_{\varkappa}\frac{\cos 2(\nu+1-2\varkappa)\pi x}{(2\varkappa-1)(2\nu+1-2\varkappa)} - \frac{\cos 2\nu\pi x}{\nu}\sum_{1}^{\nu}{}_{\varkappa}\frac{1}{2\varkappa-1}\right\},$$

sodass sich schliesslich für $E(x)$ die folgende für alle $x \geqq 0$ gültige Reihenentwicklung ergiebt:

$$E(x) = x + \frac{1}{4}\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu} \tag{9}$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left\{\sum_{1}^{\nu}{}_{\varkappa}\frac{1}{2\varkappa-1}\,\frac{\cos 2\nu\pi x}{\nu} - \sum_{1}^{\nu}{}_{\varkappa}\frac{\cos 2(\nu+1-2\varkappa)\pi x}{(2\varkappa-1)(2\nu+1-2\varkappa)}\right\}.$$

München, October 1883.

Ueber die Bedeutung der Begriffe „Maximum und Minimum" in der Variationsrechnung.

Von

LUDWIG SCHEEFFER †.*)

Zur Lösung der Aufgabe, zwischen zwei festen Punkten mit den Coordinaten $\overset{0}{x}\overset{0}{y}$ und $\overset{1}{x}\overset{1}{y}$ diejenige Curve zu finden, für welche das Integral:

$$J = \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y, y')\,dx$$

ein Minimum (resp. Maximum) wird, entwickelt man die Differenz:

$$F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - F(x, y, y')$$

nach Potenzen von Δy und $\Delta y'$. Bezeichnet man dann mit G_r das von $\overset{0}{x}$ bis $\overset{1}{x}$ genommene Integral der Glieder r^{ter} Dimension in jener Entwickelung, sodass

$$\Delta J = \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x,y+\Delta y,y'+\Delta y')\,dx - \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x,y,y')\,dx = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots$$

wird, so wird die Function y durch die Forderung bestimmt, dass die „erste Variation" G_1 für jede beliebige Function Δy, welche an den Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ verschwindet, gleich Null werde.

*) Mitten aus dem regsten und fruchtbarsten Schaffen ist Ludwig Scheeffer der Wissenschaft entrissen worden, die er trotz der kurzen Zeit, die ihm vergönnt war, durch eine Reihe von fundamental wichtigen Arbeiten bereichert hat. Geboren am 1. Juni 1859 zu Königsberg i./Pr. starb er am 11. Juni 1885 in München.

Die Note, die wir hier aus den Leipziger Berichten zum Abdruck bringen, ist dieselbe, auf die er Bd. XXV, p. 594 dieser Annalen verwiesen hatte.

Die Redaction.

Man pflegt hierauf die Frage, ob das Integral J für diese bestimmte Curve y wirklich einen Minimalwerth annehme, dahin zu beantworten, dass dieses der Fall sei oder nicht, jenachdem die „zweite Variation“ G_2 für alle an den Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ verschwindenden Functionen Δy positiv ist oder auch negativ werden kann. Die Begründung dieses Kriteriums geschieht gewöhnlich folgendermassen. Man setzt $\Delta y = \varkappa\eta$, wo $\varkappa$ eine Constante ist. Dann geht die Entwicklung ΔJ über in die Entwicklung $\varkappa^2\gamma_2 + \varkappa^3\gamma_3 + \cdots$, wo γ_r sich von G_r nur dadurch unterscheidet, dass η und η' an Stelle von Δy und $\Delta y'$ stehen. Bei einer bestimmten Annahme der Function η und fortgesetzter Verkleinerung der Constante $\varkappa$ erhält dann ΔJ schliesslich immer das Vorzeichen von γ_2; ist also γ_2 negativ, so wird auch ΔJ schliesslich negativ, d. h. das Integral

$$\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y + \varkappa\eta, y' + \varkappa\eta')\, dx,$$

betrachtet als Function von $\varkappa$ allein, hat für $\varkappa = 0$ ein Maximum; und ist γ_2 positiv, so wird auch ΔJ schliesslich positiv, d. h. jenes Integral hat für $\varkappa = 0$ ein Minimum. Nennt man die einfach unendliche Mannigfaltigkeit aller derjenigen Curven $y + \Delta y$, welche sich von einander nur durch die Werthe der Constanten $\varkappa$ unterscheiden, eine „η-Schaar“, so kann man sagen, die Curve y macht das Integral J zu einem Minimum oder Maximum „innerhalb der einzelnen η-Schaar“, jenachdem der zu einer solchen Schaar gehörige Werth von γ_2 positiv oder negativ ist. Nun pflegt man weiter so zu überlegen: Ist γ_2 für irgend eine Function η negativ, so tritt schon innerhalb dieser einzelnen η-Schaar für die Curve y kein Minimum, sondern im Gegentheil ein Maximum ein, es kann also um so weniger von einem Minimum unter allen überhaupt möglichen Curven die Rede sein; wird dagegen γ_2 für *alle* Functionen η positiv, so ist für die Curve y ein Minimum innerhalb *jeder* η-Schaar vorhanden, es muss daher, *weil jede beliebige Curve sich einer η-Schaar einreihen lässt*, auch ein Minimum überhaupt stattfinden.

Der letzte Theil dieser Ueberlegung, auf welche man das Kriterium des Minimums zu gründen pflegt, enthält nun einen Fehlschluss, dessen Aufdeckung es zunächst sehr zweifelhaft macht, ob jenes Kriterium überhaupt richtig ist. Daraus nämlich, dass ein Minimum innerhalb jeder einzelnen η-Schaar stattfindet, folgt noch nicht, dass auch ein Minimum überhaupt eintritt, obschon es unbestreitbar ist, dass jede willkürlich gegebene Curve sich einer gewissen η-Schaar einreihen lässt. Und dieser Schluss ist nicht etwa ein Fehlschluss

von der Art, dass man seine Anfechtung als eine Spitzfindigkeit ansehen könnte, die für alle in der Anwendung vorkommenden Fälle ohne Bedeutung wäre; vielmehr führt derselbe bei ganz concreten Problemen direct zu falschen Resultaten. So zum Beispiel könnten wir — um nur eine der verschiedenen Richtungen anzugeben, nach welchen sich der Fehler weiter verfolgen lässt — vermittelst jenes Schlusses auf dem vorher eingeschlagenen Wege offenbar auch folgenden Satz beweisen: „Ein Minimum des Integrales J findet statt, wenn erstens die zweite Variation G_2 niemals negativ wird und zweitens für diejenigen Functionen Δy, für welche jene etwa verschwinden sollte, die nächsthöhere von Null verschiedene Variation von gerader Ordnung und positiv ist"; denn wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so tritt wiederum sicherlich ein Minimum innerhalb jeder einzelnen η-Schaar ein. Nun existiren Beispiele von verhältnissmässig einfacher Beschaffenheit, welche mit dem letzten Satze entschieden im Widerspruche stehen. In einem solchen Beispiele, welches ich gefunden habe, hat das Integral, durch welches die Länge einer Curve auf einer gewissen Fläche zwischen zwei gegebenen Endpunkten ausgedrückt wird, für eine bestimmte Curve y die erste Variation gleich Null, die zweite im Allgemeinen positiv, ausgenommen eine einzige Schaar $\Delta y = \varkappa\eta$, für welche gleichzeitig die zweite bis fünfte Variation verschwindet, während die sechste positiv wird. Trotzdem tritt *kein* Minimum ein, vielmehr giebt es auf der Fläche kürzere Verbindungslinien derselben Endpunkte noch in jeder Nähe der betrachteten Curve. Es war ursprünglich meine Absicht, dieses Beispiel hier ausführlich mitzutheilen, zumal dasselbe vermöge seines geometrischen Inhalts wohl geeignet ist, den inneren Grund für die Unzulässigkeit der angestellten Ueberlegung zu Tage treten zu lassen. Inzwischen habe ich gefunden, dass analoge Verhältnisse in der weitaus einfacheren und durchsichtigeren Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima bestehen. Ich möchte aus diesem Grunde auf die Discussion jenes Fehlschlusses und auch auf die ausführliche Mittheilung meines Beispiels verzichten und in dieser Hinsicht lieber auf eine demnächst zu publicirende Untersuchung über die gewöhnlichen Maxima und Minima verweisen*).

---

*) Die erste Anregung zu derartigen Ueberlegungen verdanke ich Herrn A. Mayer, der mich gelegentlich auf ein von Erdmann behandeltes Problem (Zeitschrift f. Mathem. Bd. 22, p. 331) aufmerksam machte. Erdmann untersucht das Integral, durch welches die Länge einer zwischen zwei Gegenpolen auf einer Kugelfläche sich erstreckenden Curve gegeben ist, und findet, dass bei gewisser Wahl des Coordinatensystems für einen Halbkreis die zweite Variation jenes Integrals zwar verschwinden kann, aber nur, indem gleichzeitig die dritte Variation verschwindet und die vierte positiv wird. Es tritt also hier innerhalb jeder η-Schaar ein wirkliches Minimum ein, während doch in jeder Nähe der

In der vorliegenden Note soll nun aber der Nachweis geführt werden, dass, solange es sich nur um die zweite Variation handelt, das gewöhnliche Kriterium des Minimums unter bestimmten Voraussetzungen doch noch in gewissem Sinne hinreicht. Dieser Nachweis wird freilich auf einem ganz anderen Wege, als dem vorher angedeuteten, erreicht werden. Wir werden nämlich zeigen, dass, wenn die zweite Variation des Integrales

$$\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y, y')\, dx$$

für alle Functionen Δy positiv ist, sich im Allgemeinen zwei Grössen g und g' so angeben lassen, dass auch die Differenz

$$\Delta J = \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y')\, dx - \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y, y')\, dx$$

positiv wird für jede Function Δy, welche im Intervalle $\overset{0}{x}\,\overset{1}{x}$ selbst durchweg absolut kleiner als g ist, während ihre Ableitung $\Delta y'$ durchweg absolut kleiner als g' bleibt. Auf diesen Satz ist alsdann die präcise Definition des Begriffes Minimum für die Variationsrechnung zu gründen: *„Ein Minimum ist vorhanden, wenn zwei Grössen g und g' so bestimmbar sind, dass das Integral J durch die Function y einen kleineren Werth erhält als durch alle Functionen $y + \Delta y$, welche den Beschränkungen $|\Delta y| < g$, $|\Delta y'| < g'$ unterliegen; oder wenn — geometrisch zu reden — das Integral J für die Curve y kleiner wird als für alle anderen, welche ganz in einem jene Curve enthaltenden (durch die Grösse g bestimmten) Flächenstreifen liegen und zugleich überall höchstens einen gewissen (durch g' bestimmten) Winkel mit jener Curve bilden.“*

Dieser Begriff des Minimums ist zwar enger als der gewöhnlich angenommene, welcher nur die Beschränkung der Variation Δy durch

---

betrachteten Curve andere Curven (Halbkreise) zwischen denselben Endpunkten existiren, für welche der Werth des Längenintegrales wenigstens *nicht grösser* ist. Auf Erdmann's Beispiel construirte ich mir dann das meinige, in welchem bei ganz analogem Verhalten der verschiedenen Variationen sogar Curven mit *geringerem* Werthe des Längenintegrales in jeder Nähe der betrachteten Curve existiren. — Uebrigens zeigt das in der Note auf Seite 201 angegebene, höchst einfache Beispiel, dass unter speciellen Umständen sogar schon die zweite Variation *beständig positiv* sein kann, ohne dass ein Minimum stattfindet. Wir haben hier nur deshalb jene in analytischer Hinsicht weit complicirteren Beispiele in den Vordergrund gestellt, weil dieselben eine geometrische Bedeutung besitzen.

die Bedingung $|\Delta y| < g$, nicht aber die Beschränkung ihrer Ableitung durch die Bedingung $|\Delta y'| < g'$ verlangt; man darf indessen, wenn man *allein mit den Hülfsmitteln der Variationsrechnung* zu hinreichenden Kriterien des Minimums gelangen will, die zweite (auf $\Delta y'$ bezügliche) Beschränkung nicht fortlassen und überhaupt über die aufgestellte Definition des Minimums nicht hinausgehen. In der That zeigt das von Herrn Weierstrass angegebene Beispiel, welches ich in der meinem Aufsatze „Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums einfacher Integrale" beigefügten Note (diese Annalen Bd. 25, p. 595) mitgetheilt habe, dass die zweite Variation durchaus positiv sein und doch das Integral für gewisse Nachbarcurven $y + \Delta y$, welche nur der Bedingung $|\Delta y| < g$, nicht aber der Bedingung $|\Delta y'| < g'$ unterliegen, noch kleiner als für die Curve y werden kann.

Auch den Beweis des Satzes, dass ein Minimum *in dem angegebenen Sinne* stattfindet, falls die erste Variation gleich Null und die zweite beständig positiv ist, vermögen wir nur unter gewissen Voraussetzungen zu führen. Es sind genau dieselben Voraussetzungen, an welche man von den Untersuchungen über die Transformation der zweiten Variation in eine zur Discussion ihres Vorzeichens geeignete Form seit Jacobi gewöhnt ist. Diese Voraussetzungen sind für unseren *Beweis* deshalb unentbehrlich, weil derselbe sich von Anfang an auf jene Transformation stützt; sie zeigen sich aber bei genauerer Prüfung zum Theil auch als wesentlich für den Bestand *des Satzes selbst* *). Jedenfalls ist,

---

*) Dies gilt wenigstens von der Voraussetzung $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$. Für den Schluss auf das positive Vorzeichen die zweiten Variation genügt nämlich unter sonst gleichen Umständen die Sicherheit, dass $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ im Allgemeinen positiv und höchstens an einzelnen Stellen gleich Null wird; für den Schluss auf das Minimum im angegebenen Sinne hingegen ist es nothwendig, dass $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ im Intervalle $\overset{0}{x}\,\overset{1}{x}$ auch einen positiven *Minimalwerth* besitzt, da man sonst in manchen Fällen noch bei beliebig kleinen Variationen Δy und $\Delta y'$ bewirken kann, dass das Vorzeichen der *dritten* Variation ausschlaggebend wird. Es sei zum Beispiel

$$F(x, y, y') = (x-a)^2 y'^2 + (x-a) y'^3, \quad \left(\overset{0}{x} < a < \overset{1}{x}\right),$$

ferner seien die für $x = \overset{0}{x}$ und $x = \overset{1}{x}$ vorgeschriebenen Werthe von y beide gleich c. Durch Nullsetzen der ersten Variation und Anwendung der Grenzbedingungen erhält man dann die Lösung $y = c$, und für diese Lösung wird die zweite Variation gleich $\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} (x-a)^2 \Delta y'^2 \, dx$, also beständig positiv. Trotzdem findet kein Minimum im angegebenen Sinne statt. Setzt man nämlich Δy von $\overset{0}{x}$ bis

was wir nachweisen werden, nicht eigentlich, dass ein Minimum stattfindet, sobald die zweite Variation positiv ist, sondern vielmehr, dass ein Minimum stattfindet, sobald gewisse Bedingungen erfüllt sind, die man als *hinreichende Bedingungen für das Positivsein der zweiten Variation* längst kennt.

Die Voraussetzungen, welche wir machen, sind folgende: I. Alle partiellen Ableitungen der Function $F(x, y, y')$ nach y und y' bis zur dritten Ordnung sind im Intervalle $\overset{0}{x}\,\overset{1}{x}$ einschliesslich der Grenzen endlich und stetig, $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ *ausserdem durchaus positiv.* II. Eine gewisse Determinante $\Delta\left(x, \overset{0}{x}\right)$ ist für alle Werthe von x zwischen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ und auch noch für $x = \overset{1}{x}$ *von Null verschieden* und nebst ihrer ersten Ableitung endlich und stetig.

Die Determinante $\Delta\left(x, \overset{0}{x}\right)$ ist folgendermassen zu bilden. Durch Nullsetzen der ersten Variation ergiebt sich für y zunächst eine Function mit zwei willkürlichen Constanten, welche nachher vermittelst der Grenzwerthe, die y für $x = \overset{0}{x}$ und $x = \overset{1}{x}$ annehmen soll, bestimmt werden. Sind u_1 und u_2 die beiden partiellen Ableitungen von y nach jenen Constanten, $\overset{0}{u}_1$ und $\overset{0}{u}_2$ die Werthe von u_1 und u_2 für $x = \overset{0}{x}$, so ist $\Delta\left(x, \overset{0}{x}\right) = \overset{0}{u}_1 u_2 - \overset{0}{u}_2 u_1$.

Sind von den gemachten Voraussetzungen die nur auf Endlichkeit und Stetigkeit bezüglichen erfüllt, während irgendwo im Intervalle $\overset{0}{x}\,\overset{1}{x}$ entweder $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ negativ oder $\Delta\left(x, \overset{0}{x}\right)$ gleich Null wird, oder beides, so ist die zweite Variation auch des negativen Vorzeichens fähig*)

$a - \varepsilon$, sowie von $a + \varepsilon$ bis $\overset{1}{x}$, gleich Null, von $a - \varepsilon$ bis a aber gleich $\varkappa(x - a + \varepsilon)$ und von a bis $a + \varepsilon$ gleich $\varkappa(a + \varepsilon - x)$, so wird die zweite Variation gleich $\frac{2}{3}\varkappa^2\varepsilon^3$, die vollständige Differenz

$$\Delta J = \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y')\,dx - \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y, y')\,dx$$

hingegen gleich $\frac{2}{3}\varkappa^2\varepsilon^3 - \varkappa^3\varepsilon^2$. Der grösste absolute Werth von Δy ist dann $\varkappa\varepsilon$, derjenige von $\Delta y'$ ist $\varkappa$. Mag man nun die Grenzen g und g' für $|\Delta y|$ und $|\Delta y'|$ noch so klein annehmen, immer sinkt, wenn man zuvörderst den Werth von $\varkappa$ (und damit von $|\Delta y'|$) kleiner als g' macht und sodann festhält, $\varkappa\varepsilon$ (und damit $|\Delta y|$) bei fortgesetzter Verkleinerung von ε schliesslich unter die Grenze g, während die Differenz ΔJ gerade für *kleine* Werthe von ε schliesslich negativ wird.

*) Der Beweis ist in § 2 meiner bereits genannten Arbeit (diese Annalen Bd. 25) gegeben.

und es findet daher nach den früheren Auseinandersetzungen sicher *kein* Minimum statt, da innerhalb gewisser η-Schaaren sogar ein Maximum vorhanden ist. Wir zeigen jetzt, dass andererseits, wenn *alle* aufgezählten Voraussetzungen erfüllt sind, *sicher* ein Minimum eintritt.

Der Gang des Beweises ist in den Grundzügen folgender. Nach Lagrange ist

$$F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') = F(x, y, y') + g_1 + g_2 + r_3,$$

wo

$$g_1 = \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \Delta y',$$

$$2g_2 = \frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial y^2} \Delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \Delta y \Delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \Delta y'^2,$$

$$6r_3 = \frac{\partial^3 F(x, y + \vartheta \Delta y, y' + \vartheta \Delta y')}{\partial y^3} \Delta y^3 + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial y^2 \partial y'} \Delta y^2 \Delta y'$$
$$+ 3 \frac{\partial^3 F}{\partial y \partial y'^2} \Delta y \Delta y'^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y'^3} \Delta y'^3,$$
$$(0 < \vartheta < 1).$$

Es wird daher, weil das Integral $\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} g_1\, dx$ für die in Betracht gezogene Function y identisch verschwindet (vorausgesetzt natürlich, dass Δy an den Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ verschwindet),

$$(1)\quad \Delta J = \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y + \Delta y', y' + \Delta y')\, dx - \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y, y')\, dx = G_2 + R_3,$$

wo zur Abkürzung

$$G_2 = \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} g_2\, dx, \qquad R_3 = \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} r_3\, dx$$

gesetzt ist. Wir zeigen nun, dass unter den aufgezählten Voraussetzungen R_3 immer absolut kleiner als G_2 wird, sobald nur die absoluten Werthe von Δy und $\Delta y'$ durchweg unterhalb gewisser Grenzen g und g' liegen; woraus dann unmittelbar folgt, dass bei dieser Beschränkung der Variationen Δy und $\Delta y'$ die Differenz ΔJ immer das (positive) Vorzeichen des ersten Gliedes auf der rechten Seite der Gleichung (1), d. h. der zweiten Variation, hat.

Es werde zunächst G_2 untersucht. Dieses Integral kann nach Jacobi, wenn die gemachten Voraussetzungen sämmtlich erfüllt sind, immer auf die Form

$$(2)\qquad G_2 = \frac{1}{2}\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\, u^2 \left(\frac{d}{dx}\,\frac{\Delta y}{u}\right)^2 dx$$

gebracht werden, wo u eine von $\overset{0}{x}$ bis $\overset{1}{x}$, einschliesslich dieser Grenzen, von Null verschiedene und nebst ihrer ersten Ableitung endliche und stetige Function bedeutet, welche linear aus den vorher definirten Functionen u_1 und u_2 zusammengesetzt ist*). Führen wir statt Δy eine Function ζ durch die Gleichung

$$(3)\qquad \zeta = \frac{\Delta y}{u}$$

ein, so wird also

$$G_2 = \frac{1}{2}\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\, u^2 \zeta'^2\, dx,$$

---

*) In § 2 meiner mehrfach genannten Abhandlung (diese Ann. Bd. 25) habe ich diejenige Transformation der zweiten Variation abgeleitet, in welche die obenstehende Formel (2) für $u = \Delta(x, \overset{0}{x})$ übergeht. Die Function $\Delta(x, \overset{0}{x})$ verschwindet indessen zwar nicht zwischen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$, aber für $x = \overset{0}{x}$ selbst, während in der Formel (2) für unsere jetzigen Zwecke eine Function u gebraucht wird, die im Intervalle $\overset{0}{x}\,\overset{1}{x}$ einen von Null verschiedenen *Minimalwerth* besitzt. Zu einer solchen Function u und dem Beweise der Gültigkeit obiger Formel für dieselbe gelangt man nun auf Grund der im genannten Aufsatze gegebenen Entwickelungen leicht folgendermassen. Bedeutet $\overset{0}{\xi}$ einen Werth von x, der ausserhalb des Intervalles $\overset{0}{x}\,\overset{1}{x}$ und so nahe bei $\overset{0}{x}$ liegt, dass auch $\Delta(x, \overset{0}{\xi})$ noch im ganzen Intervalle $\overset{0}{\xi}\,\overset{1}{x}$ von Null verschieden und nebst der ersten Ableitung endlich ist, so gilt die in jenem Aufsatze ausgeführte Transformation auch dann noch, wenn *überall* $\overset{0}{x}$ durch $\overset{0}{\xi}$ ersetzt wird, es wird also auch

$$\frac{1}{2}\int_{\overset{0}{\xi}}^{\overset{1}{x}}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,\Delta y^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}\,\Delta y\,\Delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\,\Delta y'^2\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\overset{0}{\xi}}^{\overset{1}{x}} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\,\Delta(x, \overset{0}{\xi})^2 \left(\frac{d}{dx}\,\frac{\Delta y}{\Delta(x, \overset{0}{\xi})}\right)^2 dx,$$

wo die Function Δy an den Grenzen $\overset{0}{\xi}$ und $\overset{1}{x}$ verschwinden muss. Hieraus ergiebt sich aber, wenn Δy von $\overset{0}{\xi}$ bis $\overset{0}{x}$ gleich Null und von $\overset{0}{x}$ bis $\overset{1}{x}$ ganz willkürlich angenommen und gleichzeitig $\Delta(x, \overset{0}{\xi})$ mit u bezeichnet wird, unmittelbar die obenstehende Formel (2), in welcher nun u wirklich eine von $\overset{0}{x}$ bis $\overset{1}{x}$ *einschliesslich dieser beiden Grenzen* von Null verschiedene Function von x ist.

und wenn der kleinste Werth des Ausdruckes $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} u^2$ im Intervalle $\overset{0}{x}\overset{1}{x}$, welcher nach Voraussetzung positiv ist, mit $2a^2$ bezeichnet wird,

$$(4) \qquad G_2 > a^2 \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \zeta^2\, dx.$$

Wir untersuchen zweitens das Restglied $R_3 = \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} r_3\, dx$, und zwar wollen wir auch in diesem Restgliede statt Δy und $\Delta y'$ resp. die Ausdrücke $u\zeta$ und $u\zeta' + u'\zeta$ substituiren. Es entsteht dadurch zunächst für r_3 ein homogener Ausdruck dritten Grades in ζ und ζ', dessen Coefficienten aus den dritten Ableitungen der Function F für die Argumente $x, y + \vartheta\Delta y, y' + \vartheta\Delta y'$ und aus u und u' zusammengesetzt sind. Den gemachten Voraussetzungen gemäss werden sich dann jedenfalls für die Grössen $|\Delta y|$ und $|\Delta y'|$ vorweg solche obere Grenzen bestimmen lassen, dass alle jene Coefficienten im Intervalle $\overset{0}{x}\overset{1}{x}$ endlich und, absolut genommen, kleiner als eine angebbare Constante C^2 bleiben, so lange Δy und $\Delta y'$ jene Grenzen nicht überschreiten. Für alle so beschränkten Functionen Δy wird dann offenbar

$$|r_3| < C^2 (|\zeta| + |\zeta'|)(\zeta^2 + \zeta'^2)$$

und demnach

$$|R_3| < C^2 (Z + Z') \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} (\zeta^2 + \zeta'^2)\, dx,$$

wo mit Z und Z' die grössten absoluten Werthe bezeichnet sind, welche die Functionen ζ und ζ' zwischen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ annehmen. Die letzte Ungleichung kann noch umgestaltet werden vermittelst des — nachher zu beweisenden — Satzes, dass das Integral $\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \zeta^2\, dx$ niemals grösser als $\frac{(\overset{1}{x} - \overset{0}{x})^2}{\pi^2} \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \zeta'^2\, dx$ ist, wie man auch die an den Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ verschwindende Function ζ im Uebrigen annehmen mag. Es ergiebt sich auf diese Weise, wenn noch für $C^2\left(1 + \frac{(\overset{1}{x} - \overset{0}{x})^2}{\pi^2}\right)$ eine neue Constante c^2 gesetzt wird, schliesslich die Relation

$$(5)\qquad |R_3| < c^2(Z+Z')\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \zeta'^2\,dx.$$

Combinirt man die Formeln (4) und (5) mit einander, so erkennt man ohne Weiteres, dass für die Grösse $Z+Z'$ und daher auch für Z und Z', d. h. für die absoluten Werthe von ζ und ζ', obere Grenzen h und h' anggebbar sind mit der Eigenschaft, dass in der Formel (1) die rechte Seite *sicher* das (positive) Vorzeichen ihres ersten Gliedes G_2 hat, sobald im ganzen Intervalle $\overset{0}{x}\,\overset{1}{x}$ zugleich $|\zeta|<h$ und $|\zeta'|<h'$ ist.

Auf Grund der Gleichungen $\zeta=\frac{\Delta y}{u}$, $\zeta=-\frac{u'}{u^2}\Delta y+\frac{\Delta y'}{u}$ wird man nun endlich noch für $|\Delta y|$ und $|\Delta y'|$ solche obere Grenzen g und g' aufstellen können, dass unter der Bedingung $|\Delta y|<g$ und $|\Delta y'|<g'$ immer auch $|\zeta|<h$ und $|\zeta'|<h'$ wird. Ist nämlich U der (nach Voraussetzung von Null verschiedene) kleinste absolute Werth von u, U' der (nach Voraussetzung endliche) grösste Werth von u' im Intervalle $\overset{0}{x}\,\overset{1}{x}$, so ist zunächst $|\zeta|\leqq\frac{|\Delta y|}{U}$, $|\zeta'|\leqq\frac{U'}{U^2}|\Delta y|+\frac{|\Delta y'|}{U}$. Man braucht daher nur, was immer möglich ist, vorerst die Constante g so zu wählen, dass sowohl $\frac{g}{U}<h$, als auch $\frac{U'}{U^2}g<h'$ wird und darauf die Constante g' so zu bestimmen, dass $\frac{g'}{U}<h'-\frac{U'}{U^2}g$ wird*).

Es ist noch der Beweis des Satzes nachzuholen, dass das Integral $\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\zeta^2\,dx$, falls die Function ζ an den Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ verschwindet, niemals grösser als $\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\zeta'^2\,dx$ sein kann. Es giebt nämlich unter allen denjenigen Functionen ζ, für welche das Integral $\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\zeta'^2\,dx$ einen vorgeschriebenen Werth A annimmt, eine, welche das Integral $\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\zeta^2\,dx$

---

*) Wir bemerken, dass die Constanten g und g' desto kleiner werden, je kleiner der mit U bezeichnete Minimalwerth von $|u|$ wird, d. h. wenn wir uns die obere Integralgrenze $\overset{1}{x}$ auf der Curve y verschoben denken und dabei die in einer früheren Anmerkung gegebene Bestimmung der Function u im Auge behalten, je näher $\overset{1}{x}$ an diejenige Stelle rückt, wo die Determinante $\Delta(x,\overset{0}{x})$ zum ersten Male den Werth Null annimmt. Hieraus erklärt sich die anderweitig bewiesene Thatsache, dass beim Ueberschreiten jener Stelle das Minimum des Integrals J überhaupt aufhört.

zu einem Maximum macht. Man findet dieselbe nach den bekannten Regeln der Variationsrechnung gleich $\sqrt{A}\,\frac{\sqrt{2(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})}}{\pi}\sin\left(\frac{x-\overset{0}{x}}{\overset{1}{x}-\overset{0}{x}}\pi\right)$ und kann vermittelst der Jacobi'schen Transformation der *zweiten* Variation, auf welche sich in diesem Falle die *Gesammtvariation* des Integrales reducirt, zeigen, dass der jener Function entsprechende Werth von $\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\zeta^2\,dx$, nämlich $A\,\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}$, wirklich der grösstmögliche ist. Die Jacobi'sche Transformation beruht auf folgender Formel, in welcher man eine von der Theorie der Variation ganz unabhängige, für beliebige Functionen ζ und ω gültige Identität erkennen wird:

$$\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\int\zeta'^2\,dx-\int\zeta^2\,dx=\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\int\left(\zeta'-\omega'\frac{\zeta}{\omega}\right)^2dx$$
$$-\int\left(\omega+\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\omega''\right)\zeta\frac{\zeta}{\omega}\,dx+\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\zeta\omega'\frac{\zeta}{\omega}.$$

Setzt man hier $\omega=\sin\left(\frac{x-\overset{0}{x}}{\overset{1}{x}-\overset{0}{x}}\pi\right)$ und geht gleichzeitig von den unbestimmten zu den bestimmten Integralen über (wobei zu berücksichtigen ist, dass der Quotient $\frac{\zeta}{\omega}$ auch an den Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ endlich bleibt, da ζ daselbst verschwindet und ζ' endlich ist), so erhält man die Jacobi'sche Transformation

$$\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\zeta'^2\,dx-\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\zeta^2\,dx=\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\left(\zeta'-\omega'\frac{\zeta}{\omega}\right)^2dx.$$

Die rechte Seite ist niemals negativ, folglich kann auch die linke es nicht sein, das heisst: das Integral $\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\zeta^2\,dx$ ist bei jeder beliebigen Wahl der Function ζ, vorausgesetzt, dass dieselbe an den Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ verschwindet und eine endliche Ableitung besitzt, höchstens gleich $\frac{(\overset{1}{x}-\overset{0}{x})^2}{\pi^2}\int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}}\zeta'^2\,dx$. W. z. b. w.

Wir formuliren zum Schluss das Hauptresultat unserer Untersuchung in folgendem Satze:

Es sei für eine bestimmte Function y die erste Variation des Integrales $J = \int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y, y')\,dx$ *(in welchem die Grenzwerthe von y für* $x = \overset{0}{x}$ *und* $x = \overset{1}{x}$ *als gegeben anzusehen sind) identisch gleich Null; es seien ferner im Intervalle* $\overset{0}{x}\,\overset{1}{x}$ *die partiellen Ableitungen von* $F(x, y, y')$ *bis zur dritten Ordnung, sowie die Determinante* $\Delta\left(x, \overset{0}{x}\right)$ *nebst ihrem Differentialquotienten endlich und stetig. Hat dann* $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ *im Intervalle* $\overset{0}{x}\,\overset{1}{x}$ *einen positiven Minimalwerth, und verschwindet die Determinante* $\Delta\left(x, \overset{0}{x}\right)$ *weder zwischen* $\overset{0}{x}$ *und* $\overset{1}{x}$ *noch an der Stelle* $x = \overset{1}{x}$ *selbst, so ist nicht nur die zweite Variation beständig positiv, sondern es findet auch ein Minimum des Integrales J statt, in dem Sinne, dass die Differenz*

$$\Delta J = \int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y')\,dx - \int\limits_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y, y')\,dx$$

positiv wird für jede Function Δy*, deren absoluter Betrag überall unterhalb einer gewissen Grenze g bleibt, während der absolute Betrag der Ableitung* $\Delta y'$ *sich durchweg unter einer zweiten Grenze g′ hält. Ist dagegen entweder* $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ *irgendwo im Intervalle* $\overset{0}{x}\,\overset{1}{x}$ *negativ, oder verschwindet* $\Delta\left(x, \overset{0}{x}\right)$ *irgendwo im Inneren desselben Intervalles, so ist die zweite Variation auch des negativen Vorzeichens fähig, und es tritt schon aus diesem Grunde kein Minimum des Integrales J im angegebenen Sinne ein.*

Der zweite Theil des vorstehenden Satzes ist in dieser Note nicht bewiesen, sondern aus meinem Aufsatze, diese Ann. Bd. 25, übernommen und nur der Vollständigkeit wegen hinzugefügt. Der erste Theil hingegen bildet eine wesentliche Ergänzung zu den in jenem Aufsatze angestellten Untersuchungen. Erst durch ihn wird der a. a. O. immer ohne Weiteres gezogene Schluss von dem Vorzeichen der zweiten Variation auf das Stattfinden eines Minimums resp. Maximums begründet und inhaltlich präcisirt.

Von einer Ausdehnung des Satzes auf den allgemeinen, in § 3 der genannten Arbeit behandelten Fall sehe ich an dieser Stelle ab.

Bemerkung über die Subdeterminanten symmetrischer Systeme.

Von

R. Mehmke in Darmstadt.

In den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom 27. Juli 1882 hat Herr Kronecker folgenden Satz mitgetheilt.

Bedeutet a_{mn} ein symmetrisches Grössensystem, so dass also

$$a_{mn} = a_{nm}$$

ist, so bestehen zwischen den aus diesen Grössen gebildeten Determinanten $l$ter Ordnung die linearen Beziehungen

$$|a_{gh}| = \sum_r |a_{ik}|,$$

$(g = 1, 2, \ldots, l;\ h = l+1, l+2, \ldots, 2l;\ i = 1, 2, \ldots, l-1, r;$
$k = l+1, \ldots, r-1, l, r+1, \ldots, 2l;\ r = l+1, l+2, \ldots, 2l)$.

Es scheint noch nicht bemerkt worden zu sein, dass der vorhergehende Satz in einem allgemeineren enthalten ist, welchen Grassmann in seiner „Linealen Ausdehnungslehre" von 1862 aufgestellt hat.

Der fragliche Satz, Nr. 183 (S. 131) des angeführten Werkes, wird von Grassmann so ausgesprochen:

Wenn man aus einer Reihe von Grössen erster Stufe die multiplicativen Combinationen zu irgend einer Classe bildet und jede derselben mit der ergänzenden Combination) zu einem inneren Product verknüpft, so ist die Summe dieser Producte Null.**)*

Nehmen wir an, es seien $(l+1)$ Grössen erster Stufe $a_l, a_{l+1}, \ldots, a_{2l}$ gegeben und betrachten wir speciell die Combinationen erster Classe, d. h. die Grössen a selbst, so erhält (bei Beobachtung der von Grassmann aufgestellten Zeichenregel, a. a. O. Nr. 172 Anm.) der eben mitgetheilte Satz die Gestalt

$$(1) \qquad [a_l \,|\, a_{l+1} \ldots a_{2l}] = \sum_r [a_r \,|\, a_{l+1} \ldots a_{r-1}\, a_l\, a_{r+1} \ldots a_{2l}],$$

$$(r = l+1, \ldots, 2l).$$

---

*) Ueber den Begriff der ergänzenden Combination sowie die Vorzeichenbestimmung S. a. a. O. Nr. 172 (S. 125) Anmerkung.

**) Ich erwähne, dass zu den Anwendungen des obigen Satzes auf die Punktgeometrie z. B. der Satz vom Höhenschnittpunkt im ebenen oder sphärischen Dreieck, ferner der Satz, dass die Höhen eines Tetraeders Erzeugende derselben Schaar eines Hyperboloides bilden, sowie ganze Reihen verwandter Sätze gehören.

In dieser Form drückt die Gleichung nicht eine Beziehung zwischen *Zahlgrössen*, sondern *extensiven* Grössen aus. Um dieselbe in eine Zahlengleichung zu verwandeln, braucht man sie nur mit $(l-1)$ beliebigen Grössen erster Stufe, etwa $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}$ zu multipliciren. Das giebt

$$(2) \quad [a_1 \ldots a_l | a_{l+1} \ldots a_{2l}] = \sum_r [a_1 \ldots a_{l-1} a_r | a_{l+1} \ldots a_{r-1} a_l a_{r+1} \ldots a_{2l}],$$

$$(r = l+1, \ldots, 2l).$$

Nun kann aber jedes Glied der vorhergehenden Gleichung in Determinantenform geschrieben werden. Denn setzen wir allgemein das innere Product der Grössen a_m und a_n, welches eine Zahlgrösse ist, gleich a_{mn}:

$$(3) \quad a_m | a_n = a_{mn},$$

so ist nach einem Grassmann'schen Satze (S. a. a. O. Nr. 175, S. 130)

$$[a_{g_1} a_{g_2} \ldots a_{g_l} | a_{h_1} a_{h_2} \ldots a_{h_l}] = \sum \pm a_{g_1 h_1} a_{g_2 h_2} \ldots a_{g_l h_l}$$

oder unter Anwendung der Kronecker'schen Determinantenbezeichnung

$$= | a_{gh} |$$

$$(g = g_1, \ldots, g_l; \quad h = h_1, \ldots, h_l).$$

Daher ist Gleichung (2) in der That identisch mit der von Kronecker mitgetheilten Relation

$$| a_{gh} | = \sum_r | a_{ik} |$$

$$(g = 1, 2, \ldots, l; \quad h = l+1, \ldots, 2l; \quad i = 1, 2, \ldots, l-1, r;$$
$$k = l+1, \ldots r-1, l, r+1, \ldots, 2l; \quad r = l+1, l+2, \ldots, 2l).$$

Auch bilden die Grössen a_{mn} ein *symmetrisches* Grössensystem; denn weil in einem inneren Producte zweier Grössen erster Stufe die Factoren vertauscht werden dürfen, so hat man

$$a_{nm} = a_n | a_m = a_m | a_n = a_{mn}.$$

Hätten wir den angeführten Grassmann'schen Satz in seiner vollen Allgemeinheit in die Sprache der Determinantentheorie übersetzt, so hätten sich allgemeinere Beziehungen ergeben, welche aufzustellen ich dem Leser um so lieber überlassen will, als ich denselben nur einen bedingten Werth beimessen kann. Denn handelt es sich z. B. um Anwendungen auf die Geometrie, so ist es weit vortheilhafter, den Grassmann'schen Satz in seiner ursprünglichen Form zu benützen, anstatt ihn zuvor in Determinantengewand zu kleiden.

Darmstadt, den 28. Februar 1885.

Ueber Viereck, Vierseit und projective Verwandtschaft in der Ebene.

Von

M. Pasch in Giessen.

§ 1.

Die allgemeinste geometrische Eigenschaft eines Paares von „conjugirten" Reciprocitäten in der Ebene findet sich in dem Satze niedergelegt, welchen Herr Rosanes in seiner Abhandlung: „Zur Theorie der reciproken Verwandtschaft" (Crelle's Journal Bd. 90) auf S. 316 mitgetheilt hat. Wenn danach

$$f(xy) = \sum a_{ik} x_i y_k, \quad \varphi(uv) = \sum \alpha_{ik} u_i v_k \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

conjugirte Formen der Punktcoordinaten xy, beziehungsweise der Liniencoordinaten uv sind, d. h. wenn die Gleichung

$$\sum a_{ik} \alpha_{ik} = 0$$

besteht, so existiren unendlich viele Paare „polarer Vierseite" $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, $\alpha\beta\gamma\delta$ der Reciprocität $f(xy) = 0$ von der Beschaffenheit, dass jedes Paar zugeordneter Seiten $\alpha'\alpha$, $\beta'\beta$, $\gamma'\gamma$, $\delta'\delta$ ein Nullpaar der Form $\varphi(uv)$ bildet. Verbindet man nun den a. a. O. gegebenen Beweis dieses Satzes mit den Ausführungen über polare Vierseite ebendaselbst S. 315, so kann man schliessen, dass unter der gedachten Voraussetzung eine achtfach unendliche Menge von solchen Paaren polarer Vierseite der Reciprocität $f(xy) = 0$ existirt, dass also das eine Vierseit ganz willkürlich angenommen werden darf. Es seien daher $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ vier beliebige Geraden der Ebene (von denen keine drei durch einen Punkt gehen) und $abcd$, $a'b'c'd'$ die ihnen in der Correlation $f(xy) = 0$, resp. $\varphi(uv) = 0$ zugeordneten Punkte; dann lassen sich, falls $f(xy)$ und $\varphi(uv)$ conjugirte Formen sind, die Geraden $\alpha\beta\gamma\delta$ derart (im Allgemeinen auf eine einzige Weise) bestimmen, dass die Punkte $a'b'c'd'$ resp. auf den Geraden $\alpha\beta\gamma\delta$, zugleich aber auch die Punkte $\alpha\beta$ $\alpha\gamma$ $\alpha\delta$ $\gamma\delta$ $\delta\beta$ $\beta\gamma$ resp. auf den Geraden cd db bc ab ac ad liegen.

In dieser Figur ist das Vierseit $\alpha\beta\gamma\delta$ dem Viereck $a'b'c'd'$ umschrieben. Wesentlich anders liegt das Vierseit $\alpha\beta\gamma\delta$ gegen das Viereck $abcd$. Wären die Ecken $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, ... des vollständigen Vierseits $\alpha\beta\gamma\delta$ resp. auf den Seiten ab, ac, ... des vollständigen Vierecks $abcd$ gelegen, so könnten wir sagen, dass das (vollständige) Vierseit $\alpha\beta\gamma\delta$ dem (vollständigen) Viereck $abcd$ *eingeschrieben*, das letztere dem ersteren *umschrieben* sei. In unserem Falle jedoch geht durch die Ecken des Vierseits jedesmal nicht die entsprechende Seite des Vierecks, sondern diejenige, welche der entsprechenden gegenüberliegt; ich will deshalb das Vierseit $\alpha\beta\gamma\delta$ dem Viereck $abcd$ *„verkehrt eingeschrieben“*, das Viereck dem Vierseit *„verkehrt umschrieben“* nennen.

Im Folgenden soll diese Lage für eine directe Betrachtung der projectiven Verwandtschaften, bei denen sie auftritt, zum Ausgangspunkt gemacht werden. Solche Verwandtschaften habe ich in meinem Aufsatz „Zur Theorie der Collineation und der Reciprocität“ (diese Annalen Bd. XXIII, S. 419—436) behandelt. Die verschiedenen dort vorkommenden Fälle lassen sich, wie man aus Nr. 11 und 15 ersieht, auf einen einzigen zurückführen, nämlich auf die in Nr. 7 definirte „eingeschriebene Dreieckslage“ einer Collineation. Insbesondere braucht man in dem oben besprochenen Falle, welcher nach Nr. 14 als die „eingeschriebene Dreieckslage“ der Reciprocität $\varphi(uv)=0$ gegen die Reciprocität $f(xy)=0$ zu bezeichnen wäre, nur die Collineation aufzufassen, welche das Viereck $abcd$ in das Viereck $a'b'c'd'$ überführt, bei der also je zwei Punkte einander entsprechen, welche in den Correlationen $f(xy)=0$ und $\varphi(uv)=0$ zu einer und derselben Geraden gehören. Diese Collineation wird sich in eingeschriebener Dreieckslage befinden, und umgekehrt wird jede in eingeschriebener Dreieckslage befindliche Collineation sich aus zwei conjugirten Reciprocitäten zusammensetzen, von denen die eine beliebig angenommen werden darf und die andere alsdann eindeutig bestimmt ist. Da wir jetzt in der obigen Figur von den Geraden $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ ganz absehen und die Punkte $abcd$ als vier beliebige Punkte der Ebene (von denen keine drei in gerader Linie liegen) auffassen dürfen, so gelangen wir zu dem Satze:

Wenn bei einer in eingeschriebener Dreieckslage befindlichen Collineation dem Viereck $abcd$ das Viereck $a'b'c'd'$ entspricht, so existirt ein (im Allgemeinen einziges) Vierseit $\alpha\beta\gamma\delta$, welches dem Viereck $a'b'c'd'$ umschrieben und zugleich dem Viereck $abcd$ verkehrt eingeschrieben ist.

Diese Fassung ist deshalb von Interesse, weil sie in einfacher Weise die gegenseitige Abhängigkeit kennzeichnet, in welcher irgend zwei homologe Vierecke, also die gebräuchlichsten Bestimmungsstücke der Collineation, stehen müssen, während die eingeschriebene Lage

des Dreiecks $a'b'c'$ gegen das Dreieck abc nicht jedem Paare von homologen Dreiecken, sondern nur einer vierfach unendlichen Menge zukommt.

§ 2.

Wenn das Viereck $a\,b\,c\,d$ dem Vierseit $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ „verkehrt umschrieben" ist, so liegen die Dreiecke bcd, acd, adb, abc der Reihe nach perspectiv gegen die Dreiseite $\beta\gamma\delta$, $\alpha\gamma\delta$, $\alpha\delta\beta$, $\alpha\beta\gamma$; die Perspectivitätscentra sind a, b, c, d und die Perspectivitätsaxen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Umgekehrt entsteht jene Lage von $a\,b\,c\,d$ gegen $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ allemal, wenn zu einem Dreieck $b\,c\,d$ ein Dreiseit $\beta\,\gamma\,\delta$ perspectiv angenommen und die Figur durch das Centrum a und die Axe α der Perspectivität ergänzt wird. Soll daher irgend einem Viereck ein Vierseit verkehrt eingeschrieben werden, so bleibt das letztere dreifach unbestimmt, d. h. es hat nur fünf Bedingungen zu erfüllen.*)

Völlig bestimmt ist das Vierseit $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ (im Allgemeinen), wenn es dem gegebenen Viereck $a\,b\,c\,d$ verkehrt eingeschrieben sein und die Seiten β, γ, δ durch drei gegebene Punkte resp. b', c', d' gehen sollen; denn dies kommt auf die bekannte Aufgabe hinaus**): Ein Dreieck $B\,C\,D$ zu construiren, dessen Seiten $\beta\,\gamma\,\delta$ durch die Punkte $b'\,c'\,d'$ gehen, und dessen Ecken auf drei Strahlen ab, ac, ad eines Büschels liegen. Die constructive Lösung beruht darauf, dass die Gerade $c'd'$ die sechs Strahlenpaare: ab und β, ac und γ, ad und δ — die Gegenseitenpaare des vollständigen Vierecks $a\,BCD$ — in drei Punktepaaren $b_1\beta'$, c_1c', d_1d' einer Involution treffen, dass mithin ausser b' ein fester Punkt β' der $c'd'$ in die Seite β fallen muss. Dadurch wird das gesuchte Dreieck eindeutig bestimmt, vorausgesetzt dass $b'\,c'\,d'$ nicht in gerader Linie liegen, in welchem Falle es entweder nur eine uneigentliche Lösung oder unendlich viele Lösungen giebt. Schliesslich erhält man α als die Perspectivitätsaxe der Dreiecke bcd und BCD.

Um β' zu construiren, schneide man die Strahlen ac, ad etwa mit resp. bd', bc' in den Punkten C', D'; dann treffen sich $c'd'$ und $C'D'$ in β'. Diesen Weg wollen wir zur analytischen Lösung der vorstehenden Aufgabe benutzen, unter der Voraussetzung, dass $b'c'd'$ nicht in gerader Linie liegen. Sind in einem trimetrischen Systeme $u_1 \mid u_2 \mid u_3$ die Coordinaten einer veränderlichen Geraden u, $a_1 \mid a_2 \mid a_3$ die Coordinaten des gegebenen Punktes a u. s. w., so werden die Punkte C', D' durch die Gleichungen

$$u_b\,(acd') + u_{d'}\,(abc) = 0, \qquad u_b\,(adc') + u_{c'}\,(abd) = 0$$

*) Vergl. Rosanes a. a. O. S. 314, Satz IV.

**) S. Steiner Werke Bd. I, S. 293 (Systematische Entwickelung S. 79).

dargestellt, wo

$$u_b = u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3, \quad (abc) = \sum \pm a_1 b_2 c_3 \quad \text{u. s. w.}$$

Aus ihnen folgt durch Elimination von u_b die Gleichung von β':

$$(adb)(acd')u_{c'} + (abc)(adc')u_{d'} = 0,$$

weiter die Gleichung der Geraden β d. i. $b'\beta'$ in laufenden Punktcoordinaten $x_1 \mid x_2 \mid x_3$, indem man für u die Gerade $b'x$ einsetzt. Da γ und δ analog entstehen, so kommen für β, γ, δ die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(adb)(acd')(b'c'x) - (abc)(adc')(d'b'x) &= 0,\\
(abc)(adb')(c'd'x) - (acd)(abd')(b'c'x) &= 0,\\
(acd)(abc')(d'b'x) - (adb)(acb')(c'd'x) &= 0,
\end{aligned}$$

deren linke Seiten mit β_x, γ_x, δ_x bezeichnet werden dürfen.*)

Es fehlt nun noch die Gleichung der Geraden α, auf welcher die cd mit β, die db mit γ, die bc mit δ zusammentreffen soll. Ihre Herstellung vereinfacht sich, wenn man die Identität

$$u_x(b'c'd') = u_{b'}(c'd'x) + u_{c'}(d'b'x) + u_{d'}(b'c'x)$$

und daraus die weitere

$$(b'c'd')(cdx) = (cdb')(c'd'x) + (cdc')(d'b'x) + (cdd')(b'c'x)$$

bildet. Werden nämlich die Gleichungen der cd und β:

$$\begin{aligned}
(cdb')(c'd'x) + (cdc')(d'b'x) + (cdd')(b'c'x) &= 0,\\
(adb)(acd')(b'c'x) - (abc)(adc')(d'b'x) &= 0
\end{aligned}$$

mit $(adb)(abc)$ und (bcd) componirt, und wird dabei beachtet, dass

$$\begin{aligned}
(adb)(cdc') - (bcd)(adc') &= (acd)(dbc'),\\
(abc)(cdd') + (bcd)(acd') &= (acd)(bcd')
\end{aligned}$$

---

*) Mittels der Identitäten

$$\begin{aligned}
u_{b'}(abc) &= u_a(bcb') - u_b(acb') + u_c(abb'),\\
u_x(b'c'd') &= u_{b'}(c'd'x) + u_{c'}(d'b'x) + u_{d'}(b'c'x)
\end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned}
\gamma_x - \delta_x = {} & \big((abc)(adb') + (adb)(acb')\big)(c'd'x) - (acd)(abc')(d'b'x)\\
& - (acd)(abd')(b'c'x)\\
= {} & -(acd)\big((abb')(c'd'x) + (abc')(d'b'x) + (abd')(b'c'x)\big),
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\gamma_x - \delta_x &= -(acd)(b'c'd')(abx),\\
\delta_x - \beta_x &= -(adb)(b'c'd')(acx),\\
\beta_x - \gamma_x &= -(abc)(b'c'd')(adx),
\end{aligned}$$

wodurch bestätigt wird, dass $\gamma\delta$, $\delta\beta$, $\beta\gamma$ sich resp. auf ab, ac, ad schneiden.

wegen der Identität

$$u_{a'}(bcd) = u_b(acd) + u_c(adb) + u_d(abc),$$

so nimmt das Resultat eine in Bezug auf die Paare bb', cc', dd' symmetrische Gestalt an:

$$(adb)(abc)(cdb')(c'd'x) + (abc)(acd)(dbc')(d'b'x) + (acd)(adb)(bcd')(b'c'x) = 0.$$

Diese Gleichung erfüllt nicht bloss der Punkt (cd, β), sondern auch (db, γ) und (bc, δ); sie ist demnach die Gleichung der α.

Auch die Gleichungen der Punkte B, C, D sind leicht anzugeben. Sie lauten:

$$(acd)(abc')(abd')u_{b'} + (adb)(abd')(acb')u_{c'} + (abc)(adb')(abc')u_{d'} = 0,$$

$$(acd)(abc')(acd')u_{b'} + (adb)(acd')(acb')u_{c'} + (abc)(acb')(adc')u_{d'} = 0,$$

$$(acd)(adc')(abd')u_{b'} + (adb)(acd')(adb')u_{c'} + (abc)(adb')(adc')u_{d'} = 0.$$

Denn um z. B. B d. i. (δ, ab) darzustellen, hat man in die Gleichung $(\delta uv) = 0$ d. i.

$$(acd)(abc')(u_{d'}v_{b'} - u_{b'}v_{d'}) - (adb)(acb')(u_{c'}v_{d'} - u_{d'}v_{c'}) = 0$$

an Stelle von v die Gerade ab zu setzen; dadurch erhält man zunächst:

$$(acd)(abc')(abd')u_{b'} + (adb)(acb')(abd')u_{c'} - (abc')u_{d'}((acd)(abb') + (adb)(acb')) = 0$$

und dann die obige Gleichung mit Rücksicht auf die Identität:

$$u_{b'}(adb) = u_a(dbb') + u_b(adb') - u_d(abb').$$

§ 3.

Ehe die Anwendung der vorstehenden Rechnung auf die Collineation erfolgt, mögen einige Bemerkungen über die in § 1 erwähnten gegenseitigen Lagen von Viereck und Vierseit hier Platz finden.

1. Ist das Viereck $abcd$ dem Vierseit $\alpha\beta\gamma\delta$ verkehrt umschrieben, so wird die durch die vier Paare $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ bestimmte Reciprocität ein Polarsystem, in welchem $abcd$ ein Polviereck, $\alpha\beta\gamma\delta$ das entsprechende Polvierseit darstellen.

Denn in dieser Reciprocität bilden ab und $\alpha\beta$ ein Paar, die Punkte (α, ab) und $\alpha\beta$ d. i. (α, cd) sind conjugirt, die drei Paare von conjugirten Punkten, welche die Seiten des Vierecks $abcd$ aus α heraus-

schneiden, liegen involutorisch. Demnach trägt jede Seite des Vierseits $\alpha\beta\gamma\delta$ eine Involution von doppelt conjugirten Punkten, jeder Ecke ist in beiderlei Sinn dieselbe Gerade zugeordnet, jeder Seite in beiderlei Sinn derselbe Punkt. — Der Satz ist nichts anderes, als die Umkehrung des Plücker'schen Satzes von den conjugirten Dreiecken am Kegelschnitt.

2. Die sechs Gleichungen, welche ausdrücken, dass das Viereck $abcd$ dem Vierseit $\alpha\beta\gamma\delta$ umschrieben werden soll, sind von einander unabhängig.

Eine Ecke a kann man in der That beliebig wählen und hat dann ein Dreieck bcd aufzusuchen, dessen Seiten durch die Punkte $\gamma\delta$, $\delta\beta$, $\beta\gamma$ laufen, während seine Ecken in die Strahlen $|a, \alpha\beta|$, $|a, \alpha\gamma|$, $|a, \alpha\delta|$ fallen.

3. Zwei Vierecke $abcd$ und $a'b'c'd'$ auf einer Ebene können perspectiv genannt werden, wenn die Strahlen aa', bb', cc', dd' sich in einem Punkte O treffen (ohne dass die Fünfecke $abcdO$ und $a'b'c'd'O$ collinear zu sein brauchen). Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Perspectivitätsaxen der Dreieckspaare bcd und $b'c'd'$, acd und $a'c'd'$, adb und $a'd'b'$, abc und $a'b'c'$, so haben α und β den Punkt $(cd, c'd')$ gemein, d. h. der Punkt $\alpha\beta$ liegt auf den Geraden cd und $c'd'$ u. s. w.*) Daher der Satz:

Liegen zwei Vierecke auf einer Ebene perspectiv, so lässt sich im Allgemeinen ein und nur ein Vierseit angeben, welches beiden Vierecken verkehrt eingeschrieben ist;

und umgekehrt:

Die Vierecke, welche einem und demselben Vierseit verkehrt umschrieben werden können, liegen paarweise perspectiv.

Zwei Vierseite $\alpha\beta\gamma\delta$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ einer Ebene können *„perspectiv"*, d. h. so liegen, dass die Strahlen $|\alpha\beta, \alpha'\beta'|$, $|\gamma\delta, \gamma'\delta'|$, ..., oder *„verkehrt perspectiv"*, d. h. so, dass die Strahlen $|\alpha\beta, \gamma'\delta'|$, $|\gamma\delta, \alpha'\beta'|$, ... in einem Punkte sich treffen. Es laufen dann durch diesen Punkt drei Strahlenpaare in Involution, und man erkennt, dass beidemal *nur fünf Bedingungen* zu erfüllen sind.

§ 4.

Da ein Vierseit, welches einem gegebenen Viereck verkehrt eingeschrieben sein soll, nur fünf Bedingungen zu erfüllen hat, so haben zwei Vierecke $abcd$, $a'b'c'd'$ nur *eine* Bedingung zu erfüllen, damit ein Vierseit dem ersteren verkehrt eingeschrieben und zugleich dem letzteren umschrieben werden könne. Diese Bedingung besteht darin,

*) Vergl. des Verf. „Vorlesungen über neuere Geometrie" S. 81. Dort ist Z. 13 v. u. h statt h_1 zu lesen.

dass a' die Gleichung der in § 2 mit α bezeichneten Geraden befriedigen muss, und lautet demnach:

$$(adb)\,(abc)\,(cdb')\,(a'c'd') + (abc)\,(acd)\,(dbc')\,(a'd'b') + (acd)\,(adb)\,(bcd')\,(a'b'c') = 0.$$

Die vier Paare aa', bb', cc', dd' bestimmen eine Collineation, welche durch die bilineare Gleichung $f(xu) = 0$ dargestellt werde, wo

$$f(xu) = \sum a_{ik}\, x_i a_k \qquad (i,k=1,2,3)$$

mit der Determinante $\Delta = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33}$. Wird zur Abkürzung

$$a_{i1} u_1 + a_{i2} u_2 + a_{i3} u_3 = f_i(u), \qquad a_{1k} x_1 + a_{2k} x_2 + a_{3k} x_3 = f(x)_k$$

gesetzt, so ist dem Punkte x der Punkt $f(x)_1 \mid f(x)_2 \mid f(x)_3$ zugeordnet, während die umgekehrte Collineation die Gerade u in die Gerade $f_1(u) \mid f_2(u) \mid f_3(u)$ verwandelt. Man kann daher annehmen:

$$a'_k = f(a)_k, \quad b'_k = f(b)_k, \quad c'_k = f(c)_k, \quad d'_k = f(d)_k,$$
$$(a'c'd') = \Delta(acd), \quad (a'd'b') = \Delta(adb), \quad (a'b'c') = \Delta(abc).$$

Wenn nun die Vierecke $abcd$, $a'b'c'd'$ die oben beschriebene Lage haben, so reducirt sich die dazu erforderliche Bedingung jetzt auf:

$$(cdb') + (dbc') + (bcd') = 0$$

und weiter auf:

$$i = 0, \quad \text{wo} \quad i = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

denn wenn man in der Identität

$$b_x(cdu) + c_x(dbu) + d_x(bcu) = u_x(bcd)$$

die Producte $x_i u_k$ durch a_{ik} ersetzt, so kommt:

$$(cdb') + (dbc') + (bcd') = i(bcd).$$

Zu derselben Bedingung wird man geführt, wenn man von zwei homologen Vierseiten $ABCD$, $A'B'C'D'$ ausgeht und verlangt, dass ein Viereck dem ersteren eingeschrieben und zugleich dem letzteren verkehrt umschrieben werden könne.

Die Invariante i ist aber diejenige, deren Verschwinden die eingeschriebene Dreieckslage der Collineation $f(xu) = 0$ oder die umschriebene Dreieckslage der inversen Collineation bedeutet (diese Annalen Bd. XXIII, S. 426). Wenn in der That ein (eigentliches) Dreieck bcd existirt, dem das homologe $b'c'd'$ eingeschrieben ist, und man nimmt irgend zwei homologe Punkte aa' hinzu, so bildet jeder durch a' gezogene Strahl mit den Seiten des Dreiecks bcd ein dem Viereck $abcd$ verkehrt eingeschriebenes und dem Viereck $a'b'c'd'$ umschriebenes Vierseit.

Es giebt hiernach nicht bei jeder Collineation homologe Vierecke

abcd und *a'b'c'd'*, von denen das erste einem Vierseit verkehrt umschrieben und das zweite demselben Vierseit eingeschrieben ist, oder homologe Vierseite *ABCD* und *A'B'C'D'*, von denen das erste einem Viereck umschrieben und das zweite demselben Viereck verkehrt eingeschrieben ist. Wenn aber ein derartiges Paar von homologen Vierecken oder Vierseiten vorkommt, so befindet sich die Collineation in eingeschriebener Dreieckslage; und wenn die Collineation sich in eingeschriebener Dreieckslage befindet, so zeigt jedes Paar homologer Vierecke oder Vierseite das obige Verhalten.

Die Verbindung der eingeschriebenen mit der umschriebenen Dreieckslage giebt die trilineare Lage oder Dreieckslage der Collineation (vergl. a. a. O. S. 427). Bei dieser hat also jedes Paar homologer Vierecke *abcd*, *a'b'c'd'* die Eigenschaft, dass ein Vierseit dem ersten Viereck verkehrt eingeschrieben, dem zweiten umschrieben und ein anderes Vierseit dem ersten Viereck umschrieben, dem zweiten verkehrt eingeschrieben werden kann.

Die Anwendung auf Paare von Collineationen, sowie auf conjugirte Reciprocitäten, also insbesondere auf conjugirte Kegelschnitte ergiebt sich aus § 1.

Giessen, December 1884.

Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. II.

Von

Georg Pick in Prag.

Die nachfolgende Abhandlung enthält einen Beweis für den Satz, dass die Gleichungen der complexen Multiplication irreducibel sind, selbst nach Adjunction der Quadratwurzel aus der Determinante, zu welcher die betreffenden singulären Moduln gehören. Es wird damit eine wesentliche Ergänzung zu jenen Entwickelungen gegeben, welche in einer früheren Abhandlung gleichen Titels*) durchgeführt worden sind, und deren Resultat die Auffindung einer „oberen Grenze" für die Gruppe jener Gleichungen war. Durch den hier zu gebenden Irreducibilitätsbeweis ist nämlich implicite gezeigt, dass die Gruppe der Gleichung der complexen Multiplication

$$F_\Delta(x) = 0$$

mit jener oberen Grenze, der „Gruppe der Composition" für die Determinante $-\Delta$, geradezu identisch ist.

Was das zum Beweise angewendete Princip betrifft, so ist auf jenen Irreducibilitätsbeweis für die Kreistheilungsgleichungen hinzuweisen, welcher von Herrn Dedekind gegeben worden ist.**) Die Verschiedenheiten, welche im Einzelnen die hier zu gebenden Entwickelungen im Vergleiche mit den von Herrn Dedekind für die Kreistheilungsgleichungen verwendeten aufweisen, sind zum Theil die Folge der complicirteren Natur der Gleichungen für die singulären Moduln, zum Theil aber von dem Umstande herrührend, dass die Irreducibilität dieser Gleichungen in einem erweiterten Gebiete aufgezeigt wird.

---

*) Diese Annalen Bd. XXV, p. 433. Es sei auf diese Abhandlung insbesondere wegen der im folgenden verwendeten Bezeichnungen verwiesen.

**) Crelle's Journal, Bd. 54. — Hier möge es auch gestattet sein auf eine in den Berichten der sächs. Ges. d. Wissensch. (Sitzung vom 13. Januar 1885) veröffentlichte vorläufige Mittheilung des im Texte massgebenden Gedankengangs hinzuweisen.

1.

Ausser wohlbekannten Sätzen aus der Theorie der ganzzahligen Functionen einer oder mehrerer unbestimmten Grössen kommt im Folgenden ein hier vorauszuschickender Hilfssatz in Betracht:

Es sei $f(x)$ ein ganzes, ganzzahliges Polynom in x mit dem höchsten Coefficienten Eins, und

$$f(x) \equiv f_1(x) \pmod{p};$$

ferner

$$\varphi(x, y) \equiv \varphi_1(x, y) \pmod{p}$$

eine ganze rationale Function von x und y mit ganzzahligen Coefficienten, in welcher die höchste vorkommende Potenz von y den Coefficienten 1 trägt. Bildet man dann durch Elimination von x aus $f(x) = 0$ und $\varphi(x, y) = 0$ das Polynom $F(y)$, und verfährt in gleicher Weise, um $F_1(x)$ zu erhalten, mit $f_1(x)$ und $\varphi_1(x, y)$, so ist auch

$$F(y) \equiv F_1(y) \pmod{p}.$$

Unter p ist dabei eine beliebige Primzahl verstanden. Der Beweis geht unmittelbar aus der Betrachtung der symmetrischen Functionen der Wurzeln aller vorkommenden Polynome hervor.

Dieser Satz, wie alle elementaren Sätze der Theorie der höheren Congruenzen, behält seine Gültigkeit, wenn für die Coefficienten der in Betracht kommenden Polynome ganze Zahlen des Zahlkörpers $(1, \sqrt{-\Delta})$*) zugelassen, und als Modul sämmtlicher Congruenzen einer der beiden in p enthaltenen wirklichen oder idealen Primfactoren gesetzt wird; wobei Voraussetzung ist, dass

$$\left(\frac{-d}{p}\right) = +1,$$

wenn d der nach Abtrennung aller quadratischen Factoren aus Δ übrigbleibende Quotient ist. Im Folgenden wird übrigens nur der Fall in Betracht kommen, wo p in Δ nicht aufgeht, also schon

$$\left(\frac{-\Delta}{p}\right) = +1$$

vorausgesetzt werden muss. Man kann dann den Modul $\mathfrak{p}$ ersetzt denken durch ein System von zwei Moduln, von denen der eine p selbst, der andere dagegen in folgender Weise zu erhalten ist. Es sei p^λ die niedrigste Potenz > 1 von p, welche durch die Hauptform der Determinante $-\Delta$ darstellbar ist:

*) Hier und in den folgenden zahlentheoretischen Bemerkungen ist die von Herrn Dedekind eingeführte Sprechweise verwendet. Vgl. Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie, Suppl. XI. — In Bezug auf die der Theorie der höheren Congruenzen entnommenen Sätze vgl. den von Herrn Dedekind gegebenen Abriss dieser Theorie, Crelle's Journal, Bd. 54.

$$p^\lambda = \frac{\Delta u^2 + t^2}{4};$$

dann ist

$$\frac{t + u\sqrt{-\Delta}}{2}$$

jener zweite Modul.

Innerhalb des Gebietes der ganzen Zahlen des Körpers $(1, \sqrt{-\Delta})$ bilden nun die Zahlen

$$0, 1, \ldots, p-1$$

ein vollständiges Restsystem in Bezug auf den Modul $\mathfrak{p}$; man kann diese Specialisirung eines bekannten Satzes hier leicht direct ableiten, indem man zeigt, dass erstens die Norm jedes Aggregats von der Form

$$\mu \cdot p + \nu \cdot \frac{t + u\sqrt{-\Delta}}{2},$$

wo μ und ν ganze Zahlen jenes Körpers sind, jedesmal durch p theilbar ist, und dass zweitens μ und ν stets derartig bestimmt werden können, dass die Differenz

$$\zeta - \left(\mu p + \nu \frac{t + u\sqrt{-\Delta}}{2}\right)$$

rational wird für irgendwelche vorgegebene ganze Zahl ζ jenes Körpers.

Es folgt aus diesem Satze, dass in der Theorie der ganzen Functionen mit ganzzahligen, dem Zahlkörper $(1, \sqrt{-\Delta})$ angehörigen Coefficienten nach dem Modul $\mathfrak{p}$ dieselben Functionen als Primfunctionen belassen werden können, welche in der Theorie der gewöhnlichen höheren Congruenzen nach dem Modul p als solche auftreten, und dass alle Relationen der letzteren Theorie sich durch Abänderung des Moduls p in $\mathfrak{p}$ sofort in solche der ersteren verwandeln.

2.

Die sämmtlichen zur Determinante $-\Delta$ gehörigen singulären Moduln

$$x_1, x_2, \ldots, x_{h_\Delta}$$

seien der Transformation von der Ordnung p unterworfen. Hiedurch werden $(p+1)h_\Delta$ neue Grössen y erhalten, welche einer ganzzahligen Gleichung

$$F(y) = 0$$

genügen, die man erhält, indem man aus

$$F_\Delta(x) = 0$$

und der Modulargleichung

$$\Phi_p(x, y) = 0$$

x eliminirt. Da nun

$$\Phi_p(x, y) \equiv (y - x^p)(y^p - x) \quad (\text{mod. } p)^*),$$

so erhält man auf Grund des zu Eingang des ersten Paragraphen angegebenen Hilfssatzes

$$F(y) \equiv F_\Delta(\sqrt[p]{y}) \cdot F_\Delta(y^p) \quad (\text{mod } p),$$

wo Kürze halber $F_\Delta(\sqrt[p]{y})$ für dasjenige Polynom geschrieben ist, dessen Wurzeln die p^{ten} Potenzen der Wurzeln von

$$F_\Delta(x) = 0$$

sind. Aber es ist auf Grund bekannter Sätze:

$$F_\Delta(\sqrt[p]{y}) \equiv F_\Delta(y) \quad (\text{mod. } p),$$

$$F_\Delta(y^p) \equiv F_\Delta(y)^p \quad (\text{mod. } p),$$

und somit

$$F(y) \equiv F_\Delta(y)^{p+1} \quad (\text{mod. } p).$$

Die Wurzeln von $F(y) = 0$ lassen sich nun leicht charakterisiren mit Hilfe der von Herrn Lipschitz (Crelle's Journal, Bd. 53) gemachten Angaben.

Sei erstens $\Delta > 4$ nicht durch p^2 theilbar, und kürzehalber $\left(\frac{-\Delta}{p}\right)$ durch ε bezeichnet. Dann sind folgendes die sämmtlichen Wurzeln von $F(x) = 0$:

1) Die zur Determinante $-p^2\Delta$ gehörigen Moduln je einmal,
2) die zur Determinante $-\Delta$ selbst gehörigen singulären Moduln je $(1+\varepsilon)$ mal.

Sonach wird in diesem Falle

$$F(x) = F_{p^2\Delta}(x) \cdot F_\Delta(x)^{1+\varepsilon} \equiv F_\Delta(x)^{p+1} \quad (\text{mod. } p),$$

oder

$$F_{p^2\Delta}(x) \equiv F_\Delta(x)^{p-\varepsilon} \quad (\text{mod. } p).$$

Sei zweitens Δ durch p^2 theilbar, $\frac{\Delta}{p^2} > 4$, und $\left(\frac{-\Delta : p^2}{p}\right) = \varepsilon$ zur Abkürzung gesetzt. Dann sind die sämmtlichen Wurzeln von $F(y) = 0$ in folgendem Schema enthalten:

1) Die zur Determinante $-p^2\Delta$ gehörigen Moduln je einmal,
2) Die zur Determinante $-p^2\Delta$ gehörigen Moduln je $p - \varepsilon$ mal.

Also wird

$$F(x) = F_{p^2\Delta}(x) \cdot F_{\Delta:p^2}(x),$$

und somit

$$F_{p^2\Delta}(x) \cdot F_{\Delta:p^2}(x) \equiv F_\Delta(x)^{p+1} \quad (\text{mod. } p).$$

Bedeutet nun $\Delta > 4$ wieder eine durch p^2 nicht theilbare Zahl, so hat man nach den gefundenen Relationen folgende Reihe von Congruenzen

*) Vgl. Wiener Berichte, 1885: Zur Theorie der Modulargleichungen etc.

$$F_{p^2\Delta}(x) \equiv F_\Delta(x)^{p-\varepsilon},$$
$$F_{p^4\Delta}(x) \cdot F_\Delta^{p-\varepsilon}(x) \equiv F_{p^2\Delta}(x)^{p+1},$$
$$F_{p^6\Delta}(x) \cdot F_{p^2\Delta}^{p}(x) \equiv F_{p^4\Delta}^{p+1},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

woraus sich leicht allgemein

$$F_{p^{2k}\Delta}(x) \equiv F_\Delta(x)^{p^{k-1}(p-\varepsilon)} \pmod{p}$$

findet.

Eine kleine Modification erleidet diese Relation für $\Delta = 4$ und $\Delta = 3$. Es wird nämlich

$$F_{4p^{2k}}(x) \equiv F_3(x)^{\frac{p^{k-1}(p-\varepsilon)}{2}} \equiv (x-1728)^{\frac{p^{k-1}(p-\varepsilon)}{2}} \pmod{p},$$

$$F_{3p^{2k}}(x) \equiv F_6(x)^{\frac{p^{k-1}(p-\varepsilon)}{3}} \equiv x^{\frac{p^{k-1}(p-\varepsilon)}{3}} \pmod{p},$$

wo ε das einemal für $\left(\frac{-4}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)$, das anderemal für $\left(\frac{-3}{p}\right)$ steht. Man erhält diese Relationen in derselben Weise wie die früher aufgestellte.

3.

In der Modulargleichung

$$\Phi_{p^\lambda}(x, y) = 0,$$

werde

$$y = x$$

gesetzt; für den Fall eines geraden λ werden ausserdem beide Seiten der Gleichung durch p dividirt, und überhaupt nöthigen Falls mit -1 multiplicirt, so dass in der resultirenden Gleichung

$$\Psi(x) = 0$$

die höchste Potenz von x den Coefficienten $+1$ trägt.

Die Wurzeln dieser Gleichung können auf Grund der von Herrn Gierster angegebenen Classenzahlrelation erster Stufe*) oder nach den in der oben angeführten Abhandlung**) verwendeten Principien leicht aufgezählt werden. Bezeichnet $-\Delta_\mu$ $(\mu > 0)$ irgend eine durch p theilbare Determinante, durch deren Hauptclasse p^μ aber keine niedrigere von 1 verschiedene Potenz von p darstellbar ist, so sind die zur Determinante

$$-p^{2\varkappa}\Delta_\mu$$

gehörigen singulären Moduln Wurzeln der Gleichung

*) Diese Annalen, Bd. XXI, S. 1.
**) Siehe S. 219 Anm.

$$\Psi(x) = 0,$$

wofern

$$2\varkappa + \mu = \lambda,$$

und zwar zweifache Wurzeln im Allgemeinen, hingegen für $\varkappa > 0$ und $\Delta_\mu = 4$ vierfache, für $\varkappa > 0$ und $\Delta_\mu = 3$ sechsfache Wurzeln. Hiezu kommen noch im Falle eines ungeraden λ je einfach zählend die Moduln der Determinante $-4p^\lambda$, und der Determinante $-p^\lambda$, diese letzteren natürlich nur, falls p von der Form $4k+3$ ist. Für den Fall eines geraden λ hingegen sind noch aufzuführen: die Moduln der Determinante $-4p^\lambda$ je einfach und diejenigen der Determinante $-3p^\lambda$ je doppelt zählend.

Es durchlaufe nun $-\Delta_\mu$ die sämmtlichen verschiedenen Determinanten, in Bezug auf welche p zum Exponenten μ gehört, und es werde in ein durch das Symbol

$$\Pi_{p^{2\varkappa}\Delta_\mu}$$

zu bezeichnendes Product jedes Polynom

$$F_{p^{2\varkappa}\Delta_\mu}(x)$$

einfach als Factor aufgenommen, in welchem $\Delta_\mu > 4$; hingegen für eventuell vorkommende $\Delta_\mu = 4$ resp. $= 3$, wenn zugleich $\varkappa$ von 0 verschieden ist, das Quadrat bezw. die dritte Potenz des betreffenden Polynoms. Ferner sei für ein ungerades λ der Ausdruck

$$F_{4p^\lambda}(x) \cdot F_{p^\lambda}(x)$$

mit Π_{p^λ} schlechthin bezeichnet, wobei für $p \equiv 1 \pmod{4}$

$$F_{p^\lambda}(x) = 1$$

zu setzen ist.

Dann ist nach dem oben Gesagten

$$\Psi_{p^{2l-1}}(x) = \Pi^2_{\Delta_{2l-1}} \cdot \Pi^2_{p^2\Delta_{2l-3}} \cdots \Pi^2_{p^{2l-2}\Delta_1} \cdot \Pi_{p^{2l-1}},$$

$$\Psi_{2l}(x) \quad = \Pi^2_{\Delta_{2l}} \cdot \Pi^2_{p^2\Delta_{2l-2}} \cdots \Pi^2_{p^{2l-2}\Delta_2} \cdot F_{4p^{2l}}(x) \cdot F^2_{3p^{2l}}(x).$$

Mit Hilfe der im vorigen Paragraphen enthaltenen Relationen lassen sich nun leicht weitere Reductionen der Polynome Ψ vornehmen. Man bemerke hierzu erstens, dass jedenfalls $\left(\frac{-\Delta_\mu}{p}\right) = +1$, insolange μ von 0 verschieden ist; zweitens, dass jenes abweichende Verhalten der Polynome von der Form

$$F_{4p^{2\varkappa}}(x), \quad F_{3p^{2\varkappa}}(x)$$

durch die Multiplicität gerade compensirt ist, in welcher eben diese Polynome eventuell in $\Pi_{p^{2\varkappa}\Delta_\mu}$ enthalten sind. Bezeichnet man noch $\left(\frac{-4}{p}\right)$ und $\left(\frac{-3}{p}\right)$ durch ε und ε' bezw., so kann man die in Betracht

kommenden Relationen des vorigen Paragraphen für unsere Zwecke in folgende Form setzen:

$$\begin{aligned} \Pi_{p^{2l}\Delta_\mu} &\equiv \Pi_{\Delta_\mu}^{\varphi(p^l)} \pmod{p}, \\ \Pi_{p^{2l-1}} &\equiv \Pi_p^{p^{l-1}} \pmod{p}, \\ F_{4p^{2l}}(x) &\equiv (x-1728)^{\frac{p^{l-1}(p-\varepsilon)}{2}} \pmod{p}. \\ F_{3p^{2l}}(x) &\equiv x^{\frac{2p^{l-1}(p-\varepsilon')}{3}} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Sonach wird

$$\begin{aligned} \Psi_{2l-1} &\equiv \Pi^2_{\Delta_{2l-1}} \cdot \Pi^{2\varphi(p)}_{\Delta_{2l-3}} \cdots \Pi^{2\varphi(p^{l-1})}_{\Delta_1} \cdot \Pi_p^{p^{l-1}} \pmod{p}, \\ \Psi_{2l} &\equiv \Pi^2_{\Delta_{2l}} \cdot \Pi^{2\varphi(p)}_{\Delta_{2l-2}} \cdots \Pi^{2\varphi(p^{l-1})}_{\Delta_2} \cdot (x-1728)^{\frac{p^{l-1}(p-\varepsilon)}{2}} \\ &\qquad \cdot x^{\frac{2p^{l-1}(p-\varepsilon')}{3}} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(1) \qquad \begin{cases} \Pi^2_{\Delta_{2\varrho-1}} \cdot \Pi_p = \Omega_{2\varrho-1}, \\ \Pi^2_{\Delta_{2\varrho}} \cdot (x-1728)^{\frac{p-\varepsilon}{2}} \cdot x^{\frac{2(p-\varepsilon')}{3}} = \Omega_{2\varrho}, \end{cases}$$

so wird

$$(2) \qquad \begin{cases} \Psi_{2l-1} \equiv \Omega_{2l-1} \cdot \Omega^{\varphi(p)}_{2l-3} \cdots \Omega_1^{\varphi(p^{l-1})} \pmod{p}, \\ \Psi_{2l} \equiv \Omega_{2l} \cdot \Omega^{\varphi(p)}_{2l-2} \cdots \Omega_2^{\varphi(p^{l-1})} \pmod{p} \end{cases}$$

infolge der bekannten Relation

$$1 + \varphi(p) + \cdots + \varphi(p^{l-1}) = p^{l-1}.$$

4.

Für die Polynome $\Psi_\lambda \pmod{p}$ können nun auf anderem Wege Formeln gefunden werden. Für ungerade $\lambda = 2l - 1$ kann man dazu ohne weiteres die Congruenz*)

$$\Phi_{p^{2l-1}}(x, y) \equiv \prod_{\varrho=l}^{1} \left\{(y - x^{p^{2\varrho-1}})(y^{p^{2\varrho-1}} - x)\right\}^{\varphi(p^{l-\varrho})} \pmod{p}$$

benützen, aus welcher für $y = x$ folgt

$$\Psi_{2l-1}(x) \equiv (x^{p^{2l-1}} - x)^2 (x^{p^{2l-3}} - x)^{2\varphi(p)} \cdots (x^p - x)^{2\varphi(p^l)} \pmod{p}.$$

*) Wiener Berichte a. a. O.

Hingegen für gerade $\lambda = 2l$ hat man

$$\Phi_{p^{2l}}(x, y) \equiv \prod_{\varrho=l}^{1} \left\{(y - x^{p^{2\varrho}})\,(y^{p^{2\varrho}} - x)\right\}^{\varphi(p^{l-\varrho})} \cdot (y-x)^{\varphi(p^l)} \quad (\text{mod. } p),$$

und hierin ist $(y-x)^{\varphi(p^l)}$ hervorgegangen aus dem Product

$$\Pi = \prod_{\alpha} \left\{y - \frac{1}{\alpha Q}\,(1 + \gamma_1 \alpha Q + \gamma_2 \alpha^2 Q^2 + \cdots)\right\}^{*)},$$

ausgedehnt über alle primitiven Wurzeln α der Gleichung

$$\alpha^{p^l} = 1.$$

Man hat nun durch p zu dividiren und $y = x$ zu setzen. Da

$$p = \prod_{\alpha} (1 - \alpha),$$

so erhält man

$$\frac{1}{p}\,\Pi = \prod_{\alpha} \left\{\frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{Q} + \frac{1-\alpha}{1-\alpha}\,\gamma_2 Q + \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha}\,\gamma_3 Q^2 + \cdots\right\},$$

oder unter Anwendung eines bekannten Satzes aus der Theorie der höheren Congruenzen

$$\begin{aligned}\Pi &\equiv \left\{-\frac{1}{Q} + \gamma_2\, Q + 2\gamma_3\, Q^2 + \cdots\right\}^{p^{l-1}(p-1)} \\ &\equiv \left(Q\,\frac{dx}{dQ}\right)^{p^{l-1}(p-1)} \quad (\text{mod. } p).\end{aligned}$$

Also wird

$$\begin{aligned}\Psi_{2l}(x) \equiv{}& (x^{p^{2l}} - x)^2\,(x^{p^{2l-2}} - x)^{2\varphi(p)} \cdots (x^{p^2} - x)^{2\varphi(p^{l-1})} \\ &\cdot \left(Q\,\frac{dx}{dQ}\right)^{p^{l-1}(p-1)} \quad (\text{mod. } p).\end{aligned}$$

Für $l = 1$ ergiebt sich mit Rücksicht auf Gleichung (2) des vorigen Paragraphen

$$\Omega_2 \equiv (x^{p^2} - x)^2 \cdot \left(Q\,\frac{dx}{dQ}\right)^{p-1} \quad (\text{mod. } p),$$

woraus, weil augenscheinlich Ω_2 ein vollständiges Quadrat (mod. p) ist, hervorgeht, dass schon

$$\Psi \equiv \left(Q\,\frac{dx}{dQ}\right)^{\frac{p-1}{2}} \quad (\text{mod. } p)$$

---

*) Wenn

$$\frac{1}{Q}\,(1 + \gamma_1 Q + \gamma_2 Q^2 + \cdots)$$

die Entwickelung von x nach Potenzen von $Q = e^{2\pi i \omega}$ vorstellt.

eine rationale Function (mod. p) vorstellt. Wird nun zur Abkürzung gesetzt

$$(3)\qquad \begin{cases}(x^{p^{2\varrho-1}}-x)^2 = \Theta_{2\varrho-1}, \\ (x^{p^{2\varrho}}-x)^2\cdot\psi^2 = \Theta_{2\varrho},\end{cases}$$

so ergiebt sich aus dem Vorangegangenen

$$(4)\qquad \begin{cases}\Psi_{2l-1} \equiv \Theta_{2l-1}\cdot\Theta_{2l-3}^{\varphi(p)}\cdots\Theta_1^{\varphi(p^{l-1})} \pmod{p}, \\ \Psi_{2l} \equiv \Theta_{2l}\cdot\Theta_{2l-2}^{\varphi(p)}\cdots\Theta_2^{\varphi(p^{l-1})} \pmod{p}.\end{cases}$$

Werden diese Formeln mit den entsprechenden (2) des vorigen Paragraphen zusammengehalten, indem man der Reihe nach $l=1,2,3,\ldots$ setzt, so ergiebt sich allgemein:

$$\Omega_\lambda \equiv \Theta_\lambda \pmod{p}.$$

Für ungerade $\lambda = 2l-1$ ist also

$$\Pi^2_{\Delta_{2l-1}}\cdot\Pi_p \equiv (x^{p^{2l-1}}-x)^2 \pmod{p},$$

woraus zu ersehen steht, dass Π_p dem Quadrate einer ganzen Function congruent gesetzt werden muss:

$$\Pi_p \equiv \psi_1^{\,2} \pmod{p}.$$

Also erhält man

$$(1)\qquad \Pi_{\Delta_{2l-1}}\cdot\psi_1 \equiv (x^{p^{2l-1}}-x) \pmod{p}.$$

Hingegen für gerade $\lambda = 2l$ erübrigt noch die nähere Bestimmung der rationalen Function

$$\psi \equiv \left(Q\frac{dx}{dQ}\right)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Hiezu kann man auf mehreren verschiedenen Wegen gelangen; wir wählen hier denjenigen, durch welchen man am schnellsten zu dem gewünschten Ziele kommt.

Es ist

$$Q\frac{dx}{dQ} = \frac{dx}{d\lg Q} = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{dx}{d\omega},$$

also*)

$$Q\frac{dx}{dQ} = \left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^2\sqrt[6]{\Delta}\cdot(x-1728)^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{2}{3}}$$

also

$$\psi^{12} = \left\{\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{12}\Delta\right\}^{p-1}\cdot(x-1728)^{3(p-1)}\cdot x^{4(p-1)}.$$

Nun sei zur Abkürzung

$$\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{12}\Delta = Q\prod_{m=1}^{\infty}(1-Q^m)^{24}$$

mit H bezeichnet; dann ist

*) Vgl. Hurwitz, Modulfunctionen, Math. Ann. Bd. XVIII.

$$\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{12}\Delta(\omega_1, p\omega_2) \equiv Q^p\,\Pi(1-Q^{pm})^{24} \equiv \mathsf{H}^p \pmod{p},$$

und folglich

$$\frac{1}{\mathsf{H}^{p-1}} \equiv \frac{\Delta(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, p\omega_2)}.$$

Bildet man nun die Summe*)

$$S = \frac{\Delta(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, p\omega_2)} + \sum_{h=0}^{p-1} \frac{\Delta(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(p\omega_1, \omega_2 + h)},$$

so ist dieselbe nur von dem Verhältniss $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \omega$ abhängig, ferner invariant bei sämmtlichen linearen Transformationen von ω, und schliesslich für alle im Inneren der positiven Halbebene gelegenen Werthe von ω endlich. Sie ist somit eine ganze rationale Function von x und ausserdem mit ganzzahligen Coefficienten versehen, weil die Entwickelung von S nach Potenzen von Q lauter ganze Zahlen zu Coefficienten besitzt. Da aber in der Entwickelung von

$$\sum_{h=0}^{p-1} \frac{\Delta(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(p\omega_1, \omega_2+h)} = p^{12} \sum_{h=0}^{p-1} \frac{\mathsf{H}(Q)}{\mathsf{H}\left(e^{\frac{2h\pi i}{p}} Q^{\frac{1}{p}}\right)}$$

nach Q-Potenzen alle Coefficienten ganze durch p theilbare Zahlen sind, so ist jetzt einfach

$$\frac{1}{\mathsf{H}^{p-1}} \equiv S \pmod{p}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\psi^{12} \equiv \frac{(x-1728)^{3(p-1)}\, x^{4(p-1)}}{S} \pmod{p}.$$

Wenn man Zähler und Nenner des rechts stehenden Bruchs mit der ganzen Function

$$(x-1728)^{3(1-\varepsilon)}\, x^{4(1-\varepsilon')} \qquad \left[\varepsilon = \left(\frac{-1}{p}\right),\quad \varepsilon' = \left(\frac{-3}{p}\right)\right]$$

multiplicirt, so lässt sich aus dem neuen Zähler

$$(x-1728)^{3(p-\varepsilon)}\, x^{4(p-\varepsilon')}$$

die zwölfte Wurzel rational ausziehen; dieselbe Eigenschaft muss somit auch der Nenner gewonnen haben. Also können wir setzen

$$\psi \equiv \frac{(x-1728)^{\frac{p-\varepsilon}{4}} \cdot x^{\frac{p-\varepsilon'}{3}}}{\psi_0} \pmod{p},$$

wo ψ_0 wieder eine ganze und ganzzahlige Function von x bedeutet. Die Congruenz

---

*) Diese Summe ist der Quotient des vorletzten Coefficienten durch den letzten in der Multiplicatorgleichung vom Transformationsgrade p für die Grösse $\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}$.

$$\Omega_{2l} \equiv \Theta_{2l} \pmod{p}$$

aber verwandelt sich hiernach in

(II) $$\Pi_{\Delta_{2l}} \cdot \psi_0 \equiv x^{p^{2l}} - x \pmod{p}.$$

Aus den Relationen (I) und (II) folgt jetzt sofort der Satz:

Die Polynome Π_{Δ_λ} enthalten nach dem Modul p genommen keine quadratischen Factoren.

Da ferner $F_{\Delta_\lambda}(x)$ ein Theiler von Π_{Δ_λ} ist, so kann man sagen:

Ist p eine in 6Δ nicht enthaltene Primzahl und $\left(\frac{-\Delta}{p}\right) = +1$, so enthält $F_\Delta(x)$ (mod. p) keine quadratischen Factoren.

5.

Es sei nun angenommen, dass sich das Polynom

$$F_\Delta(x)$$

rational in Factoren zerlegen lasse, deren Coefficienten dem Zahlkörper $(1, \sqrt{-\Delta})$ angehören. Findet eine solche Zerlegung statt, so kann man die einzelnen Factoren jedenfalls dergestalt geschrieben denken, dass die höchste jeweils vorkommende Potenz von x den Coefficienten $+1$ trägt, worauf alle übrigen Coefficienten von selbst *ganze* Zahlen des Körpers $(1, \sqrt{-\Delta})$ sein müssen, weil ja sämmtliche Wurzeln von $F_\Delta(x) = 0$ *ganze* algebraische Zahlen sind.

Man bezeichne nun irgend einen in $F_\Delta(x)$ enthaltenen unter Adjunction von $\sqrt{-\Delta}$ irreducibeln Factor mit $f(x)$, irgend eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = 0$$

mit x_1; p sei eine in 6Δ nicht enthaltene Primzahl, von welcher $-\Delta$ quadratischer Rest ist, $\mathfrak{p}$ einer der beiden in p enthaltenen conjugirten Primfactoren, P eine der beiden Formen von der Determinante $-\Delta$, durch welche p dargestellt wird, dann ist auf Grund der erhaltenen Resultate leicht zu zeigen, dass auch $P.x_1$, nämlich der Modul, welcher aus x_1 durch Composition mit P hervorgeht, die Gleichung $f(x) = 0$ befriedigt.

Man denke sich die Gleichung gebildet, deren Wurzeln aus denen von $f(x) = 0$ durch Composition mit P erhalten werden. Da allgemein

$$P.x = P(x),$$

worin $P(x)$ eine rationale Function mit Coefficienten aus dem Zahlkörper $(1, \sqrt{-\Delta})$ bedeutet, so wird jene Gleichung, die durch

$$f_1(x) = 0$$

bezeichnet sein möge, Coefficienten von derselben Eigenschaft besitzen wie $f(x)$. Bildet man ferner jene Gleichung

$$\mathfrak{f}(x) = 0,$$

deren Wurzeln durch Anwendung *sämmtlicher* Transformationen p^{ter} Ordnung aus denen von $f(x) = 0$ hervorgehen, so ist klar, dass $f(x)$ durch $f_1(x)$ ohne Rest theilbar sein muss. Aber wie schon früher in einem ähnlichen Falle hat man hier die Congruenz

$$\mathfrak{f}(x) \equiv f(x)^{p+1} \pmod{\mathfrak{p}}$$

weil

$$\Phi_p(x, y) \equiv (y - x^p)(y^p - x) \pmod{\mathfrak{p}}$$

ist. Also ist $f_1(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ ein Theiler von $f(x)^{p+1} \pmod{\mathfrak{p}}$ und besitzt somit keinen nicht schon in $f(x)$ enthaltenen Primfactor.

Aus der Voraussetzung, dass $f(x)$ irreducibel ist, folgt dieselbe Eigenschaft für $f_1(x)$; denn die Wurzeln von $f(x) = 0$ sind aus denen von $f_1(x) = 0$ mittelst der rationalen Function

$$P^{-1}(x)$$

zu erhalten. Sollte also $P(x_1)$ nicht Wurzel von $f(x) = 0$ sein, so müsste $F_\Delta(x)$ durch das Product der in solchem Falle durchaus verschiedenen Polynome $f(x)$ und $f_1(x)$ theilbar sein. Hieraus aber würde nach dem Früheren die Existenz von quadratischen Theilern in $F_\Delta(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ folgen, was dem Endresultate der vorigen Paragraphen widerspricht. Also ist nothwendig

$$f_1(x) = f(x)$$

identisch erfüllt.

Sei nun x_1 eine Wurzel von

$$f(x) = 0,$$

x_2 aber ein beliebiger zur Determinante $-\Delta$ gehöriger singulärer Modul. Wenn dann A jene Formenclasse ist, mit welcher x_1 componirt werden muss um in x_2 überzugehen:

$$x_2 = A \cdot x_1,$$

so wähle man eine durch A darstellbare Zahl a aus, welche gegen 6Δ theilerfremd ist. Es sei dann in Primfactoren zerlegt

$$a = p^{\pi} \cdot p_1^{\pi_1} \cdots,$$

also

$$A = P^{\pi} \cdot P_1^{\pi_1} \cdots, \quad \text{und} \quad x_2 = P^{\pi} \cdot P_1^{\pi_1} \cdots x_1.$$

Nun folgt durch wiederholte Anwendung des früher gefundenen Satzes offenbar aus der Annahme, dass x_1 eine Wurzel von $f(x) = 0$ ist, das Gleiche für x_2, so dass also $f(x) = 0$ durch sämmtliche singulären Moduln der Determinante $-\Delta$ befriedigt wird.

Somit ist bewiesen:

Die Gleichung $F_\Delta(x) = 0$ ist auch nach Adjunction von $\sqrt{-\Delta}$ irreducibel.

Prag, im März 1885.

Ueber Poncelet-Zeuthen'sche Polygone, welche einem Gebilde zweiten Grades eingeschrieben sind.

Von

A. Voss in München.

In einem Aufsatze über Gebilden zweiten Grades umschriebene Polygone hatte ich gezeigt*), dass die Untersuchung derselben wesentlich mit der Betrachtung zweier schiefer Determinanten verknüpft ist, die zu den Berührungspunkten der Seiten gehören. Aber auch die verwandte Aufgabe, „Ein geschlossenes Polygon zu construiren, dessen Ecken auf einem Gebilde zweiten Grades liegen, und dessen Seiten beziehlich durch gegebene feste Punkte gehen", ist von jenen Formen abhängig. Damit ist die Theorie der Poncelet-Zeuthen'schen Polygone**) und entsprechender Gebilde in höheren projectiven Räumen auf eine gemeinsame Quelle zurückgeführt, nämlich auf die Theorie der schiefen Determinanten, wie ich im folgenden zu zeigen beabsichtige.***)

Eine analytische Untersuchung der hier in Betracht kommenden Fragen scheint man bisher für schwierig oder weitläufig gehalten zu haben.†) So äussert sich z. B. Poncelet a. a. O. 222: „Je n'essayerai pas, de démontrer . . . au point de vue analytique: ce serait d'une longueur, si ce n'est d'une difficulté extrême"; Aehnlich Herr Zeuthen

---

*) Math. Annalen XXV, S. 39.

**) Wenn ich hier diese alte, in ihrer einfachsten Gestalt schon von Pappus gestellte Aufgabe, mit Poncelet's Namen in Verbindung bringe, so geschieht es deshalb, weil letzterer sich besonders ausführlich mit derselben beschäftigt hat. Vgl. Poncelet, Applications d'analyse et de géometrie, Paris 1862, S. 145—248; Traité des prop. proj. T. I, S. 338—342; Zeuthen, Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre, Math. Annalen XVIII, S. 33—40.

***) Die Existenz eines solchen Zusammenhanges konnte übrigens vermöge einer erweiterten Theorie der orthogonalen Substitutionen, wie ich sie Math. Annalen XIII, S. 320 begonnen habe, vorausgesehen werden.

†) Analytische Betrachtungen der einfachsten Fälle findet man in den Nouveaux mém. de l'acad. de Berlin 1776, Act. Acad. Petrop. T. IV, Part I, II, 1780.

a. a. O. S. 58 „Sans essayer de surmonter les difficultés, qui s'opposeraient à une étude algébrique complète des cycles". Dem gegenüber möchte ich darauf hinweisen, wie mit relativ einfachen Mitteln gerade die vollkommen adäquate analytische Darstellung der interessanten Betrachtungen, die Herr Zeuthen entwickelt hat, ausgeführt werden kann. Wenn ich dabei in § III etwas ausführlicher gewesen bin, so geschah es deshalb, weil die algebraischen Fragen, die Herr Zeuthen berührt, doch eine etwas andere Gestalt annehmen, als die geometrische Analyse vermuthen liess.*)

1.

Die Fundamentalgleichung der Aufgabe.

Das Gebilde zweiten Grades sei in p homogenen Coordinaten x_i, $i = 1, 2 \ldots p$,

$$(1) \qquad (a_x)^2 = \sum_1^p {}_{i,k}\, a_{ik} x_i x_k = 0;$$

die n gegebenen Punkte mögen zu Coordinaten

$$x_1^k,\ x_2^k,\ \ldots,\ x_p^k;\quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

haben. Alsdann sind die Coordinaten ξ der Ecken $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des gesuchten Polygones:

$$(2) \qquad \begin{aligned} A_1 &: \xi_i^1 = y_i, \\ A_2 &: \xi_i^2 = y_i + \lambda_1 x_i^1, \\ A_3 &: \xi_i^3 = y_i + \lambda_1 x_i^1 + \lambda_2 x_i^2, \\ &\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ A_n &: \xi_i^n = y_i + \lambda_1 x_i^1 + \cdots + \lambda_n x_i^n, \end{aligned}$$

mit der Bedingung des Schliessens

$$(3) \qquad \xi_i^n = \varrho y_i, \quad i = 1, 2 \ldots p,$$

wobei die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \varrho$, zu bestimmende Parameter sein werden. Die Bedingungen, welche ausdrücken, dass die Coordinaten (2) der Gleichung (1) genügen, sind, wenn

$$\begin{gathered} (a_x^l\, a_x^k) = (k\, l) = (l\, k), \\ (a_x^k\, a_y) = (yk) = (ky), \\ k, l = 1, 2 \ldots n, \end{gathered}$$

gesetzt wird,

$$(4) \qquad (a_y)^2 = (y\, y) = 0,$$

*) Vgl. namentlich den Inhalt der von demselben a. a. O. S. 58—59 formulirten Resultate.

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&2(y1)+\lambda_1(11)=0,\\
&2(y2)+2\lambda_1(12)+\lambda_2(22)=0,\\
&2(y3)+2\lambda_1(13)+\lambda_2(23)+\lambda_3(33)=0,\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
&2(yn)+2\lambda_1(1n)+2\lambda_2(2n)+\cdots+\lambda_n(nn)=0.
\end{aligned}
$$

Die Determinante Ω der $p+n$ homogenen linearen Unbekannten λ und y in den Gleichungen (3) und (5) muss verschwinden. Durch ganz analoge Umformungen, wie in der angeführten Arbeit,*) erhält man, falls Δ die Determinante**) der Coefficienten a_{ik} der quadratischen Form von (1), δ_{ik} die durch Δ dividirten ersten Unterdeterminanten derselben bedeuten, und

$$z=\frac{1-\varrho}{1+\varrho},$$

gesetzt wird,

$$
(6)\qquad \Omega=\Delta\left(\frac{1+\varrho}{2}\right)^p
\begin{vmatrix}
0 & (12) & \cdots & (1n) & x_1^1 & \cdots & x_p^1\\
-(12) & 0 & \cdots & (2n) & x_1^2 & \cdots & x_p^2\\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\
-(1n) & -(2n) & \cdots & 0 & x_1^n & \cdots & x_p^n\\
-x_1^1 & -x_1^2 & \cdots & -x_1^n & \delta_{11}z & \cdots & \delta_{1p}z\\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\
-x_p^1 & -x_p^2 & \cdots & -x_p^n & \delta_{p1}z & \cdots & \delta_{pp}z
\end{vmatrix}=0.
$$

Die Gleichung p^{ten} Grades für z, welche aus (6) entspringt, hat zu Coefficienten von z^p und z^0 *die beiden schiefen Invarianten* $J_2=(i_2)^2$, $J_1=(i_1)^2$ *der Punktgruppe.****) Ausserdem ist

$$\Omega(-z)=(-1)^{n+p}\,\Omega(z),$$

d. h. Ω ist entweder eine gerade oder ungerade Function von z. Sind n und p beide gerade, so hat man eine Gleichung vom Grade $\frac{p}{2}$ in z^2; sind beide ungerade, so ist eine Wurzel gleich ∞, und die übrigen bestimmen sich aus einer Gleichung $\frac{p-1}{2}$ Grades in z^2; bei ungeradem p und geradem n hat man eine Wurzel $z=0$; endlich bei ungeradem n und geradem p die beiden Wurzeln $z=0$, $z=\infty$.

---

*) Math. Ann. XXV, S. 51 ff.

**) Im folgenden ist daher $\Delta \neq 0$ vorausgesetzt. Uebrigens lassen sich bei beliebiger Art des Verschwindens von Δ die Betrachtungen fast ungeändert wiederholen.

***) a. a. O. S. 54.

Ausserdem findet man, wenn

$$(7)\qquad \Sigma = \begin{vmatrix} (11)\frac{(1+\varrho)}{2} & (12) & \cdots (1n) \\ (21)\varrho & (22)\frac{(1+\varrho)}{2} & \cdots (2n) \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdot \\ (n1)\varrho & (n2)\varrho & \cdots (nn)\frac{(1+\varrho)}{2} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird, durch ähnliche Umformungen:*)

$$(8)\qquad \Sigma = \left(\frac{1-\varrho}{2}\right)^{n-p} \Omega,$$

durch welche Relation der $n-p$-fache Factor $1-\varrho$ aus Σ abgesondert wird. Das Verschwinden von Σ drückt die Verträglichkeit der linearen Gleichungen für die λ allein aus, welche man aus (3) und (5) leicht erhält. Zugleich sieht man, dass $\varrho = 0, \infty$ keine Wurzel von (6) sein kann, solange nicht einer der gegebenen Punkte auf dem Gebilde zweiten Grades liegt, was im folgenden ausgeschlossen sein soll. Insbesondere hat man für $\varrho = 0$

$$(8\text{a})\qquad 2^p\,\Omega(+1) = (11)\,(22)\ldots(nn).$$

Man erhält ferner aus den Gleichungen (5) in Verbindung mit (3)

$$(9)\qquad (a_y)^2\,(1-\varrho^2) = 0,$$

und, wenn man die zu zwei Wurzeln ϱ_i, ϱ_h gehörigen Werthe der y durch entsprechende Indices andeutet,

$$(10)\qquad (a_{y^i}\,a_{y^h})\,(1-\varrho_i\,\varrho_h) = 0.$$

Aus (9) und (10) folgt:

Jede von ± 1 *verschiedene Wurzel* ϱ *von* (6) *liefert ein dem Gebilde eingeschriebenes Polygon* P_ϱ, da die Gleichung (4) von selbst erfüllt ist. *Diese Wurzeln sind paarweise reciprok, und die correspondirenden Ecken zweier Polygone* P_{ϱ_1}, P_{ϱ_2}, *welche zu nicht reciproken Wurzeln gehören, liegen auf einer „Erzeugenden" von* (1).

Zu den Wurzeln ± 1 gehören im allgemeinen keine Polygone P. Sie bilden Polygone $\Pi(\pm 1)$, welche der folgenden Aufgabe entsprechen:

„Man soll ein geschlossenes Polygon construiren, dessen n Seiten $s_1 \ldots s_n$ beziehlich durch n gegebene Punkte $A_1 \ldots A_n$ gehen, und dessen auf der Seite s_i liegende Ecken conjugirt sind zu dem Punkte A_i und dem Schnittpunkte von s_i mit der Polare von A_i in Bezug auf das Gebilde zweiten Grades." Diese Aufgabe hat im allgemeinen keine Lösung, für welche die Ecken des Polygones nicht auf dem Gebilde liegen, wenn n und p beide gerade sind; in den anderen

*) a. a. O. S. 58.

Fällen sind eine oder zwei durch lineare Gleichungen vermittelte Lösungen vorhanden.

Endlich hat man noch:

Das Product der Abstandsverhältnisse der gegebenen Punkte A zu den Ecken der Polygone P_ϱ, $\Pi(\pm 1)$, *ist gleich*

$$(-1)^n \varrho,$$

durch welchen Satz der Wurzel ϱ, zu der ein jedes Polygon gehört, eine geometrische Bedeutung gegeben wird.

Ich berühre endlich den Zusammenhang mit der Theorie der orthogonalen Substitutionen. Die Gleichungen

$$\xi_i = y_i + \sum_1^n{}^r \lambda_r x_i^r, \quad i = 1, 2 \ldots p,$$

begründen nebst den (5) überhaupt eine lineare Transformation des Punktes y in ξ, für welche

$$(a_y)^2 = (a_\xi)^2$$

wird, das heisst eine *orthogonale Transformation* im weiteren Sinne (Hermite'sche Transf.). Die Haupteigenschaften dieser geometrisch im vorigen charakterisirten Umformung lassen sich daher unmittelbar aus der Theorie der orthogonalen Substitutionen entnehmen.*) Eliminirt man die Grössen λ, so erhält man die p Substitutionsgleichungen in der Form

$$\begin{vmatrix} \frac{y_i - \xi_i}{2} & x_i^1 & x_i^2 & \cdots & x_i^n \\ (y1) & (11) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (yn) & 2(1n) & 2(2n) & \cdots & (nn) \end{vmatrix} = 0, \; i = 1, 2 \ldots p,$$

oder

$$y_i - \xi_i = 2 \sum_1^p{}^s y_s b_{is}.$$

Aus diesen erhält man für $\xi_i = -\varrho y_i$ die Coordinaten der sich selbst entsprechenden Punkte. Ist daher die Wurzel $\varrho = 1$ vorhanden, so verschwindet die Determinante der b_{is}; ihre Unterdeterminanten liefern die Coordinaten des zugehörigen Punktes. Für den Fall, dass $\varrho = -1$ Wurzel ist, hat man die Unterdeterminanten von

$$| b_{is} - 1 |$$

zu benutzen; einfacher ist es jedoch in diesem Falle die schiefe Determinante Σ zu betrachten, deren Unterdeterminanten den λ proportional sind.

*) a. a. O. S. 341 ff.

II.

Die Polygone von Poncelet und Zeuthen.

Für $p = 3$ lösen die allgemeinen Untersuchungen in I die Aufgabe, einem Kegelschnitte ein Polygon einzuschreiben, dessen Seiten der Reihe nach durch gegebene Punkte gehen; man hat die Construction eines Poncelet'schen Polygons. Es genügt daher, hier kurz an die im Wesentlichen bekannten Resultate zu erinnern, die sich aus den allgemeinen Formeln unmittelbar ergeben. Aus der Identität I, 8 erhält man für $p = 3$ bei geradem n die Gleichung I, 6 in der Form:

$$(1) \qquad (1-\varrho)\left[(1-\varrho)^2 J_2 + (H - J_2)(1+\varrho)^2\right] = 0,$$

in welcher $H = (11)(22)\ldots(nn)$ zu setzen ist. Es existiren also zwei Poncelet'sche Polygone P_{ϱ_1}, P_{ϱ_2} und ein linear construirbares Polygon $\Pi(+1)$. Aus den involutorischen Beziehungen I, (9), (10) folgt: *Die Ecken der Polygone P sind die Berührpunkte der von den Ecken des Polygons $\Pi(+1)$ an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten.* Damit ist zugleich die Construction der beiden Polygone P mittelst des linear construirbaren Polygones $\Pi(+1)$ auf ihren einfachsten analytischen Ausdruck zurückgeführt. Die Coordinaten der (ersten) Ecke eines Polygones $\Pi(+1)$ sind im vorigen Paragraphen gegeben.

Die drei Polygone P und $\Pi(+1)$ coincidiren, wenn

$$H = J_2$$

ist, d. h., *wenn einer der n Punkte sich auf einem durch die anderen bestimmten Kegelschnitte befindet, der mit dem gegebenen auf der Geraden $i_2 = 0$ eine doppelte Berührung hat.*

Verschwindet dagegen J_2, so hat man der Wurzel $\varrho = -1$ entsprechend eine lineare Reihe von Polygonen $\Pi(-1)$, unter denen sich zwei Poncelet'sche befinden, die noch immer mittelst Hülfe von $\Pi(+1)$ construirt werden. *Die Ecken der Polygone $\Pi(-1)$ durchlaufen daher die Polaren der Ecken des Polygones $\Pi(+1)$; einer der n Punkte muss sich auf der durch die übrigen bestimmten Geraden $i_2 = 0$ befinden.**)

Da J_2 nicht mit allen zweiten Unterdeterminanten verschwinden kann, weil sonst die Gleichung 3^{ten} Grades (1) vier Wurzeln -1 haben müsste, während sie doch, wie aus der Form von Σ (I, (7)) hervorgeht, nie identisch verschwinden kann, so lange H nicht Null ist, so ist nur noch der Fall möglich, dass die schiefe Determinante gerader Ordnung mit allen ersten (also auch allen zweiten) Unterdeterminanten verschwindet. *Jeder Punkt der Ebene ist dann Ecke*

---

*) Die Construction derselben siehe § III.

eines Polygones $\Pi(+1)$, *und jeder Punkt des Kegelschnittes Ecke eines Poncelet'schen Polygons.*

Bei ungeradem n*) wird die Gleichung I, (6)

$$(2) \qquad 0 = (1+\varrho)\,[(1+\varrho)^2 J_1 - (1-\varrho)^2 (H + J_1\Delta)];$$

in Bezug auf dieselbe gelten ganz analoge Bemerkungen. Endlich hat man noch den Satz:

Das Product der Abstandsverhältnisse auf den Seiten der Polygone Π *ist bei einem Kegelschnitte gleich* $+1$.

Für $p = 4$ erhält man die analogen Untersuchungen über die Polygone, welche Herr Zeuthen a. a. O. betrachtet hat, und die ich daher Zeuthen'sche Polygone nenne. Bei *geradem* n hat man nach dem in meiner früheren Arbeit benutzten Verfahren aus I, (6) die Gleichung

$$(3) \qquad z^4 J_2 + z^2 (H - J_2 - J_1\Delta) + J_1\Delta = 0$$

mit der in die beiden Factoren

$$H - (i_2 + i_1\sqrt{\Delta})^2, \quad H - (i_2 - i_1\sqrt{\Delta})^2,$$

zerfallenden Discriminante

$$(4) \qquad D = (H - J_2 - J_1\Delta)^2 - 4J_1 J_2 \Delta.$$

Im allgemeinen existiren also vier in zwei Paare geordnete Polygone P; correspondirende Ecken von nicht ein Paar bildenden Polygonen liegen nach I, (9), (10) auf einer Erzeugenden. Bei einer Fläche mit reellen Erzeugenden, d. h. positivem Δ, haben die Wurzeln z_1^2, z_2^2 von (3) so lange sie reell sind, gleiches Zeichen. Alle vier Polygone P sind also entweder gleichzeitig reell oder gleichzeitig imaginär. Bei negativem Δ sind dagegen immer zwei, aber auch nur zwei, reelle Polygone vorhanden. Denn das Product der Wurzeln z_1^2 und z_2^2 ist nach (3) negativ, also sind sie nicht complex conjugirt, und die eine von ihnen ist positiv, die andere negativ.

Es giebt nur zwei doppelt zu rechnende Polygone P, wenn D verschwindet. Dazu ist erforderlich, dass einer der n Punkte auf einer der beiden durch die übrigen bestimmten Flächen zweiten Grades

$$H - (i_2 \pm i_1\sqrt{\Delta})^2 = 0$$

liegt, welche die gegebene längs Kegelschnitten berühren. Dieser Fall kann aber, so lange J_1 oder J_2 nicht verschwinden, bei einer nicht

*) Für 3 Punkte findet man, dass die Ecke des Polygones $\Pi(-1)$ der im § III mit [1 2 3] bezeichnete Punkt ist. Man erhält so gerade die von Gergonne Annales VII, p. 325, und Durrande, ebenda, t. XIV, p. 47 hergeleitete, Construction.

geradlinigen Fläche für eine reelle Punktgruppe (welche hier vorausgesetzt wurde) nie eintreten.

Ist dagegen n ungerade, so wird die Gleichung $\Omega = 0$

$$(4) \qquad (1-\varrho)(1+\varrho)[(1-\varrho)^2 A + (1+\varrho)^2 B] = 0,$$

wobei

$$\Delta(A+B) = H.$$

Zur Berechnung von A und B würde die Bestimmung des Coefficienten von ϱ^{n-1} in Σ erforderlich sein. Es sind also im allgemeinen zwei Polygone $\Pi(\pm 1)$ vorhanden; aus ihnen ergeben sich mit Hülfe von I, (9), (10) die Ecken von zwei Zeuthen'schen Polygonen. Specielle Fälle von untergeordneter Bedeutung sind $A = 0$, $B = 0$.

III.

Punktgruppen, für welche unendlich viele Lösungen auftreten.

Ein besonderes Interesse beanspruchen nun diejenigen Fälle, in denen unendlich viele Lösungen auftreten, wie sie schon für den Fall $p = 3$ gelegentlich erwähnt wurden. Sie sind dadurch charakterisirt, dass für eine der Wurzeln von Ω vollständige Unterdeterminantensysteme verschwinden. Geschieht dies für eine von ± 1 verschiedene Wurzel, so geschieht es unter genau denselben Modalitäten auch für die reciproke Wurzel*); die Wurzeln ± 1 nehmen dabei überhaupt eine besondere Stellung ein.

Herr Zeuthen hat sich insbesondere in seiner Theorie der Cyklen mit diesen Fällen beschäftigt**), und es wird die Aufgabe des folgenden sein, die Bedingungen hierfür algebraisch zu formuliren.

Hierzu sind einige Sätze über das Verschwinden von Unterdeterminantensystemen erforderlich, die man leicht aus einer Betrachtung von Herrn Kronecker ableitet.***)

Wenn in einer Determinante alle Unterdeterminanten $p+1^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, während die vom p^{ten} Grade nicht sämmtlich Null sind, so muss es auch Hauptunterdeterminanten p^{ten} Grades geben, welche nicht Null sind. Denn bei einer Determinante mit beliebigen Elementen kann jede Partialdeterminante als solche angesehen werden; für symmetrische und schiefe Determinanten, und diese kommen hier vorzugsweise in Betracht, besteht aber der Satz ebenfalls.†) Die Determinante Δ, in welcher die $p+1^{\text{te}}$ Horizontal- und Verticalreihe herausgehoben ist,

---

*) Math. Ann. XIII, S. 326 ff.

**) Math. Ann. XVIII, S. 50–58.

***) Journal von Borchardt, LXXII S. 153.

†) Vgl. Frobenius Journal von Borchardt LXXXII, S. 241 u. ff.

$$\Delta = \begin{array}{|ccc|c|c|} a_{11} & \dots & a_{1p} & a_{1p+1} & \\ \cdot & \mathrm{I} & \cdot & \cdot & \mathrm{II} \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} & \cdot & \\ \hline a_{p+11} & \dots & \cdot & a_{p+1p+1} & \\ \hline & & & & \\ & \mathrm{IV} & & & \mathrm{III} \\ & & & & \end{array}$$

zerfällt in vier Felder, welche durch I, II, III, IV bezeichnet sein mögen; die Hauptunterdeterminante in I verschwindet nach Voraussetzung nicht. Damit alle Unterdeterminanten $p+1^{\text{ten}}$ Grades Null sind, muss die durch Rändern mit je $n-p-1$ Vertical- und Horizontalreihen mittelst willkürlicher Grössen aus Δ hervorgehende Determinante Δ' verschwinden. Man kann nun alle Elemente in den Feldern II, IV vermöge der Elemente in I zerstören. Dann treten an Stelle der übrigen Elemente in III ebensoviele Unterdeterminanten $p+1^{\text{ten}}$ Grades. Dann verschwindet Δ' offenbar, wenn alle $(n-p-1)^2$ Unterdeterminanten im Felde III, sowie die $2(n-p-1)$ anderen, welche an dasselbe angrenzen, und die Hauptunterdeterminante

$$\sum \pm (a_{11}\, a_{22} \dots a_{p+1\,p+1})$$

verschwinden. Diese Bedingungen sind *hinreichend;* sie sind auch im allgemeinen *von einander unabhängig,* da jede derselben ganz neue Elemente von Δ in sich aufnimmt; ihre Zahl ist

$$(n-p)^2.$$

Für eine symmetrische Determinante reducirt sich diese Anzahl wegen der Symmetrie der Unterdeterminanten auf

$$\frac{1}{2}(n-p)(n-p+1);$$

sie enthalten die Elemente zum Theil quadratisch, zum Theil linear.

Handelt es sich um eine schiefe Determinante, so muss p eine gerade Zahl $2q$ sein, ausserdem aber sind die Hauptunterdeterminanten $2q+1^{\text{ten}}$ Grades Null. Die Zahl der im allgemeinen von einander unabhängigen Bedingungen beträgt mithin:

$$\frac{1}{2}(n-2q)(n-2q-1).$$

Man kann statt dessen auch das Verschwinden aller Unterdeterminanten $2q+2^{\text{ten}}$ Grades verlangen. Eine ähnliche Abzählung liefert als Zahl der Bedingungen

$$1+(n-2q-2)+\frac{1}{2}(n-2q-1)(n-2q-2),$$

was mit dem soeben gegebenen Werthe übereinstimmt.

Diese Bedingungen aber sind, wie aus den Eigenschaften der Pfaff'schen Ausdrücke hervorgeht, sämmtlich linear in den $\frac{n(n-1)}{2}$ Elementen der schiefen Determinante Δ.

Bezeichnet man nämlich die Hauptunterdeterminante des Feldes I durch R^2, so treten an Stelle der Elemente im Felde III die Ausdrücke

$$R a_{rq} - 2\sum_1^p{}_{k,i}\, a_{kq}\, a_{ri}\, \frac{\partial R}{\partial a_{ki}}, \quad r, q = p+1, \ldots, n,$$

welche bekanntlich verschwinden, so oft die beiden Indices r, q einander gleich sind.

Damit also in einer schiefen Determinante gerader Ordnung die $2p^{\text{ten}}$ und $2p+1^{\text{ten}}$ Unterdeterminantensysteme verschwinden, müssen $(2p+1)(p+1)$; und damit in einer solchen Determinante ungerader Ordnung die $2p-1^{\text{ten}}$ und $2p^{\text{ten}}$ Systeme der Unterdeterminanten verschwinden, müssen $p(2p+1)$ in den Elementen lineare von einander unabhängige Relationen stattfinden.

Insbesondere erfordert also bei einer schiefen Determinante gerader Ordnung das Verschwinden der zweiten und dritten Unterdeterminantensysteme 6 lineare Relationen, das der 0^{ten} und ersten aber nur eine Relation. Bei einer schiefen Determinante ungerader Ordnung erfordert dagegen das Verschwinden der ersten und zweiten Unterdeterminanten 3, das der dritten und vierten schon 10 Bedingungen.

Hiernach gehe ich zur Untersuchung der oben erwähnten Fälle über. Sind n und p gerade, so werden zunächst zwei lineare Reihen von Polygonen P auftreten, wenn für eine der von ± 1 verschiedenen Wurzeln ϱ die Determinante Ω mit allen ersten Unterdeterminanten verschwindet. Man kann diese Frage bequemer an der Determinante Σ untersuchen, welche den Factor z^{n-p} enthält; ihre ersten Unterdeterminanten enthalten mindestens noch den Factor z^{n-p-1}. Durch Einführung von

$$z = \frac{1-\varrho}{1+\varrho}$$

erhält man

$$\Sigma = \left(\frac{1+\varrho}{2}\right)^n \begin{vmatrix} (11) & , (12)(1+z), & \ldots, & (1n)(1+z) \\ (12)(1-z), & (22) & , \ldots, & (2n)(1+z) \\ . & , \quad . & , \ldots, & . \quad . \\ (1n)(1-z), & (2n)(1-z), & \ldots, & . \quad (nn) \end{vmatrix}.$$

Damit Σ für einen von $0, \infty$ verschiedenen Werth von z sammt allen ersten Unterdeterminanten verschwinde, müssen im allgemeinen die vier Unterdeterminanten Σ_{nn}, Σ_{nn-1}, Σ_{n-1n}, Σ_{n-1n-1} verschwinden. Nun ist Σ_{nn}, wie man leicht erkennt, eine Function $n-2^{\text{ten}}$ Grades in z, welche nur gerade Potenzen von z enthält; sie wird also nach

Entfernung des Factors z^{n-p-1} noch einmal z enthalten und dann vom Grade $p-2$ sein. Dasselbe gilt von $\Sigma_{n-1\,n-1}$. Dagegen geht $\Sigma_{n\,n-1}$ durch Vertauschung von z mit $-z$ in $\Sigma_{n-1\,n}$ über. Man hat daher

$$\Sigma_{n\,n-1}=(1+z)\,P(z)\,,\quad \Sigma_{n-1\,n}=(1-z)\,P(-z),$$

wo $P(z)$ vom $n-2^{\text{ten}}$ Grade in z ist, also nach Entfernung von z^{n-p-1} noch vom Grade $p-1$ bleibt. Das Verschwinden der beiden Ausdrücke $P(z)$, $P(-z)$ liefert daher zwei neue Gleichungen $p-2^{\text{ten}}$ Grades in z, in denen nur Potenzen gerader Ordnung vorkommen. Man hat also 4 Gleichungen von der Form

$$A_1 z^{p-2}+A_2 z^{p-4}+\cdots=0;$$

die erste enthält die Coordinaten des n^{ten} Punktes gar nicht, die zweite und dritte enthält sie linear, die letzte quadratisch. Aus der ersten ergeben sich $\frac{1}{2}\,(p-2)$ Werthe von z^2; jeder derselben liefert, in die 3 andern eingetragen, zwei Punkte x^n, welche mit den ersten $n-1$ ein System bilden, für das eine doppelte lineare Reihe von Polygonen P existirt.

Man kann also im allgemeinen zu n — 1 gegebenen Punkten (n, p gerade) p — 2 paarweis zusammengehörige Punkte von der Eigenschaft finden, dass sich durch dieselben zwei einfach unendliche Schaaren von Polygonen legen lassen, deren Ecken sich auf Erzeugenden des Gebildes bewegen.

Für $p=4$ erhält man die von Herrn Zeuthen S. 51 gegebene Construction der beiden Punkte, welche mit $2m-1$ gegebenen eine Gruppe der verlangten Art bilden; vermöge der Transformation des Raumes wird nämlich jedem Punkte y ein Punkt ξ entsprechen, der auf der durch y gehenden Geraden liegt, welche die beiden aus sich selbst entsprechenden Punkten gebildeten Erzeugenden der Fläche schneidet.

Die weiteren Betrachtungen beziehen sich auf die besonderen Wurzeln ± 1, da andere Fälle, wenigstens so lange man über $p=4$ nicht hinausgeht, überhaupt nicht auftreten können.

Eine gerade Anzahl von Punkten, für welche eine lineare Reihe von Polygonen Π existirt, bildet nach Herrn Zeuthen*) einen *unvollständigen Cyklus.* Derselbe fordert entweder $J_1=0$ oder $J_2=0$. *Im ersten Falle ist das Product der Abstandsverhältnisse auf den Polygonseiten gleich* $+1$, *der Cyklus heisse dann erster Art, im zweiten Falle ist der Cyklus zweiter Art.***)

---

*) Math. Annalen Bd. XVIII, S. 52.

**) Wie mir Herr Zeuthen neuerdings (April 1885) mittheilte, hatte derselbe inzwischen ebenfalls dieses charakteristische Verhalten der Cyklen bemerkt.

Damit $n = 2m$ Punkte einen unvollständigen Cyklus erster oder zweiter Art bilden, muss einer derselben auf einer durch die übrigen bestimmten Ebene liegen.

Charakteristisch ist für den unvollständigen Cyklus die damit verbundene Transformation des Raumes, welche jedem Punkte y einen Punkt ξ zuordnet, der in der Ebene liegt, welche durch y und die Sehne geht, die die beiden zu den einfachen Wurzeln gehörigen sich selbst entsprechenden Punkte verbindet.

Vier Punkte bilden einen unvollständigen Cyklus erster Art, wenn J_1 verschwindet, d. h., wenn sie in einer Ebene liegen. Der Cyklus ist dagegen zweiter Art, wenn

$$\sqrt{J_2} = (12)(34) - (13)(24) - (14)(23) = 0;$$

die geometrische Construction der Ebene, in welcher der Punkt 4 liegen muss, giebt Herr Zeuthen S. 57.

An Stelle dieser Construction aber lässt sich eine einfachere entwickeln, welche für jede beliebige gerade Zahl von Punkten verallgemeinert werden kann. Da die beiden Determinanten J_1 und J_2 in dem ganzen Kreise dieser Fragen eine wichtige Rolle spielen, so werde ich hier für 3 und 5 gegebene Punkte die Ebene construiren, in welcher ein vierter resp. sechster Punkt liegen muss, der mit ihnen einen unvollständigen Cyklus zweiter Art bildet; auf dieselbe Art ist bei beliebigen $n = 2m$ zu verfahren. Zu dieser Construction führt die Bemerkung, dass der Pfaff'sche Ausdruck $i_2 = 0$ die gesuchte Ebene sofort als Polarebene eines gewissen Punktes erscheinen lässt. Bei drei gegebenen Punkten ist nämlich

$$i_2 = (12)(34) - (13)(24) + (14)(23) = (12\,34),$$

d. h. die Ebene $i_2 = 0$ ist Polarebene des Punktes

$$z_i = (12)x_i^3 - (13)x_i^2 + (23)x_i^1,$$

welcher durch [1 2 3] bezeichnet sein möge. Ist nun P der Schnitt der Geraden 2, 3 mit der Polarebene von 1, Q der Schnitt von 1, 2 mit der Polarebene von 3, so schneiden sich die Geraden P, 1 und Q, 3 in dem gesuchten Punkte [123].

Handelt es sich um 5 gegebene Punkte 1, 2, 3, 4, 5 so hat man*) den Punkt

$$z_i = (2345)x_i^1 - (1345)x_i^2 + (1245)x_i^3 - (1235)x_i^4 + (1234)x_i^5$$

oder [12345] zu construiren. Dazu zerlege man diesen Ausdruck in zwei Gruppen, so dass derselbe auf der Verbindungslinie von

$$R: (2345)x_i^1 - (1345)x_i^2,$$
$$S: (1245)x_i^3 - (1235)x_i^4 + (1234)x_i^5$$

*) Baltzer, Determinanten, 4. Auflage, S. 44.

liegt. Jeder dieser Punkte lässt sich wieder leicht construiren. Man schneide die Polare von [123] mit der Geraden 4, 5; der Durchschnittspunkt ist

$$-x_i^4(1235)+x_i^5(1234).$$

mithin ist R der Schnittpunkt von 1, 2 mit der Polare von [345]. Der Punkt S liegt dagegen auf der Verbindungslinie von 3 mit dem Schnittpunkte der Polare von [123] und der Geraden 4, 5. Ebenso liegt er aber auf der Verbindungslinie von 5 mit dem Punkte, in dem die Polare von [125] der Geraden 4, 3 begegnet. Nunmehr liegt der Punkt [12345] auf der Geraden R, S. Aber man kann eine zweite Gerade S', R' construiren, auf welcher er ebenfalls liegen muss, in dem man den obigen Ausdruck auf eine zweite Art in zwei Theile S', R' zerlegt. Man sieht zugleich, wie diese Construction sowohl ganz unabhängig von der Zahl der Dimensionen ist, als auch mit Benutzung der Pfaff'schen Ausdrücke in derselben Weise zur Construction von [1234567], u. s. w. verwendet werden kann.

Eine einfache Umformung der Bedingung $J_1=0$ zeigt, dass dieselbe, als Bedingung für den letzten Punkt x^n aufgefasst, unmittelbar die Form

$$i_1=x_1{}^nA_1+x_2{}^nA_2+\cdots+x_p{}^nA_p=0$$

annimmt, in welcher die A wieder Pfaff'sche Ausdrücke sind; auf die Construction dieser Ebene kann hier indess nicht mehr eingegangen werden.

Die Determinante J_1 verschwindet immer, wenn die n Punkte in einer Ebene liegen; J_2 dagegen, wenn der n^{te} Punkt der Pol der Ebene ist, in welcher die n übrigen sich befinden.

Herr Zeuthen unterscheidet noch den *singulären unvollständigen Cyklus;**) *er ist durch das gleichzeitige Verschwinden von J_1 und J_2 bedingt*, und für eine Gruppe von $2m-1$ Punkten existirt eine Gerade, auf welcher der $2m^{\text{te}}$ Punkt sich dann befinden muss.

Wenn dagegen J_1 oder J_2 mit ihren zweiten und dritten Unterdeterminanten verschwinden, so bilden die $n=2m$ Punkte einen *vollständigen Cyklus***), der wieder von *erster* oder *zweiter Art* sein kann. *Jeder Raumpunkt wird dann in sich transformirt, bildet also die erste Ecke eines Polygones* Π, *resp. P.*

Allgemein kann man bei geradem n und p von einem vollständigen Cyklus sprechen, wenn eine der Determinanten J_1, J_2 nebst ihren $2^{\text{ten}}, 3^{\text{ten}}, \ldots, p-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten verschwindet. Die Anzahl der hierzu erforderlichen Bedingungen beträgt nach dem früher bemerkten $\frac{p}{2}(p-1)$; $n-p+1$ der Punkte sind dabei willkürlich, der

*) a. a. O. S. 52.

**) a. a. O. S. 51.

$n-p+2^{\text{te}}$ muss einer, der folgende zwei linearen Relationen genügen, u. s. w., so dass endlich der letzte eindeutig durch die übrigen bestimmt ist. Man erhält nun unmittelbar den Satz:

Der einzige vollständige Cyklus zweiter Art, welcher von p (gerade) Punkten in einem Raum von p — 1 Dimensionen gebildet wird, besteht aus den Ecken eines in Bezug auf das Gebilde zweiten Grades construirten vollständigen Polareckes.

Zugleich lassen sich dann die Punkte in beliebiger Ordnung mit einander vertauschen, ohne dass sie aufhören einen solchen Cyklus zu bilden. Dagegen lehrt eine einfache Betrachtung, dass J_1 mit allen $p-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten nur dann verschwindet, also *ein vollständiger Cyklus erster Art nur dann entsteht, wenn diese Punkte sämmtlich in einer Geraden liegen und in dieser eine in Bezug auf jeden derselben lineare Relation erfüllen.* In dem speciellen Falle $p=4$ sagt dieselbe aus, dass die 4 Punkte mit den beiden Punkten, in denen ihre gemeinsame Verbindungsgerade der Fläche begegnet, in Involution liegen müssen.*)

Aus der grossen Zahl ähnlicher Sätze, von denen die beiden angegebenen nur specielle Fälle sind, erwähne ich nur noch den folgenden:

Sollen 2p—2 Punkte im Raume von p — 1 Dimensionen einen vollständigen Cyklus erster Art bilden, so müssen sie in einer Ebene liegen und in dieser eine Gruppe constituiren, die nach Herrn Zeuthen als ebener Cyklus erster Art zu bezeichnen ist.

Sechs Punkte können daher nur dann für $p=4$ einen vollständigen Cyklus erster Art bilden, wenn sie in einer Ebene liegen, und in Bezug auf den in derselben liegenden Kegelschnitt unendlich viele eingeschriebene Polygone vorhanden sind. Damit aber 6 Punkte einen vollständigen Cyklus zweiter Art bilden, müssen die 6 Relationen

$$(12)(34)-(13)(24)+(14)(23)=0,$$

$$\begin{cases}(12)(35)-(13)(25)+(15)(23)=0,\\(12)(45)-(14)(25)+(15)(24)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(12)(36)-(13)(26)+(16)(23)=0,\\(12)(46)-(14)(26)+(16)(24)=0,\\(12)(56)-(15)(26)+(16)(25)=0,\end{cases}$$

bestehen; d. h. der Punkt 4 liegt in der Polarebene von [123]; der Punkt 5 in der Polare von [123] und [124]; endlich ist 6 der Pol der Ebene durch [123], [124], [125].

*) Die analogen Sätze für ungerades p lassen sich leicht aufstellen. Der *vollständige Cyklus von p Punkten* ist hier nothwendig *zweiter Art*, *kann also nur von den Ecken eines vollständigen Polareckes gebildet werden.* Bei beliebigem p existirt daher nur dieses, vgl. Math. Ann. Bd. XIII, S. 345.

Ist dagegen n eine ungerade Zahl, $p = 4$, so verschwinden J_1 und J_2. Verschwindet eine derselben mit allen ersten und zweiten Unterdeterminanten, so existiren ∞^2 Polygone $\Pi(\pm 1)$, unter ihnen ∞^1 Zeuthen'sche Polygone, deren Ecken die Polarkegelschnitte der Ecken des ausserdem vorhandenen Polygons $\Pi(\pm 1)$ beschreiben. In diesem Falle bilden die n Punkte einen Cyklus, der entweder erster oder zweiter Art ist. In beiden Fällen ergiebt sich:

Bilden $2m - 1$ Punkte einen Cyklus, so geht die Verbindungslinie entsprechender Punkte ξ, y durch einen festen Punkt, die Punkte der Fläche werden durch eine Centralprojection vom letzteren aus transformirt. Drei Punkte bilden nur dann einen Cyklus erster Art, wenn sie sich in einer Geraden befinden; der Cyklus ist zweiter Art, wenn sie ein Poldreieck ausmachen. Ein Cyklus erster Art von fünf Punkten erfordert, dass diese in einer Ebene liegen; der Cyklus zweiter Art von fünf Punkten, von denen 1, 2, 3 willkürlich sind, erfordert dagegen das Bestehen der drei ersten der vorhin angegebenen sechs Relationen.

Herr Zeuthen hat auch untersucht,*) von welcher Art die Bedingungen für die verschiedenen Arten der Cyklen in den Coefficienten der Fläche sind. Während die entsprechende Frage für die Coordinaten der Punkte, wie gezeigt, ohne weiteres sich beantworten liess, da man es stets mit einem vollständigen System von Gleichungen für die Coordinaten der 1, 2, 3, ... letzten Punkte der Gruppe zu thun hat, so sind diese Gleichungen nicht mehr der adäquate Ausdruck für die Lösung, falls die Coordinaten der Punkte gegeben und die Coefficienten der Flächengleichung als variabel angesehen werden. Denn es gelten jene Gleichungen nur unter der Voraussetzung dass eine gewisse Hauptunterdeterminante nicht verschwindet, enthalten also auch Lösungen, welche als unbrauchbar zu bezeichnen sind. Es hat zwar keine Schwierigkeit, die Zahl dieser letzteren zu bestimmen, und so zu Sätzen zu gelangen, welche den von Herrn Zeuthen aufgestellten entsprechen. Ich erwähne indess nur die folgenden beiden Fälle.

Liegen bei geradem p $2n - 1$ Punkte in einer Ebene, etwa $x_p = 0$, so wird J_1 mit allen ersten und zweiten Unterdeterminanten verschwinden, wenn nur eine einzige erste Hauptunterdeterminante von J_1 verschwindet. Diese ist aber eine schiefe Determinante vom Grade $2n - 1 + p - 1$; ihre Quadratwurzel enthält die Coefficienten a_{ik} im Grade $n - \frac{p}{2}$. *Linear ist also die Bedingung für einen Cyklus erster Art bei $p = 4$ nur für $n = 3$.*

---

*) a. a. O. S. 58—59.

Liegen andererseits $2n$ Punkte in einer Geraden $x_{p-1}=0$, $x_p=0$, so verschwindet wieder vermöge einer einzigen Bedingung J_1 mit den zweiten und dritten Unterdeterminanten. Diese enthält aber die Coefficienten im Grade $\frac{2n-p+2}{2}$. *Linear ist also die Bedingung, dass* $2n$ *Punkte in einer Geraden einen vollständigen Cyklus erster Art bilden, bei* $p=4$ *nur für* $n=2$.

Es sind also keineswegs jene Bedingungen allgemein, wie Herr Zeuthen folgert,*) reducibel auf ein System in den Coefficienten a_{ik} linearer Bedingungen. Nur in diesem Falle aber würde es zunächst von Interesse sein, dieselben weiter zu untersuchen.

Dresden, Februar 1885.

---

*) Herr Zeuthen hatte die Güte, mir seine kurzen Andeutungen in den Math. Annalen brieflich zu erläutern. Aber auch so vermag ich dem S. 59, Zeile 6—9 v. o. gezogenen Schlusse nicht beizustimmen.

Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre.

Par

H-G. Zeuthen à Copenhague.

(Second article*).

Dans le § 1 du présent travail je m'occupe d'une propriété métrique fort simple des cycles de points auxquels on peut circonscrire une infinité de polygones inscrits à une surface quadrique.

Je l'ai trouvée — et généralisée dans le § 3 — en partant de la considération que le premier membre d'une équation algébrique sans aucune racine doit être constant. Ce procédé énumératif, trés utile aussi en beaucoup d'autres cas pour établir des relations métriques dans la géométrie, est sans doute bien connu des géomètres; mais le seul écrit où je l'aie vu appliqué d'une manière conséquente est la thèse de M. E. Holst à Christiania.

Le résultat auquel je suis arrivé par cette voie s'est montré dépendre aussi de la propriété des polygones circonscrits à une quadrique qu'a reconnue Poncelet et dont M. Voss s'est occupé dans un récent travail**). La lecture de cette dissertation m'a conduit à m'occuper de nouveau des cycles; elle n'a donc pas été absolument étrangère à mes propres recherches; si elle ne les a pas directement influencées — à l'exception de celles qui s'y rapportent immédiatement — elle les a au moins provoquées dans une certaine mesure; aussi n'ai je point été étonné d'apprendre de M. Voss, après lui avoir communiqué la propriété métrique des cycles, qu'il la connaissait déjà et qu'elle se trouve à côté d'autres dans un mémoire qu'il va publier prochainement***), et où je savais déjà qu'il étudie algébriquement les polygones circonscrits à une suite de points et inscrits à une quadrique.

Dans le but de parvenir, dans le § 3, à une généralisation de la même propriété métrique, j'ai dû étudier, dans le § 2, les congruences

*) Mon premier article sur cette matière se trouve dans le t. XVIII des Mathematische Annalen.

**) Mathematische Annalen, t. XXV.

***) Il se trouve dans le présent cahier des Annales; la propriété en question est démontrée à la p. 241.

formées des droites joignant les points correspondants de deux figures projectives sur une quadrique. J'ai rencontré alors une congruence remarquable, étudiée autrefois par M. Hirst*), qui a montré que la congruence formée des tangentes communes à deux quadriques qui se rencontrent le long des côtés d'un quadrilatère se décompose en deux congruences, qui sont du second ordre et de la seconde classe. Mes recherches conduisent à de nouvelles propriétés de ces congruences. —

Afin d'éviter toute confusion j'ai conservé ici pour les figures projectives les désignations de *première* et de *seconde* espèce, dans le même sens que dans mon premier article, quand même certaines circonstances rendraient une interversion de ces noms plus naturelle.

Je saisis cette occassion de remarquer que M. Voss a bien voulu me faire observer que ses recherches algébriques l'ont conduit à des conditions de cycles qui sont irréductibles sans être linéaires par rapport aux coefficients de l'équation de la quadrique**). Le résultat auquel j'ai cru parvenir dans le § 5 de mon précédent article est donc erroné. La faute de mon raisonnement trop hardi, dont je n'ai fait d'ailleurs aucun usage, doit provenir de ce que j'ai négligé des facteurs qui n'avaient pas besoin d'être indépendents des coefficients pour disparaître, à cause de la position particulière des points, indépendemment des valeurs des coefficients.

§ 1.

Propriété métrique des suites infinies de polygones inscrits à une surface quadrique et circonscrits à un polygone gauche.

Je commence par rappeler les résultats, établis dans mon précédent article sur les figures projectives sur une quadrique, auxquels se rattache immédiatement la recherche actuelle.

Soit donnée une surface du second ordre et $2n$ points $A, B, C, \ldots, K, L, M, N$, *dont aucun ne se trouve sur la surface.* Nous appellerons circonscrit à la suite des points un polygone, ouvert ou fermé, $A'B'C' \ldots$ dont les côtés passent par ces points, ou par une partie de ces points, pris dans l'ordre donné ($A'B'$ par A etc.).

Si l'on circonscrit à une suite d'un nombre *impair* de points $ABC \ldots K$ un polygone $A'B'C' \ldots K'L'$ inscrit à la quadrique, ce polygone sera en général ouvert, et si les points de la suite n'ont pas des positions particulières, il ne se fermera que pour deux positions du point A' sur la surface. Ces points sont les points de coincidence des figures projectives, formées sur la surface par les deux points

*) *On the complexes generated by two correlative planes*, publié dans les *Collectanea Mathematica in memoriam D. Chelini.*

**) Voir aux p. 245—246 du présent cahier.

extrêmes A' et L' de tous les polygones. Par ces deux points passent deux sections planes qui correspondent à elles-mêmes dans les figures projectives. Les plans de ces sections ont la propriété de diviser harmoniquement la droite $A'L'$ joignant deux points quelconques qui se correspondent dans les figures projectives*).

Si en ajoutant un point arbitraire L, on forme une suite d'un nombre *pair* de points, les polygones $A'B' \ldots L'M'$ circonscrits à la suite et inscrits à la quadrique seront en général ouverts; mais ici il y a une nouvelle sorte de projectivité entre les deux points extrêmes A' et M', admettant quatre points de coïncidence A_1', A_2', A_3' et A_4', distribués de telle sorte que les droites $A_1'A_2'$ et $A_3'A_4'$ sont des polaires réciproques par rapport à la surface.

Dans le cas particulier où le point ajouté L se trouve dans le plan d'une des deux sections correspondant à elles-mêmes dans les figures projectives déterminées par les polygones circonscrits à la suite $AB \ldots K$, deux des points de coïncidence conjugués A_1' et A_2' des nouvelles figures (A') et (M') se trouveront dans ce plan, et toutes les sections planes passant par A_1' et A_2' correspondront à elles-mêmes. Cette propriété, d'avoir un faisceau de sections planes correspondant à elles-mêmes, appartiendra, dans ce cas-ci, aussi aux figures projectives qu'on obtient en soumettant la suite $A, B, \ldots, K, L$ à des substitutions circulaires (ou bien en circonscrivant des polygones ouverts $B'C' \ldots L'A'P'$ à $BC \ldots LA$ etc.). J'ai appelé les suites $AB \ldots KL$ jouissant de ces propriétés des *cycles incomplets* d'un nombre pair de points.

En ajoutant à un cycle incomplet $AB \ldots L$ un point M de l'axe $A_1'A_2'$ du faisceau des plans des sections correspondant à elles-mêmes, on aura un *cycle* d'un nombre impair de points qui jouit de la propriété qu'il existe une infinité de polygones fermés $A'B' \ldots M'A'$ inscrits à la quadrique et circonscrits au cycle. Les lieux des sommets seront des coniques; celui du sommet A' passera par les deux derniers points de coïncidence, A_3' et A_4', des figures projectives déterminées par le cycle incomplet $AB \ldots L$.

En ajoutant à un cycle $AB \ldots LM$ d'un nombre impair de points le pôle N du plan du lieu du sommet A' des polygones fermés, on aura un *cycle complet* d'un nombre pair de points, qui jouit de la propriété que tous les polygones inscrits à la surface qu'on y circonscrit se fermeront d'eux-mêmes.

Ces constructions des différentes espèces de cycles sont générales et applicables à tous leurs points, de façon qu'il restera un cycle si

---

*) Cette propriété résulte de l'involution des couples de plans correspondants (Vol. XVIII, p. 45).

l'on ôte à un cycle complet un point quelconque etc. Il y a seulement dans les cas particuliers suivants une plus grande liberté dans le choix du point à ajouter.

Il existe des *cycles incomplets*, que nous avons appelés *singuliers*, dont toutes les deux couples de points de coïncidence $A_1'A_2'$ et $A_3'A_4'$ jouissent de la propriété, caractérisant les cycles incomplets, de former les bases de faisceaux de sections planes correspondant à elles-mêmes dans les figures projectives (A') et (M') déterminées par le cycle. Alors on peut prendre un point M de l'une ou l'autre des droites $A_1'A_2'$ et $A_3'A_4'$ pour le $2n - 1$'ième point d'un cycle.

Si les $2n - 3$ points $A, B \dots K$ forment un cycle, on pourra former un cycle incomplet en ajoutant un point quelconque L de l'espace. L'axe $A_1'A_2'$ du faisceau des plans dont les sections correspondent à elles-mêmes joindra L au pôle du plan de la section lieu du sommet A' des polygones fermés et circonscrits au cycle $AB \dots K$, et les deux autres points de coïncidence, A_3' et A_4', appartenant au cycle incomplet, se trouveront sur cette section. Si le point ajouté L se trouve dans le plan de cette section, le cycle incomplet sera singulier, et on peut changer les couples $A_1'A_2'$ et $A_3'A_4'$ entre elles.

Soit $A'B' \dots N'A'$ un polygone fermé inscrit à la surface et circonscrit à un cycle complet $AB \dots N$ de $2n$ points. Alors je dis que le rapport

$$\frac{A'A}{B'A} \frac{B'B}{C'B} \cdots \frac{N'N}{A'N}$$

reste constant pour tous ces polygones.

En effet, les variations du polygone dépendent seulement de la position du point A', qu'on peut choisir arbitrairement sur la surface, et cette dépendence conduirait, si le théorème énoncé était faux, à une équation algébrique entre le rapport et les deux coordonnées qui déterminent A' sur la surface. On en pourrait déduire des valeurs de ces coordonnées — finies ou infinies, réelles ou imaginaires — rendant le rapport égal à zéro.

Or le rapport ne devient égal à zéro pour aucun des polygones $A'B' \dots N'A'$. En effet, même dans le cas où un des côtés, par exemple $A'B'$, rencontre le cercle sphérique à l'infini, le seul où un facteur $(A'A)$ du numérateur devienne égal à zéro, $\frac{A'A}{B'A} = 0$ exprimerait la coïncidence de A' avec A, qui ne peut avoir lieu parce que nous avons supposé qu'aucun des points fixes ne se trouve sur la surface; et un facteur du numérateur, par exemple $B'A$, ne devient infini que dans le cas où B' séloigne à l'infini, et alors $\frac{B'B}{B'A} = 1$.

Le théorème est donc démontré.

La même démonstration s'appliquerait aussi à l'infinité simple des polygones fermés $A'B' \ldots M'A'$, circonscrits à un cycle $AB \ldots M$ de $2n - 1$ points et inscrits à la surface; mais il est plus utile de remarquer que chacun de ces polygones fait partie d'un polygone $A'B' \ldots M'N'A'$, circonscrit au cycle complet $AB \ldots MN$, dont le côté $N'A'$, passant par le $2n$'ième point N et tangent à la surface, s'est réduit à zéro. Le rapport $\frac{N'N}{A'N}$ étant dans ce cas égal à 1, le rapport

$$\frac{A'A}{B'A} \cdot \frac{B'B}{C'B} \cdots \frac{M'M}{A'M}$$

aura pour tous les polygones fermés circonscrits au cycle et inscrits à la surface la même valeur constante que pour un cycle complet dont ce cycle fait partie.

On voit de la même manière que, pour deux des quatre polygones fermés, inscrits à la quadrique et circonscrits à un cycle incomplet $AB \ldots L$ de $2n - 2$ points, le rapport

$$\frac{A'A}{B'A} \cdot \frac{B'B}{C'B} \cdots \frac{L'L}{A'L}$$

a la même valeur que le rapport appartenant au cycle, ou au cycle complet, qu'on peut former en ajoutant un point M, ou deux points M et N, au cycle incomplet. Les sommets A' de ces deux polygones seront les deux points de contact, A_3' et A_4', des plans tangents passant par la droite, $A_1'A_2'$, qui devrait contenir les points à ajouter M et N.

Il n'est pas difficile maintenant de déterminer les valeurs que le rapport qui nous occupe peut prendre. Considérons à cet effet le cycle de $2n - 1$ points $AB \ldots LM$. Le rapport qui lui appartient, étant déterminé par le cycle incomplet $AB \ldots L$, ne s'altèrera pas si le point M parcourt la droite, $A_1'A_2'$, qui en est le lieu. On peut donc placer le point M dans le point d'intersection de cette droite avec le plan ABC, et on peut faire successivement la même chose pour les différents points du cycle.

Le plus commode sera de n'appliquer cette transformation qu'aux points $DE \ldots K$ du cycle. On n'aura donc qu'à s'occuper d'un cycle composé de $2n - 3$ points d'un plan et de deux autres points L et M. En negligeant encore le point M, on trouvera toutes les valeurs possibles du rapport cherché en cherchant celles que peut prendre *le rapport appartenant à un cycle incomplet composé de* $2n - 3$ *points,* $A, B, \ldots, K$ *d'un plan et d'un point quelconque* L.

Nous commencerons par supposer que les points $AB \ldots K$ *ne forment pas un cycle*, et qu'il faut placer, par conséquent, le point L

dans l'un ou l'autre des deux plans dont les sections correspondent à elles-mêmes dans les figures projectives, (A') et (L'), déterminées par les polygones ouverts $A'B' \ldots K'L'$. Les points de coïncidence, A_1' et A_2', des figures projectives (A') et (M') qu'on peut déterminer ensuite par les polygones ouverts $A'B' \ldots L'M'$ circonscrits au cycle incomplet, se trouvant alors dans le même plan, la droite $A_3'A_4'$ joignant ceux qui sont sommets des deux polygones auxquels appartient le rapport ne s'y trouvera pas, et les points A_3' et A_4' ne s'y trouveront que dans le cas particulier — que nous pouvons commencer par négliger — oú tous les points de coïncidence se confondent.

Dans le cas actuel l'un des deux plans où l'on peut placer L est celui qui contient déjà $A, B \ldots K$. Les points A_3' et A_4' ne s'y trouvant pas, il est évident qu'aucun côté des polygones fermés $A'B' \ldots L'A'$ ayant l'un ou l'autre de ces points pour sommet ne s'y trouvera, non plus. Alors les points $A, B \ldots K, L$ étant les points d'intersection des côtes de ces deux polygones avec un plan, on aura pour chacun d'eux:

$$\frac{A'A}{B'A} \cdot \frac{B'B}{C'B} \cdots \frac{L'L}{A'L} = 1.$$

Plaçons ensuite L dans l'autre plan, et non pas dans la droite d'intersection. Aucun côté des deux polygones fermés $A'B' \ldots L'A$ qui nous occupent ne se trouve, non plus alors, dans le plan $AB \ldots K$; car cela n'aurait lieu que si déjà le polygone $A'B' \ldots L'$ s'était fermé et $A'L'$ était tangente à la surface, et alors A' serait un des points d'intersection des deux plans. Il se trouverait donc dans le plan où nous avons placé L, et ne pourrait être aucun des points A_3' ou A_4'.

Désignons par P le point où le côté $L'A'$ de l'un des deux polygones, que nous avons à considérer, rencontre le plan $ABC \ldots K$. Alors on a

$$\frac{A'A}{B'A} \cdot \frac{B'B}{C'B} \cdots \frac{K'K}{L'K} \cdot \frac{L'P}{A'P} = 1.$$

Or A' et L' sont deux points correspondants des figures projectives déterminées par les polygones ouverts $A'B' \ldots K'L'$ circonscrits à $AB \ldots K$. La droite $A'L'$ est donc divisée harmoniquement par ses points d'intersection L et P avec les deux plans dont est composé le lieu du point à ajouter. On a donc $\frac{L'P}{A'P} = -\frac{L'L}{A'L}$. Le rapport cherché obtient donc dans le cas présent la valeur de

$$\frac{A'A}{B'A} \cdot \frac{B'B}{C'B} \cdots \frac{K'K}{L'K} \cdot \frac{L'L}{A'L} = -1.$$

Ce résultat, une fois établi, ne cessera pas d'être applicable au cas limite que nous avons négligé où les points $A_1'A_2'A_3'A_4'$ se con-

fondent. Si l'on place le point L sur la droite d'intersection des deux plans dont son lieu se compose, le cycle incomplet sera singulier, et le rapport cherché aura la valeur de ± 1 suivant qu'on regarde l'une ou l'autre des deux couples de points de coïncidence comme les points A_3' et A_4'.

Supposons ensuite que les *points* $A, B \ldots K$ *forment un cycle,* qu'il ne nous sert plus à rien de supposer plan. Si alors on ne place pas le point L dans le plan de la section, que peut parcourir le sommet A' du polygone fermé $A'B' \ldots K'A'$, les points A_3' et A_4' seront les points de contact des plans tangents passant par le pôle O de ce plan et par le point L. Les polygones fermés $A'B' \ldots L'A'$, auxquels appartient le rapport cherché seront donc composés d'un côté infiniment petit $L'A'$ passant par L, au quel correspond le facteur $\frac{L'L}{A'L} = 1$, et d'un polygone fermé $A'B' \ldots K'A'$ circonscrit au cycle donné de $2n - 3$ points. Le rapport cherché aura donc la même valeur que celui qui appartient à ce cycle.

La même solution reste possible, dans le cas où L se trouve dans le plan que je viens d'excepter; mais alors A_3' et A_4' peuvent encore être les points d'intersection de la surface avec la droite OL. L'un de ces points étant pris pour le sommet A' d'un polygone fermé circonscrit au cycle incomplet, l'autre sera son sommet L'. Comme L se trouve dans le plan polaire de O, on aura $\frac{L'L}{A'L} = -\frac{L'O}{A'O}$, et par conséquent

$$\frac{A'A}{B'A} \cdot \frac{B'B}{C'B} \cdots \frac{K'K}{L'K} \cdot \frac{L'L}{A'L} = -\frac{A'A}{B'A} \cdot \frac{B'B}{C'B} \cdots \frac{K'K}{L'K} \frac{L'O}{A'O}.$$

Le polygone fermé $A'B' \ldots L'A'$ étant circonscrit au cycle complet $AB \ldots KO$, le dernier rapport sera égal à celui qui appartient à celui-ci, et par conséquent aussi à celui qui appartient au cycle $AB \ldots K$.

Nous avons donc prouvé que la valeur du rapport appartenant à un cycle de $2n - 1$ points est égal à $+1$ ou à -1 ou au rapport appartenant à un cycle de $2n - 3$ points, pris avec le signe $+$ ou $-$. On voit de la même manière que ce dernier rapport est égal à $+1$ ou -1 ou, sauf peut être le signe, au rapport appartenant à un cycle de $2n - 5$ points. S'il en est besoin on peut continuer cette réduction jusqu'à un cycle de trois points.

Il en existe deux espèces.

Les cycles de l'une sont composés de trois points quelconques, A, B, C, d'une droite. Alors deux des triangles fermés $A'B'C'A'$ circonscrits auront des côtés infiniment petits, et tous les trois facteurs du rapport cherché seront égaux à l'unité.

Les cycles de l'autre sont composés de trois points formant un triangle ABC conjugué à lui-même. Alors dans deux des triangles fermés circonscrits les sommets C' et A' coïncident, et on aura

$$\frac{C'C}{A'C} = 1, \quad \frac{B'B}{C'B} = -\frac{B'A}{A'A}.$$

Le rapport cherché devient donc égal ici à $+ 1$.

Nous avons donc démontré le théorème suivant: *Les polygones fermés $A'B' \ldots N'A'$ inscrits à une surface du second ordre et circonscrits à un cycle complet ou à un cycle d'un nombre impair de points, et deux des quatre polygones fermés, inscrits à la surface et circonscrits à un cycle incomplet, satisferont, si nous désignons chacun de ces cycles par $ABC \ldots N$, à l'une ou l'autre des équations:*

$$(1) \qquad \frac{A'A}{B'A} \cdot \frac{B'B}{C'B} \cdots \frac{N'N}{A'N} = \pm 1.$$

Nous appellerons un cycle de chacune de ces espèces *positif* ou *négatif* suivant que le rapport a l'une ou l'autre de ces deux valeurs.

Réciproquement, si un polygone fermé $A'B' \ldots N'A'$ à un nombre *pair* de côtés est inscrit à la surface, les points $AB \ldots MN$ déterminés par l'une ou l'autre des équations (1) formeront un cycle, qui est en général incomplet.

En effet, si les points $A, B \ldots M$ forment déjà un cycle, on formera un cycle (incomplet), en ajoutant un point quelconque N; et si les points $AB \ldots M$ ne forment aucun cycle, on peut former un cycle incomplet de ces points et du point d'intersection du côté $N'A'$ avec l'un ou l'autre de deux plans. Ces deux points d'intersection doivent satisfaire, respectivement, à l'un et à l'autre des équations (1). L'un ou l'autre coïncide donc avec le point N.

Le cycle incomplet formé par l'addition d'un point quelconque à un cycle d'un nombre impair de points a le même signe que celui-ci. Celui qu'on forme par l'addition d'un point à une autre collection d'un nombre impair de points sera positif ou négatif suivant que le point ajouté se trouve dans l'un ou l'autre des deux plans qui en composent le lieu. On peut regarder un cycle incomplet et singulier comme positif ou négatif; car on peut y circonscrire deux polygones fermés auxquels appartient le rapport $+1$, deux auxquels appartient le rapport -1.

Les cycles complets et les cycles qu'on forme en ajoutant deux ou un point à un cycle incomplet ont le même signe que celui-ci.

Les cycles complets, simples ou incomplets qu'on forme par l'addition d'un cycle de la même nature à un cycle complet, et les cycles incomplets qu'on forme par l'addition de deux cycles de nombres im-

pairs de points, seront positifs ou negatifs, suivant que les cycles composants ont le même signe ou des signes différents.

Un cycle d'une espèce quelconque composé de points d'une droite est toujours positif.

Un cycle complet et composé de points d'un plan est toujours positif. Un cycle composé d'un nombre impair de points d'un plan est négatif ou positif, suivant que la section de ce plan est lieu des sommets des polygones circonscrits fermés, ou non. On voit donc que les points sur lesquels peuvent pivoter tous les côtés d'un polygone inscrit à une conique forment un cycle positif ou négatif suivant que leur nombre et pair ou impair. —

Autre démonstration. On peut aussi déduire le théorème général dont nous nous sommes occupés et les propriétés des cycles positifs et négatifs des propriétés des deux espèces de polygones circonscrits à une quadrique qu'on doit à **Poncelet**, et que M. **Voss** a établies d'une manière complète dans le 25^{me} volume de ces Annales, et cette nouvelle démonstration nous permettra aussi de voir ce qu'exprime, à elle seule, une des équations (1), si le nombre des points donnés est impair.

Soit $A'B'\ldots N'$ un polygone inscrit à une surface du second ordre dont les côtés peuvent pivoter sur les points fixes $A, B\ldots N$, soit en parcourant des surfaces coniques, soit tout-à-fait librement. Alors les tangentes $a', b'\ldots n'$ en $A', B'\ldots N'$ aux courbes que peuvent parcourir à la fois les sommets d'un polygone variable circonscrit à $A, B\ldots N$ formeront un polygone fermé, circonscrit à la surface. En effet, le plan $a'A$ passera par b', le plan $b'B$ par c' etc.

On voit encore que les deux polygones qu'on peut inscrire, en général, au polygone $a'b'\ldots n'$ et circonscrire à la suite des points $AB\ldots N$, qui se trouvent, respectivement, dans les plans $a'b'$, $b'c'\ldots n'a'$, coïncident, dans le cas actuel, avec $A'B'C'\ldots N'$. Or nous allons démontrer, tout à l'heure, que, si $A'', B''\ldots N''$ sont les sommets du polygone $a'b'\ldots n'$ ($a'b'$ identique à A'' etc.), l'équation

$$(2)\qquad \frac{A'A}{B'A}\cdot\frac{B'B}{C'B}\cdots\frac{N'N}{A'N}=\frac{N''A'}{A''A'}\cdot\frac{A''B'}{B''B'}\cdots\frac{M''N'}{N''N'}$$

exprimera la condition nécessaire et suffisante de cette coïncidence. Il résulte encore du mémoire cité de M. **Voss** que

$$(3)\qquad \frac{N''A'}{A''A'}\cdot\frac{A''B'}{B''B'}\cdots\frac{M''N'}{N''N'}=\pm 1$$

suivant que le polygone circonscrit $A''B''\ldots N''$ est de la première ou de la seconde espèce.

On aura donc

$$\frac{A'A}{B'A}\cdot\frac{B'B}{C'B}\cdots\frac{N'N}{A'N}=\pm 1,$$

ce qu'il fallait démontrer. On voit en même temps que le cycle — complet ou simple — $AB\ldots N$ devient positif ou négatif suivant que le polygone circonscrit est de la première ou de la seconde espèce.

Il nous reste à démontrer le lemme exprimé par l'équation (2). Nous considérons, à cet effet, un polygone ouvert $A_1'B_1'C_1'\ldots N_1'A_2'$ circonscrit à $AB\ldots N$, et dont les sommets se meuvent sur les côtés $b', c'\ldots n'$ du polygone $A''B''\ldots N''$; A_1 et A_2' sont les points d'intersection du premier et du dernier côté de ce polygone avec a'. Si nous désignons par dA_1', $dB_1'\ldots dN_1'$, dA_2' les segments infiniment petits parcourus à la fois sur les droites $a'b'\ldots n'a'$ par les points $A_1'\,B_1'\ldots N_1'A_2'$, nous aurons, selon le théorème sur les intersections des côtés d'un triangle avec une transversale,

$$\frac{dB_1'}{dA_1'}=\frac{A''B_1'}{A''A_1'}\cdot\frac{B_1'A}{A_1'A},$$

$$\frac{dC_1'}{dB_1'}=\frac{B''C_1'}{B''B_1'}\cdot\frac{C_1'B}{B_1'B},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dA_2'}{dN_1'}=\frac{N''A_2'}{N''N_1'}\cdot\frac{A_2'N}{N_1'N},$$

et ces équations seront aussi justes par rapport au signe si nous donnons aux mouvements infiniment petits le signe $+$ ou $-$ suivant qu'ils ont lieu dans les sens pris pour positifs ou pour négatifs dans la détermination des segments finis des côtés.

On en déduit par multiplication

$$\frac{dA_2'}{dA_1'}=\frac{N''A_2'}{A''A_1'}\cdot\frac{A''B_1'}{B''B_1'}\cdots\frac{M''N_1'}{N''N_1'}\cdot\frac{B_1'A}{A_1'A}\cdot\frac{C_1'B}{B_1'B}\cdots\frac{A_2'N}{N_1'N}.$$

Dans le cas qui nous occupe A_2' coïncide avec A_1' dans le point A', et comme ce point doit être sommet de deux polygones fermés consécutifs, il faut qu'encore $dA_2'=dA_1'$. On en déduit l'équation (2). —

Cette seconde démonstration nous monstre que, réciproquement, l'une ou l'autre des équations (1)

$$\frac{A'A}{B'A}\cdot\frac{B'B}{C'B}\cdots\frac{N'N}{A'N}=\pm 1$$

exprimera la coïncidence avec $A'B'\ldots N'$ de deux polygones fermés, inscrits à la surface et circonscrits á la suite $AB\ldots N$, dans tous les cas où il existe un polygone circonscrit à la surface qui a $A'B'\ldots N'$ pour points de contact: il faut prendre dans l'équation (1) le signe $+$ ou $-$ suivant que le polygone circonscrit est de la première ou de la seconde espèce.

Commençons par le cas où le nombre des points $A'B' \ldots N'$ est *impair*. Alors il est possible de circonscrire deux polygones à la surface qui ont ces points pour points de contact. Une des équations (1) correspond seulement à un de ces polygones; car aprés avoir choisi arbitrairement les points $AB \ldots M$ sur $A'B'$, $B'C' \ldots$ et aprés avoir déterminé N par cette équation, on peut déterminer entièrement les tangentes $a'b' \ldots n'$ par le seul polygone, infiniment voisin de $A'B' \ldots N'$, qui est inscrit à la surface et circonscrit à $AB \ldots N$. On voit donc, premièrement, que *les deux polygones, à un nombre impair de côtés, circonscrits à une surface du second ordre qui ont les mêmes points de contact sont d'espèces différentes**), et ensuite que *chacune des deux équations* (1) *exprime, dans le cas où le nombre de A', $B' \ldots N'$ est impair, la coïncidence des deux polygones inscrits à la surface et circonscrits à $AB \ldots N$.* On voit en même temps que les deux polygones circonscrits à la surface sont toujours réels.

Si le nombre des points $A'B' \ldots N'$ est *pair*, il ne sera pas possible, en général, de circonscrire à la surface un polygone qui ait ces points pour points de contact; car les deux polygones, toujours possibles, circonscrits à $A'B' \ldots N'$ et inscrits au polygone formé des polaires réciproques de $A'B'$, $B'C' \ldots M'N'$ seront, en général, composés de génératrices, et ne seront pas proprement circonscrits à la surface. S'il existe un polygone proprement circonscrit il y en aura une infinité. C'est ce cas que nous allons étudier.

Nous démontrerons que *tous les polygones à un nombre pair de côtés circonscrits à une surface du second ordre et ayant les mêmes points de contact, sont de la même espèce.* Nous verrons en même temps que *le polygone qui a pour sommets ces points de contact sera le seul polygone fermé qu'on puisse inscrire à la surface et circonscrire à un cycle incomplet — positif si le polygone circonscrit à la surface est de la première espèce, négatif s'il est de la seconde espèce — déterminé, sur les côtés du polygone inscrit, par l'une ou l'autre des équations* (1).

Supposons, en effet, pour fixer les idées, que les points $A'B' \ldots N'$, en nombre pair, sont les points de contact de la surface avec les côtés d'un polygone circonscrit de la première espèce, et déterminons, sur ses côtés, le cycle incomplet et positif $AB \ldots N$ par la première équation (1). Alors nous savons que les deux polygones, inscrits au polygone circonscrit à la surface et circonscrits au cycle incomplet, coïncident avec $A'B' \ldots N'$. Ces polygones étant en même temps inscrits à la surface, on voit que deux points de coïncidence des figures projectives, (A_1') et (A_2'), que déterminent sur la surface les polygones

*) Ce résultat est trouvé par M. Voss aux pp. 55 et 65 du mémoire cité; de même le théorème suivant sur les polygones circonscrits à un nombre pair de côtés.

ouverts $A_1' B' \ldots N' A_2'$, circonscrits au cycle incomplet, coïncident avec A'. Comme la tangente en A' qui joint entre eux ces deux points coïncidents n'est pas une génératrice, ils seront des points de coïncidence opposés des deux figures projectives. Donc tous leurs quatre points de coïncidence coïncident avec A'.

La dépendence des deux figures projectives (A_1') et (A_2') consiste en deux projéctivités, indépendentes entre elles, de génératrices appartenant à l'une des deux sériés, et de génératrices appartenant à l'autre. Les coïncidences des génératrices de coïncidence dans l'une ou l'autre des séries sont donc aussi indépendantes entre elles, et on peut attribuer au rapport des distances infiniment petites des génératrices de l'une des séries et de celles de l'autre une valeur quelconque. Il en résulte que, sans altérer le cycle incomplet, on peut donner à la tangente en A' qui joint les points de coïncidence opposés et coïncidents une direction quelconque dans le plan tangent. Tous les polygones circonscrits à la surface gardent donc les mêmes propriétés par rapport au cycle $ABC \ldots N$.

On pourra raisoner d'une manière analogue, si le polygone circonscrit est de la seconde espèce.

Les théorèmes, que nous venons de démontrer, prouvent qu'on ne peut déterminer un cycle complet sur les côtés d'un polygone fermé et inscrit quelconque à un nombre pair de côtés. Il faut que les sommets du polygone soient les points de contact d'un polygone circonscrit. Alors le cycle se détermine par l'une ou l'autre des équations (1) et par deux autres conditions, auxquelles nous n'avons pas réussi à donner une forme assez simple pour leur donner de l'intérêt.

§ 2.

Sur les congruences engendrées par les figures projectives sur une quadrique.

Nous étudierons ici les congruences des droites XX' joignant des points correspondants de deux figures projectives sur une surface du second ordre.

Si la correspondance est de *la première espèce*,*) il existera des correspondances homographiques (ou projectives) entre les génératrices de la *même* série, x_1 et x_1', x_2 et x_2', passant par les points X et X'; il y aura dans chaque sérié deux génératrices de coïncidence a_1 et b_1, a_2 et b_2, et les sommets du quadrilatère $a_1\, a_2\, b_1\, b_2$ seront les points de coïncidence des deux figures.

Si la correspondance est de la *deuxième espèce*, il existera deux correspondances homographiques (ou projectives) entre les génératrices

*) Voir le § II de mon mémoire dans le vol. XVIII.

des deux séries, x_1 et x_2', x_2 et x_1', passant par les deux points X et X'. Il existera alors en général deux points de coïncidence; seulement dans le cas d'involution, une coïncidence de points correspondants aura lieu en chaque point d'une conique.

L'ordre de la congruence des droites XX', ou le nombre des droites passant par un point P de l'espace, se trouvera*) si l'on joint P au point mobile X. Si X'' est le point où PX rencontre encore la surface, il y aura entre les points X' et X'' une correspondance projective d'espèce différente de celle qui a lieu entre X et X'. Les points de coïncidence de X' avec X'' déterminent les droites cherchées. Leur nombre, ou l'ordre de la congruence, devient 2 ou 4 suivant que la correspondance donnée est de la première ou de la seconde espèce.

Pour trouver la *classe* de la congruence, ou le nombre des droites XX' qui se trouvent dans un plan, il suffit de rappeler que le lieu des points X' qui correspondent aux points X de la section faite par le plan est une nouvelle section plane. Celle-ci rencontre la première section en deux points X'. La classe cherchée est donc 2 pour toutes les deux espèces de correspondances.

La *surface focale* de la congruence est de différente nature pour les deux espèces de correspondances, et se trouve par des procédés différentes entre eux.

La congruence appartenant à une correspondance de la *première espèce* étant du second ordre et de la seconde classe, nous commencerons par démontrer qu'alors la surface focale devient, en général, du quatrième ordre et de la quatrième classe.

Une droite quelconque de la congruence est tangente deux fois à la surface focale, et ne peut la rencontrer ultérieurement. En effet, s'il existait encore un point d'intersection, il se trouverait et sur la droite donnée et sur deux autres droites de la congruence, coïncidant entre elles, et par conséquent sur une infinité d'autres. Si toutes les droites de la congruence contenaient des points d'où sortent une infinité de ses droites, la courbe, lieu de ces points ferait partie de la surface focale. Abstraction faite des cas où la surface focale, en partie ou en entier, est remplacée par une courbe — cas dont il est facile de se rendre compte, et qu'on peut regarder comme des cas limites**) —

*) Une autre manière de trouver l'ordre et la classe est indiquée à la p. 38 de mon précédent article.

**) Nous ne parlons ici que de congruences irréductibles. Les cas où il y a une courbe focale sont les suivants:

1° Les droites de la congruence sont tangentes à une surface du second ordre aux points d'une conique; alors on peut regarder deux surfaces du second ordre, tangentes l'une à l'autre le long de cette conique, comme surface focale.

2° La surface focale est composée d'une droite et d'une surface du second

la surface focale devient donc du quatrième ordre. Le principe de dualité montre que sa classe a la même valeur.

Si, dans le cas qui nous occupe, a_1 et b_1, a_2 et b_2 sont les génératrices de la surface, correspondant à elles-mêmes dans l'une et l'autre série, nous allons chercher la courbe d'intersection de la surface focale avec le plan $a_1\,a_2$. Cette courbe est le lieu des points P de ce plan par lesquels passent deux droites coïncidentes de la congruence. Or l'une des droites passant par un point P du plan est celle qui le joint au point de contact $(a_1\,a_2)$ du plan avec la surface, qui est un point de coïncidence, et, comme ce point est le seul point de a_1 qui corresponde à un point de a_2, parceque ces droites correspondent à-elles-mêmes, l'autre ne se trouvera dans ce plan que dans les cas où P est un point de a_1 ou a_2. La courbe d'intersection, devant être du quatrième ordre, est donc composée de a_1 et a_2, prises deux fois. De même, la droite a_1 compte pour deux dans l'intersection du plan $a_1\,b_2$ avec la surface focale. Elle est donc une droite double de cette surface, et a_2, b_1, b_2 le sont aussi. Il en résulte que la surface focale est composée de deux surfaces du second ordre passant par $a_1\,a_2\,b_1\,b_2$.

La surface focale de la congruence des droites joignant les points correspondants, X *et* X', *de deux figures projectives de la première espèce sur une surface quadrique est composée de deux autres quadriques passant par les quatre droites* a_1, b_1, a_2, b_2 *correspondant à elles-mêmes. — Dans le cas d'involution ces surfaces se réduisent aux deux diagonales du quadrilatère gauche* $a_1\,a_2\,b_1\,b_2$.

La correspondance est en général déterminée par le quadrilatère $a_1\,a_2\,b_1\,b_2$ et une couple de points correspondants X et X'. Les surfaces dont se compose la surface focale seront les deux quadriques passant par $a_1\,a_2\,b_1\,b_2$ et tangentes à $X X'$.

Si réciproquement deux quadriques passant par $a_1\,a_2\,b_1\,b_2$ sont données, le quadrilatère et une tangente commune quelconque déterminent une congruence dont les droites décrivent sur la surface donnée des figures projectives; mais comme la congruence formée des tangentes communes aux deux surfaces est du quatrième ordre et de la quatrième classe, elle doit se décomposer en celle qui appartient à ces figures projectives, et une autre qui appartient de la même manière à deux autres figures projectives déterminées par $a_1\,a_2\,b_1\,b_2$ et une seule autre droite de la dernière congruence.

---

ordre. Pour avoir alors une surface focale du quatrième ordre, on peut remplacer la droite par deux plans passant par elle; un cas particulier est celui où la surface du second ordre est aplatie, ou remplacée par une conique; ainsi que celui d'une congruence linéaire, prise deux fois.

On voit donc que *la congruence formée des tangentes communes à deux surfaces du second ordre φ et ψ qui se rencontrent le long des côtés d'un quadrilatère gauche se décompose en deux congruences du second ordre et de la seconde classe.* — Ce résultat étant dû à M. **Hirst**, nous appellerons les deux congruences **Hirstiennes.***)

Pour effectuer la décomposition on peut se servir des deux couples de figures projectives que les tangentes communes de φ et ψ décrivent sur une troisième surface du second ordre χ qui passe par le même quadrilatère gauche.

Si l'on projette les deux surfaces φ et ψ d'un point X de la surface χ, leurs contours apparents, (φ) et (ψ) seront inscrits à la projection $(a_1)\,(a_2)\,(b_1)\,(b_2)$ du quadrilatère $a_1\,a_2\,b_1\,b_2$, et les droites des deux congruences qui passent par X auront pour traces, dans le plan de projection, les quatre points d'intersection des deux contours (X'), (X''), (X'''), (X^{IV}). Ces points seront les projections des points X', X'', X''', X^{IV} de χ qui correspondent à X dans quatre figures projectives à celle qu'on aura en faisant parcourir à X la surface χ. Si XX' et XX'' appartiennent à la même congruence Hirstienne les correspondances projectives qu'elles déterminent seront réciproques, de façon que X'' et X, dans l'une des figures, correspondent à X et X', dans l'autre. Alors de même X^{IV} et X, dans une figure sur χ, correspondront à X et X''', dans une figure projective.

La projection montre immédiatement une distribution des quatres points d'intersection en deux couples, qui doit être identique à celle des traces des droites appartenant aux deux congruences Hirstiennes. En effet, la droite joignant le point d'intersection de (a_1) et (b_1), que nous appellerons (x_2) parce qu'il est la trace de la géneratrice x_2 par X, au point d'intersection (x_1) de (a_2) et (b_2), qui est la trace de l'autre génératrice x_1 par X, aura le même pôle par rapport à (φ) et (ψ), et par ce pôle passent deux cordes communes. Les points d'intersection de l'une ou de l'autre de ces deux cordes avec les coniques seront les traces (X') et (X''), (X''') et (X^{IV}) des droites de l'une ou de l'autre congruence.

Cela résulte directement des propriétés de la projection, qui conduisent encore à la dépendence entre les deux correspondances projectives de figures sur χ qui sont déterminées par les deux congruences. Ces correspondances projectives, qui consistent en des correspondances projectives entre les génératrices des deux séries passant par les points correspondants, dépendent des valeurs des rapports anharmoniques:

---

*) Voir son mémoire inséré aux Collectanea Math. in memoriam D. Chelini. Nous indiquerons plus tard la propriété par laquelle il caractérise une de ces congruences.

$$(1)\qquad \begin{cases}(a_1\, b_1\, x_1\, x_1'\ ) = \xi_1, & (a_2\, b_2\, x_2\, x_2'\ ) = \xi_2,\\ (a_1\, b_1\, x_1\, x_1''') = \eta_1, & (a_2\, b_2\, x_2\, x_2''') = \eta_2,\end{cases}$$

où nous avons désigné les génératrices des deux séries qui se rencontrent en X', X'', X''', X^{IV} de la même manière que pour X. Les projections de ces génératrices joignent les points (X'), (X''), (X'''), (X^{IV}) respectivement à (x_2) et (x_1).

Pour avoir d'une manière rapide les propriétes de la projection dont nous avons besoin ici, et dont il ne serait pas difficile de donner aussi une démonstration directe et projective, nous choisissons un plan de projection parallèle à x_1 et x_2. Alors les points (x_1) et (x_2) se trouveront à l'infini et $(X')\,(X'')$ et $(X''')\,(X^{IV})$ seront deux diamètres communs aux deux coniques.

La symmétrie de la figure montre donc premièrement que

$$(a_1 b_1 x_1''\, x_1) = (a_1 b_1 x_1 x_1'\ ) = \xi_1, \quad (a_2 b_2 x_2''\, x_2) = (a_2 b_2 x_2 x_2'\ ) = \xi_2,$$
$$(a_1 b_1 x_1^{IV} x_1) = (a_1 b_1 x_1 x_1''') = \eta_1, \quad (a_2 b_2 x_2^{IV} x_2) = (a_2 b_2 x_2 x_2''') = \eta_2,$$

ou que notre distribution des quatre droites aux deux congruences a été juste, et ensuite que, pour une disposition convenable des deux noms X''' et X^{IV},

$$(2)\qquad \eta_1 = \xi_2, \quad \eta_2 = \xi_1.$$

En changeant les noms de X''' et X^{IV}, on aurait $\eta_1 = \frac{1}{\xi_2}$, $\eta_2 = \frac{1}{\xi_1}$.

On voit donc *que les mêmes deux rapports anharmoniques* $(a\,b\,x\,x')$ *caractérisent l'une et l'autre des deux correspondances projectives, établies sur la conique* χ *par les tangentes communes à* φ *et* ψ*; seulement, celui qui détermine, pour l'une des correspondances, les génératrices correspondantes de l'une des deux séries, s'applique dans l'autre à l'autre série de génératrices.*

Ce résultat était à prévoir; car la notion des trois surfaces φ, ψ, χ n'implique aucune distinction entre les deux séries de génératrices de χ.

Nous n'entrerons pas ici dans une étude spéciale des surfaces gauches, lieux des droites des deux congruences qui satisfont encore à une condition donnée, et de leurs rapports entre elles. Nous nous contentons de montrer une décomposition ultérieure de la surface, lieu des droites de l'une des congruences qui rencontrent une droite fixe c_1, dans le cas particulier où cette droite rencontre les deux génératrices a_2 et b_2 des hyperboloides φ et ψ. Cette surface sera composée de deux surfaces du second ordre.

En effet, la droite c_1 sera une génératrice d'une surface χ à laquelle correspond — dans une quelconque des quatre figures projectives

que déterminent sur χ les tangentes communes à φ et ψ — une nouvelle génératrice d_1 de la même série. Les droites XX' qui etablissent cette correspondance entre c_1 et d_1 rencontrent ces droites en des points correspondants, X et X'. Elles engendreront donc une surface du second ordre.

Soit Y le point où une des droites XX' rencontre une nouvelle surface ω du faisceau déterminé par le quadrilatère gauche $a_1 a_2 b_1 b_2$. Alors la génératrice de ω qui passe par Y et rencontre a_2 et b_2 se trouvera en entier sur la surface engendrée, et la série des points Y sera projective à celles des points X et X'. Les mêmes relations auront lieu, si l'on fait parcourir à X une génératrice de la seconde série de χ. Comme une série de génératrices d'une surface du seconde ordre est projective aux séries de ses points d'intersection avec les génératrices de l'autre série, nous avons prouvé, que

Les mêmes droites qui joignent les points correspondants, X et X', de deux figures projectives de la première espèce sur une surface du second ordre, χ, établissent une correspondance projective entre les figures formées des points X et X' et deux figures formées de leurs points d'intersection, Y et Y', avec une nouvelle surface du second ordre, ω, qui passe par les quatre génératrices communes aux deux figures formées des points X et X' de χ. Nous regardons ici comme projectives deux figures formées de points X et Y de deux surfaces du second ordre χ et ω, si les points se correspondent un à un, et si les génératrices de l'une et de l'autre série de χ qui passent par X forment des séries projectives, respectivement, aux séries des génératrices de ω qui passent par Y.

Réciproquement, *si l'on joint par des droites les points correspondants, X et Y, de deux figures projectives sur des surfaces du second ordre, χ et ω, qui ont en commun quatre droites correspondant à elles-mêmes, les droites XY détermineront des figures projectives sur chacune des deux surfaces*, ou bien, leur congruence sera Hirstienne.

En effet, si une droite XY rencontre encore la surface χ au point X', les points X et X' et les génératrices de coïncidence a_1, b_1; a_2, b_2 suffiront pour déterminer deux figures projectives de la première espèce sur χ, et la congruence XX' déterminera sur ω deux figures projectives à la figure X. Une de ces correspondances, étant déterminée par les génératrices correspondant à elles-mêmes et par la seule couple de points correspondants X et Y, sera identique à celle des figures données.

En particulier la surface ω, lieu des points Y, peut coïncider avec une des surfaces φ et ψ. On voit donc que les points de contact des droites de la congruence Hirstienne avec ces surfaces forment aussi des figures projectives, entre elles et avec celles que forment les points d'intersection avec les autres surfaces. Les surfaces, lieux des droites

de la congruence qui rencontrent une génératrice d'une surface du faisceau auront donc pour courbes de contact avec φ et ψ des génératrices de ces deux surfaces. En considérant seulement celles-ci, on voit que les droites de la congruence dont les points de contact avec φ se trouvent sur une génératrice ont aussi pour points de contact avec ψ des points d'une génératrice.

Considérons à présent une droite mobile d'une congruence Hirstienne, et supposons qu'elle rencontre des surfaces du faisceau aux points X, Y, Z, U. Comme les deux points d'intersection avec une surface du faisceau appartiennent à des figures distinctes et projectives entre elles, il est possible de supposer que, pendant ce mouvement, chacun des points appartient toujours à la même figure sur la surface, qu'il peut parcourir toutefois en entier. Alors on peut prouver que le rapport anharmonique $(X\,Y\,Z\,U)$ reste constant.

En effet, nous avons vu que, si X parcourt une génératrice de la surface χ, la droite engendrera une surface du second ordre, dont Y, Z et U parcourront des génératrices de la même série que celle que parcourt X. Le rapport anharmonique reste donc constant pendant ce mouvement-ci. Or tout déplacement de X sur χ peut être remplacé par des déplacements successifs sur des génératrices des deux séries. Le rapport anharmonique reste donc constant toujours.

On peut démontrer cette propriété des droites de la congruence d'une autre manière qui la rend applicable à la fois aux droites de toutes les deux congruences Hirstiennes déterminées par φ et ψ. Soient, en effet, S et T les points de contact d'une tangente commune à φ et ψ, X et Y des points d'intersection avec deux autres surfaces du faisceau χ et ω, et soient ξ et η les coefficients qui déterminent ces deux surfaces par rapport à φ et ψ $[\chi \equiv \varphi + \xi\psi,\ \ \omega \equiv \varphi + \eta\psi]$. Alors on aura $(S\,T\,X\,Y) = \pm\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}$ où le signe dépend des choix entre les deux points d'intersection avec φ et avec ψ. Les rapports anharmoniques $(S\,T\,X\,Z)$ et $(S\,T\,X\,U)$ se déterminent de la même manière. On voit donc qu'aussi

$$(XYZU) = \frac{1-(STXZ)}{1-(STXU)} : \frac{(STXY)-(STXZ)}{(STXY)-(STXU)}$$

devient indépendant de la position particulière de la tangente commune.

Les différents rapports anharmoniques formés par les différents groupes de quatre points d'intersection de deux tangentes communes à deux surfaces quadriques passant par un quadrilatère gauche, avec quatre surfaces du faisceau, ont les mêmes valeurs.

Le faisceau de quadriques passant par un quadrilatère gauche contient deux surfaces composées de deux plans. En appliquant les théorèmes précédents à ces surfaces, on trouve que chacune des deux

congruences composées des tangentes communes à deux surfaces passant par un quadrilatère gauche $a_1\,a_2\,b_1\,b_2$, dont nous appellerons les sommets A (identique à $a_1\,a_2$), C, B, D, détermine:

1° sur les deux plans dont se compose une surface du faisceau, deux figures liées par une correspondance de Cremona du second ordre à points fondamentaux distincts, par exemple sur les deux plans ACD et BDC des figures aux points fondamentaux

$$A,\quad C,\quad D \quad \text{et} \quad B,\quad D,\quad C$$

correspondant à

$$DC,\ CB,\ BD \quad \text{et à} \quad CD,\ DA,\ AC;$$

2° sur deux faces du tétraèdre $ABCD$ qui se rencontrent le long d'un côté du quadrilatère $ABCD$ deux figures liées par une correspondance de Cremona du second ordre, à deux points fondamentaux confondus (dans chaque figure), par exemple sur les faces ABC et CDA des figures aux points fondamentaux

$$A,\quad B \text{ (double sur } BC) \quad \text{et} \quad C,\quad D \text{ (double sur } DA)$$

correspondant à

$$AD,\ CD \qquad \text{et à } CB,\ AB.$$

On voit encore que 3° le rapport anharmonique des points d'intersection d'une droite mobile de l'une des deux congruences avec les quatre faces du tétraèdre $ABCD$ reste constant. Elle fait donc partie d'un complexe de Reye.

La première et la dernière de ces trois propriétés d'une congruence Hirstienne, qui se rapportent aux quatre plans passant par le quadrilatère $ACBD$, ont été trouvées par M. Hirst à l'endroit cité. La première sert à caractériser la congruence. Nous rappellerons encore que M. Hirst a été conduit à étudier la congruence, parce qu'elle fait partie de la base d'un faisceau de complexes du second ordre engendrés par deux figures correlatives dans deux de ces plans, et parce qu'elle contient les droites singulières de deux de ces complexes.

Si nous considérons toutes les deux congruences formées des tangentes communes à deux surfaces du faisceau, et si des droites de ces deux congruences rencontrent ACD, respectivement, en Z et Z_1, BCD en Z' et Z_1', CAB en U et U_1, DAB en U' et U_1', il faut qu'une des deux équations suivantes ait lieu:

$$(Z_1 Z_1' U_1 U_1') = \begin{cases}(Z Z' U U') \\ (Z Z' U' U).\end{cases}$$

En effet, les deux groupes de quatre points ont les mêmes rapports anharmoniques, et leurs égalités doivent subsister si l'on change à la fois Z contre Z' et Z_1 contre Z_1', ou U contre U' et U_1 contre U_1'.

Or, en faisant sortir les droites des deux congruences du même

point Z du plan ACD, on trouve que l'équation $(ZZ_1' U_1 U_1') = (ZZ'UU')$ exprimerait que le plan des deux droites passe par le point B. Cette conséquence n'étant pas admissible pour un point quelconque Z de ACD, il faut qu'on ait

$$(Z_1 Z_1' U_1 U_1') = (ZZ'U'U) = \frac{1}{(ZZ'UU')}.$$

Les deux congruences appartiennent donc à de différents complexes de Reye, ce qui nous fournit un nouveau moyen d'exécuter la décomposition de la congruence formée des tangentes communes aux deux surfaces.

La relation ayant lieu entre une des figures planes, par exemple celle de ABC, et la figure que déterminent les droites d'une des congruences passant par ses points sur une surface quelconque χ du faisceau est de la même nature que celle qui a lieu entre une projection stéréographique et la figure sur une quadrique qu'elle représente. D sera le point fondamental de χ et correspondra à la droite AB du plan; A et B seront les points fondamentaux de celui-ci et correspondront, respectivement, aux droites DA et DB. —

L'étude précédente des figures projectives sur des surfaces quadriques passant par un quadrilatère gauche et des congruences de Hirst nous permet d'énoncer le théorème général que voici:

Soit donné un polygone fermé dont tous les sommets se trouvent sur des quadriques passant par un quadrilatère gauche, et dont chaque côte est tangent à deux quadriques du même faisceau. Alors il en existera une infinité double, chaque sommet pouvant parcourir la surface où il se trouve, et chaque côté la congruence de Hirst à laquelle il appartient.

Si, en effet, on assujétit un polygone à ces conditions à l'exception de celles qui appartiennent à un des côtés, ce côté joindra les points correspondants de deux figures projectives sur deux des surfaces au même quadrilatère singulier. Il appartient donc à une congruence de Hirst qui est entièrement déterminée par le quadrilatère et par une seule droite. Le polygone donné nous fournit cette dernière.

Ce théoreme étant établi, on voit que, si entre les conditions données on néglige celle qui a rapport à un sommet, les polygones satisfaisant aux autres conditions se fermeront tous, s'il en existe un polygone propre qui le fasse, et que le lieu du sommet libre deviendra une surface du faisceau.

Si tous les sommets se trouvent sur la même surface du faisceau, on pourra changer l'ordre des conditions des différents côtés. En effet, les conditions, sous lesquelles les polygones se ferment, sont que, dans chaque série de génératrices, le produit des rapports anharmoniques, ξ_1 ou ξ_2, déterminant successivement les génératrices passant par les sommets, soit égal à l'unité.

Si l'on change les rapports anharmoniques appartenant aux deux

séries de génératrices, on voit qu'en substituant à toutes les congruences Hirstiennes auxquelles doivent appartenir les côtés celles qui sont tangentes aux mêmes deux surfaces, on aura de nouveau des polygones fermés. — Indiquons comme exemple de polygones se fermant d'eux mêmes des polygones à un nombre pair de côtés où à chaque côté correspond un autre qui appartient à la même congruence et qui joint, en sens inverse, des points correspondants des mêmes figures projectives sur la surface.

Pour trouver aussi *la surface focale de la congruence*, de l'ordre 4 et de la classe 2, *formée des droites joignant les points homologues* X *et* X' *de deux figures projectives de la seconde espèce* sur une quadrique χ, nous remarquerons que la droite XX' est la droite d'intersection des plans $x_1 x_2'$ et $x_2 x_1'$ qui joignent les génératrices de différentes espèces passant part X et X'. Elle est donc tangente aux enveloppes de ces plans.

Les séries des génératrices x_1 et x_2' étant homographiques, le lieu de leurs points d'intersection sera une section plane; car la section qui en contient trois doit en contenir une infinité. L'enveloppe des plans $x_1 x_2'$ sera donc le cône circonscrit a χ qui a cette section pour courbe de contact. L'enveloppe de $x_2 x_1'$ se détermine de la même manière.

La surface focale est donc composée de deux cônes φ *et* ψ *circonscrits à la surface donnée.**) Les deux points d'intersection des courbes de contact seront les points de coïncidence des figures projectives, et les plans dès coniques d'intersection des deux cônes contiendront les coniques qui correspondent à elles-mêmes.

La congruence complète formée des tangents communes à φ et ψ est composée des droites XX' dont nous nous occupons et des droites contenues aux plans tangents communs aux deux cônes.

Dans le cas d'involution les deux cônes ce confondent, et les droites XX' passent par leur sommet. La congruence d'ordre 4 et de la classe 2 contient alors deux fois chacune de ces droites, et une fois chaque tangente à χ en un point de sa courbe de contact avec les cônes confondus.

Réciproquement, les tangentes communes à deux cônes, φ et ψ, circonscrits á une surface χ du second ordre, rencontreront χ aux points correspondants de deux figures projectives de la seconde espèce.

En effet, si l'on construit sur χ deux figures projectives de la seconde espèce qui aient pour points de coïncidence les points d'intersection des courbes de contact des deux cônes circonscrits, et pour

---

*) C'est évident que les cônes sont imaginaires, si les génératrices de la surface χ sont imaginaires et si les figures projectives sont réelles.

points correspondants, les points d'intersection d'une seule des tangentes communes, les droites joignant toutes les couples de points correspondants seront tangentes à deux cônes circonscrits. Ceux-ci doivent être identiques à φ et ψ, parce que leurs sommets sont déterminés par les plans tangents aux points de coïncidence et par l'un et l'autre des plans tangents passant par leur tangente commune donnée.

Soit donné un polygone inscrit à une surface quadrique χ et dont les côtes sont tangents, en partie à des couples de quadriques passant par un seul quadrilatère gauche sur χ, en partie à des couples de cônes circonscrits dont les courbes de contact passent par l'une ou l'autre des couples de sommets opposés du quadrilatère. Soit supposé encore que, si l'on néglige les côtés de la première sorte, se suivent partout un nombre pair de côtés tangents à des cônes dont les courbes de contact passent par la même couple de sommets opposés. Alors je dis qu'il existe une infinité double de polygones satisfaisant à ces mêmes conditions.

En effet, si l'on fait varier le polygone en négligeant les conditions imposées à un des côtés, il leur satisfera de lui-même.

On parvient au *cas général des polygones, fermés et variables, restant inscrits à une surface du second ordre, et circonscrits à une série de couples d'autres surfaces quadriques passant par des quadrilatères de la première, et de cônes circonscrits à elle*, en considérant des polygones ouverts et inscrits dont chaque côté est tangent à une de ces couples. Le côté fermant un tel polygone joint entre eux les points correspondants des deux figures projectives, de première ou de seconde espèce suivant que le nombre des côtés tangents à deux cônes est pair ou impair. Il restera tangent, pendant toutes les variations du polygone, dans le premier cas, à deux quadriques passant par un quadrilatère gauche de la quadrique donnée, et, dans le second, à deux cônes circonscrits à elle. Ces deux quadriques ou cônes sont faciles à construire si l'on connaît trois des polygones ouverts.

§ III.

Extension de la propriété métrique des cycles.

Soit $A'B'C' \ldots N'$ un polygone fermé et variable, inscrit à une surface quadrique χ, et circonscrit à une série de couples, α_1 et α_2, β_1 et β_2, ..., ν_1 et ν_2 d'autres surfaces quadriques passant, toutes deux, par un quadrilatère de χ, et de cônes circonscrits à χ, et désignons

les points de contact par A_1, A_2; B_1, B_2; ...; N_1, N_2. Alors la quantité

$$\frac{A'A_1 \,.\, A'A_2}{B'A_1 \,.\, B'A_2} \cdot \frac{B'B_1 \,.\, B'B_2}{C'B_1 \,.\, C'B_2} \cdots \frac{N'N_1 \,.\, N'N_2}{A'N_1 \,.\, A'N_2} = x$$

restera constante pendant la variation du polygone.

Il suffit de montrer que x restera constant si A' parcourt une génératrice de χ, ce que feront alors aussi les autres sommets. En effet, dans le cas où A' peut parcourir toute la surface, un déplacement quelconque de A' peut être composé de déplacements successifs sur deux génératrices, et dans le cas où A' ne peut se mouvoir que sur une conique on peut former du polygone un nouveau dont le point A' peut parcourir toute la surface, en ajoutant un côté qui passe par le pôle du plan de la conique; tant que A' reste sur celle-ci le facteur correspondant au côté ajouté est égal à 1.

Nous montrerons donc que x ne peut se réduire à zéro pendant un mouvement des sommets $A', B', \ldots N'$ sur des génératrices $a, b, \ldots n$ de χ.

Soient, premièrement, α_1 et α_2 des quadriques passant par un quadrilatère de χ. Alors nous avons vu que A_1 et A_2 parcourront des génératrices de α_1 et α_2 au même temps que A' parcourt une génératrice de χ, et que ces trois droites appartiennent à la même série de génératrices d'une autre quadrique. A' ne coïncide donc jamais, ni avec A_1 ni avec A_2.

Si α_1 et α_2 sont des cônes circonscrits à χ, l'une des courbes de contact, disons celle avec α_1, contient le point d'intersection de a avec b. En même temps que A' se trouve en ce point, B' se trouvera dans le point d'intersection de b avec la droite qui y correspond dans la figure (B'), la droite b étant regardée comme appartenant à la figure (A'). Alors la droite $A'B'$ coïncide avec b, le point A' avec A_1 et B' avec A_2, et en considérant une droite $A'B'$ dans une position voisine on s'assure sans aucune difficulté que la valeur limite de $\frac{A'A_1}{B'A_2}$ est différente de zéro. De même si A' se trouve sur la courbe de contact du cône α_2, la droite $A'B'$ coïncidera avec a, le point B' avec A_1, et la valeur limite de $\frac{A'A_2}{B'A_1}$ sera différente de zéro.

$\frac{A'A_1 \,.\, A'A_2}{B'A_1 \,.\, B'A_2}$ ne peut donc s'évanouir que lorsque B' s'éloigne à l'infini, et alors $\frac{B'B_1 \,.\, B'B_2}{B'A_1 \,.\, B'A_2} = 1$.

En appliquant les mêmes considérations aux autres facteurs de x, on voit que cette quantité reste constante.

Pour déterminer ensuite la valeur de x nous rappelons que la dépendance de deux figures projectives sur une surface quadrique peut être établie par des projections centrales successives, quatre ou, dans

un cas particulier, deux, si la projectivité est de la première espèce, et trois ou, dans le cas d'involution, une, si la projectivité est de la seconde espèce. Alors il existera une infinité double de polygones inscrits dont un côte joint les points correspondants des deux figures, et les autres passent par les centres de projection.

Commençons par supposer qu'il existe entre les figures (A' et B') une projectivité générale de la seconde espèce, et que par conséquent α_1 et α_2 sont des cônes circonscrits à χ, et désignons par P, Q et R les centres de trois projections par lesquelles on peut établir la correspondance des figures. Comme les deux cônes circonscrits appartenant à des figures projectives dont l'une est la projection de l'autre se confondent dans celui qui a pour sommet le centre de projection, et que leurs tangentes communes passent par ce point, les polygones fermés $A'Q'R'B'A'$ inscrits à χ et circonscrits à $PQR\,(\alpha_1\,\alpha_2)$ satisferont à la condition suivante

$$\left(\frac{A'P}{Q'P}\right)^2 \cdot \left(\frac{Q'Q}{R'Q}\right)^2 \cdot \left(\frac{R'R}{B'R}\right)^2 \cdot \frac{B'A_1 \,.\, B'A_2}{A'A_1 \,.\, A'A_2} = \text{constant.}$$

Considérons pour déterminer cette valeur le cas particulier où Q', R' et B' se confondent au point de contact d'un plan tangent passant par QR. La quantité à déterminer se réduit alors à

$$\left(\frac{A'P}{B'P}\right)^2 \cdot \frac{B'A_1 \,.\, B'A_2}{A'A_1 \,.\, A'A_2},$$

où $A'B'$ est une des quatre tangentes communes à α_1 et α_2 qui passent par P. On peut éviter la question du choix entre ces tangentes, qui n'est pas libre, par un choix convenable de P.

Tant que Q et R ne sont pas encore déterminés, P n'est assujéti qu'à la condition de se trouver dans un des deux plans dont les sections correspondent à elles-mêmes dans les figures projectives (A') et (B'), ou bien dans un des plans qui contiennent les courbes d'intersection des deux cônes. Plaçons le sur la droite d'intersection de ces plans. Alors chacune des tangentes qu'on peut mener de P à α_1 et α_2 a pour point de contact avec tous les deux cônes un point de l'une ou de l'autre de leurs coniques d'intersection. Comme celles-ci ont deux contacts avec la conique où leur plan rencontre la surface χ, et que, dans les deux cas, le point P se trouve sur la corde de contact, P et le point où A_1 et A_2 se confondent sont conjugués harmoniques par rapport à A' et B'. On a donc dans ce cas

$$\left(\frac{A'P}{B'P}\right)^2 \cdot \frac{B'A_1 \,.\, B'A_2}{A'A_1 \,.\, A'A_2} = 1.$$

Cette même valeur appartiendra donc à tous les quadrilatères $Q'R'B'A'Q'$.

En multipliant la valeur de x par cette quantité égale à l'unité on substitue dans son expression

$$\left(\frac{A'P}{Q'P}\right)^2 \cdot \left(\frac{Q'Q}{R'Q}\right)^2 \cdot \left(\frac{R'R}{B'R}\right)^2 \quad \text{à} \quad \frac{A'A_1 \,.\, A'A_2}{B'A_1 \,.\, B'A_2}.$$

On voit donc que les trois côtés de $A'Q'R'B'$, passant par les trois points P, Q, R, qui établissent la même dépendance entre A' et B' que les tangentes $A'B'$ communes à α_1 et α_2 peuvent aussi remplacer celles-ci dans l'expression cherchée de x.

Passons ensuite aux facteurs de x qui proviennent des côtés du polygone variable appartenant à un complexe de Hirst. Soit $M'N'$ un de ces côtés, μ_1 et μ_2 les surfaces, passant par un quadrilatère $ACBD$, auxquelles il doit être tangent, et M_1 et M_2 les points de contact. Alors, comme $(M'N'M_1M_2) = -1$, on aura le facteur

$$\frac{M'M_1 \,.\, M'M_2}{N'M_1 \,.\, N'M_2} = -\left(\frac{M'M_1}{N'M_1}\right)^2.$$

où M_1 peut être le point de contact avec l'une ou l'autre des deux surfaces dont se compose la surface focale de la congruence.

Le plus commode sera ensuite de s'occuper, au lieu de x, d'une quantité x' qu'on en forme en changeant le signe de tout facteur correspondant à un côté appartenant à une congruence de Hirst, ou bien en substituant

$$\left(\frac{M'M_1}{N'M_1}\right)^2 \quad \text{à} \quad \frac{M'M_1 \,.\, M'M_2}{N'M_1 \,.\, N'M_2}.$$

Commençons par le cas particulier où l'une des deux surfaces se réduit aux deux plans ACD et BCD. Alors le point M_1 pourra être le point d'intersection de $M'N'$ avec la droite CD, et les figures projectives de la première espèce, (M') et (N'), présenteront la particularité que les sections planes passant par C et D correspondent à elles-mêmes. Leur dépendance pourra être établie par deux projections successives de la surface sur elle-même. Les centres de projection P et Q seront deux points de la droite CD.

Pour démontrer que la même substitution de ces projections à la congruence joignant les points correspondants peut aussi se faire dans l'expression de x', il faut faire voir que, si Q' est le point d'intersection de $M'P$ et $N'Q$,

$$\left(\frac{M'P}{Q'P}\right)^2 \cdot \left(\frac{Q'Q}{N'Q}\right)^2 \cdot \left(\frac{N'M_1}{M'M_1}\right)^2 = 1.$$

Cette relation résulte immédiatement du fait que les points M_1, P et Q se trouvent sur la droite CD.

Dans le cas général où aucune des deux surfaces, μ_1 et μ_2, ne se réduit à deux plans on peut remplacer la congruence de Hirst joignant les points correspondants M' et N', par deux autres congruences qui sont de la nature plus spéciale dont je viens de parler. En effet, on peut déterminer sur la surface donnée χ une figure (P') projective, de

la première espèce, à (M'), ayant avec elle les mêmes points de coïncidence A, B, C, D que (M') et (N') et déterminée encore de telle manière qu'à un point donné M' corresponde un point d'intersection P' de $AM'B$ et $CN'D$, où N' est le point correspondant au point donné M' dans la projectivité donnée. Alors, dans les figures (M') et (P'), toutes les sections planes passant par A et B correspondront à elles-mêmes, et (P') et (N') seront des figures projectives de la première espèce où toutes les sections planes passant par CD correspondent à elles mêmes.

Pour introduire la même substitution des deux congruences particulières des droites $M'P'$ et $P'N'$ à la congruence donnée des droites $M'N'$ dans l'expression de x', il faut prouver que

$$\left(\frac{M'P_1}{P'P_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{P'N_1}{N'N_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{N'M_1}{M'M_1}\right)^2 = 1,$$

où nous avons appelé le point d'intersection de $M'P'$ et AB P_1 et le point d'intersection de $P'N'$ et CD N_1.

La justesse de cette relation résulte de la circonstance que la droite P_1N_1 passe par un des points de contact M_1 et M_2 de $M'N'$ avec les surfaces μ_1 et μ_2. Ces points sont, en effet, les points doubles de l'involution déterminée sur $M'N'$ par l'intersection avec les surfaces passant par le quadrilatère $ABCD$, ou bien avec leurs courbes d'intersection avec le plan $M'N'P'$. Les points M' et N' forment une couple de cette involution. Une autre est formée des points d'intersection de $M'N'$ avec les traces des plans ACD et BCD. Ces traces, qui joignent la trace N_1 de CD aux points d'intersection, M et P, d'une droite, passant par P_1, avec la conique (χ), trace de la surface χ, forment aussi une couple de l'involution qu'on obtiendrait en faisant pivoter la corde MP sur le point P_1; car les points P_1 et N_1 sont conjugués par rapport à (χ). Or, comme P_1 se trouve sur le côté $M'P'$ du triangle inscrit $M'P'N'$ les droites N_1M' et N_1N' forment aussi une couple de cette involution. La droite N_1P_1 est une de ses rayons doubles. Il faut donc que cette droite passe aussi par un point double de l'involution formée des points d'intersection de $M'N'$ avec les surfaces du faisceau. Soit M_1 ce point double.

A cette démonstration se joint un intéressant *corollaire sur les congruences de Hirst*. L'autre rayon double de l'involution des couples de droites N_1M et N_1P sera la droite joignant N_1 au troisième sommet O du triangle N_1OP_1 conjugué à lui-même par rapport à toutes les coniques du faisceau. N_1O passera donc par l'autre point de contact M_2 de $M'N'$ avec une surface du faisceau μ_2. On démontre de la même manière que P_1O passe par ce point. M_2 coïncide donc avec le point O.

Les points N_1, P_1 et O sont les points d'intersection de côtés

opposés du quadrigone formé des traces du quadrilatère $ACBD$. Le point O sera celui où se rencontrent les droites joignant les traces de côtés opposés de ce quadrilatère. La surface du faisceau passant par ce point, ou bien la surface μ_2, aura donc ces deux droites pour génératrices. Le plan $M'N'P'$ y est donc tangent en ce point.

En nous rappelant la détermination du plan $M'N'P'$ et celle du point M_1, nous aurons donc démontré le théorème suivant:

Soit donné un quadrilatère gauche $ACBD$ et une droite l; désignons par M' et N' ses points d'intersection avec une surface quadrique quelconque χ qui passe par $ACBD$, et par P' un des points où la droite d'intersection des plans ABM' et CDN' rencontre χ; alors le plan joignant l à P' sera tangent à l'une des deux surfaces qui passent par $ACBD$ et sont tangentes à l; et le point de contact de l'autre se trouvera sur la droite joignant les points d'intersection du même plan avec les droites AB et CD. L'autre point d'intersection P'' de la droite d'intersection des plans ABM' et CDN' avec χ, détermine de la même manière le plan tangent de la dernière surface et le point de contact du premier. On voit encore que les deux plans tangents passent aussi par les points d'intersection de χ avec la droite d'intersection des plans ABN' et CDM'.

Ce qui est remarquable ici, au point de vue algébrique, c'est que l'équation du second degré servant à déterminer les deux surfaces du faisceau qui sont tangentes à l devient réductible par l'adjonction des points d'intersection de χ avec la droite d'intersection des plans ABM' et CDN'. —

Revenons au but principal de la recherche actuelle. Nous avons vu qu'un côté $M'N'$ du polygone variable, inscrit à χ, qui appartient à une congruence générale de Hirst peut être remplacé par deux autres qui ont la particularité de rencontrer, l'une la droite AB, l'autre la droite CD. Nous avons encore vu que chacun de ces derniers côtés peut être remplacé par deux autres qui passent par des points fixes, et que, de même, chaque côté tangent à deux cônes circonscrits peut être remplacé par trois autres qui passent par des points fixes. Si l'on applique ces substitutions à tous les côtés, la suite de points fixes formera un cycle complet.

Nous avons vu encore que la valeur de x' ne sera pas changée par ces substitutions. Or il à été prouvé dans le § 1 de cet article que la valeur de x' qui correspond à un cycle complet, étant égale au carré du produit des rapports des distances des sommets du polygone aux points fixes des côtés, est égale à l'unité. On aura donc $x' = 1$, et nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Soit $A'B' \ldots N'A'$ un polygone variable, inscrit à une quadrique χ et déterminé de telle manière qu'en même temps que A' parcourt la

surface les autres sommets parcourront des figures projectives; soit la correspondance de A' et B' prise comme exemple des projectivités de la seconde espèce, A_1 et A_2 étant les points de contact de $A'B'$ avec les deux cônes circonscrits qui y appartiennent; soit enfin la correspondance de M' et N' prise comme exemple des projectivités de la première espèce, M_1 étant le point de contact avec une des quadriques passant par un quadrilatère de χ qui y appartiennent; alors on aura

$$\Pi_2 \frac{A'A_1 . A'A_2}{B'A_1 . B'A_2} \cdot \Pi_1 \left(\frac{M'M_1}{N'M_1}\right)^2 = 1$$

où les produits Π_2 et Π_1 sont étendues à tous les côtès joignant des points des figures projectives de la seconde ou de la première espèce.

Tous les facteurs de Π_1 sont quadratiques. Ceux de Π_2 le deviennent dans le cas particulier où les deux cônes coïncident, ou bien si le côté doit passer par un point fixe. Si Π_2 ne contient que des facteurs de cette espèce on peut en extraire la racine carrée. Le signe qu'il faut donner alors à la racine 1 du second membre dépend des choix entre les deux points de contact des côtés $M'N'$*).

Le 16 avril 1885.

---

*) Je me permets d'ajouter ici une citation qui aurait dû trouver place dans le memoire. M. Voss, dans son mémoire sur les substitutions orthogonales (Mathematische Annalen XIII), s'est occupé avant moi de figures projectives sur une quadrique, et déjà en 1853 M. Cayley a observé que les droites joignant les points correspondants de deux figures projectives de la première espèce sont tangentes à deux surfaces quadriques (Phil. Magazine 1853, VI, 326; cité d'après M. Voss, Math. Ann. XIII).

Ueber den Cayley'schen Schnittpunktsatz.

Von

I. Bacharach in Erlangen.

Einleitung.

Die zumeist auf Constantenzählung gegründeten Beweise der Schnittpunktsätze lassen noch gerechte Zweifel über deren allgemeine Gültigkeit bestehen, sind desshalb, wie sogleich gezeigt werden soll, zu verwerfen, und die daraus hervorgehenden Sätze selbst bedürfen wesentlicher Modificationen.

Durch Abzählen der in einer Function n^{ten} Grades enthaltenen Constanten beweist man den Satz:

„*Eine Curve n. Ordnung ist durch*

$$\frac{1}{2}n(n+3)$$

Punkte bestimmt."

Bei besonderer Lage dieser Punkte gilt jedoch das ausgesprochene Theorem nicht mehr, und es giebt ganze Schaaren von Curven n. Ordnung, die durch jene Gruppe von $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkten hindurchgehen.

In bekannter Weise wird aus dem angeführten Satze der folgende Schnittpunktsatz abgeleitet:

(I) „*Eine Curve n. Ordnung, welche durch*

$$\frac{1}{2}n(n+3)-1$$

Schnittpunkte zweier anderen Curven n. Ordnung hindurchgeht, enthält auch die

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

weiteren Schnittpunkte der letzteren."

Eine Erweiterung dieses Satzes bildet der folgende von Cayley ebenfalls durch Constantenzählung abgeleitete Satz:*)

*) Vergl. Cambridge, Math. Journal, vol. 3, 1843, p. 211.

(II) *„Jede Curve von der Ordnung r ($r \geq m$ und $r \geq n$; $r \leq m+n-3$), welche durch alle bis auf*

$$\frac{1}{2}(m+n-r-1)(m+n-r-2)$$

von den mn Durchschnittspunkten zweier Curven von den Ordnungen m und n hindurchgeht, enthält auch diese übrigen Schnittpunkte.“

Während man nun weiss, dass Satz (I) zu gelten aufhört, sobald die in Rede stehenden $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Punkte auf einer Curve $(n-3)$. Ordnung liegen, sind von dem *allgemeineren* Cayley'schen Satze *noch keine Criterien für Ausnahmefälle* bekannt, wiewohl deren nothwendig bestehen müssen, was auch aus folgender Ueberlegung hervorgeht:

Die Gleichung einer jeden Curve r. Ordnung lässt sich offenbar in die Form bringen:

$$C_r \equiv A_{r-m} C_m + B_{r-n} C_n + \lambda' C_r' + \lambda'' C_r'' + \cdots + \lambda^{(\varrho)} C_r^{(\varrho)} = 0,$$

wo die C, $= 0$ gesetzt, gegebene Curvengleichungen, ihre Indices deren Ordnungen, ferner $A = 0$ und $B = 0$ willkürliche Curven, endlich die ϱ Grössen λ willkürliche Constanten bedeuten, wenn noch

$$\varrho = \frac{1}{2} r(r+3) - \frac{1}{2}(r-m)(r-m+3) - \frac{1}{2}(r-n)(r-n+3) - 1$$

ist (wo $r < m+n$). Denn alsdann enthält die homogen geschriebene linke Seite genau $\frac{1}{2} r(r+3) + 1$ Constanten, die gerade zur Bestimmung der C_r ausreichen. Wenn nun diese durch ϱ Schnittpunkte der C_m mit der C_n hindurchgeht, so erhält man ϱ lineare und homogene Bedingungsgleichungen für die ϱ Grössen λ; wenn daher die Determinante der C_r', C_r'' . . . $C_r^{(\varrho)}$ geschrieben in den Coordinaten jener ϱ Punkte nicht verschwindet, so verschwinden sämmtliche λ, also verschwindet die ganze linke Seite obiger Gleichung auch noch für die Coordinaten der übrigen Schnittpunkte der C_m und C_n, mithin geht die C_r durch dieselben. Nun wird aber auch:

$$\varrho = mn - \frac{1}{2}(m+n-r-1)(m+n-r-2),$$

womit wir einen Beweis für den von Cayley ausgesprochenen Satz erbracht hätten.

Aber es darf nicht unbeachtet bleiben, dass in besonderen Fällen jene Determinante der C_r verschwinden kann, alsdann werden alle oder doch einige der Grössen λ von Null verschieden sein, womit die Möglichkeit von Ausnahmefällen des Cayley'schen Satzes erwiesen ist.

Dagegen kann man ohne Bedenken dem Cayley'schen Satze die folgende Fassung geben:

„Von den mn linearen Bedingungsgleichungen, welchen die Coefficienten der Gleichung einer durch das ganze Schnittpunktsystem zweier Curven von den Ordnungen m und n hindurchgehenden Curve r. Ordnung genügen müssen, sind

$$\frac{1}{2}(m+n-r-1)(m+n-r-2)$$

eine lineare Folge der übrigen.“

Jedoch welche dies sind, das bleibt einer weiteren Untersuchung überlassen.

Besondere Erwähnung verdient noch ein Schnittpunktsatz, der, nach dem unten zu erwähnenden rein algebraischen Beweise, *ohne jede Ausnahme* gilt, obgleich bei Anwendung des üblichen Beweises durch Constantenzählung die *Möglichkeit* von Ausnahmefällen nicht ausgeschlossen bleibt. Es ist der Satz:

„Wenn von den np Schnittpunkten einer Curve n. Ordnung mit einer Curve p. Ordnung pq auf einer Curve q. Ordnung liegen, so liegen die übrigen $p(n-q)$ Schnittpunkte auf einer Curve $(n-q)^{ter}$ Ordnung.“

Und das Gleiche gilt sogar, wie sich später herausstellen wird, für den speciellen Fall des Cayley'schen Satzes, in dem $r=m+n-3$ angenommen wird. —

Diese Ausführungen mögen genügen, um die Mangelhaftigkeit der Constantenzählung zum Beweise der Schnittpunktsätze darzuthun, und trotzdem ist vielfach von denselben gerade in der Form, welche nicht ausnahmslos gilt, Anwendung gemacht worden.

Zweck vorliegender Arbeit ist es nun, durch Benützung anderer strengerer Beweismethoden, welche sich auf die algebraischen Theorien von Herrn Noether (Math. Ann. VI) und der Herren Brill und Noether (Math. Ann. VII) stützen, jene Lücke in den Schnittpunktsätzen auszufüllen d. h. die Grenzen der Gültigkeit derselben aufzusuchen und die sich ergebenden Ausnahmefälle besonders zu behandeln. Im wesentlichen ist die Abhandlung nur eine Umarbeitung des ersten Theils meiner Inauguraldissertation*), welche aber insofern eine Erweiterung erfahren hat, als die Mannigfaltigkeit der Curven r. Ordnung, welche durch das Schnittpunktsystem einer Curve m. mit einer Curve n. Ordnung oder nur durch einen Theil desselben hindurchgehen, bestimmt wird. Ferner ist ein zweiter Beweis des Cayley'schen Satzes hinzugefügt und endlich ist gezeigt worden, dass die Grenzen, innerhalb welcher sich die Zahlen r, m und n dieses Satzes bewegen dürfen, einer gewissen Erweiterung fähig sind.

Wenn wir hier unsere Untersuchung auf Curven mit nur ein-

*) Ueber Schnittpunktsysteme algebraischer Curven, Erlangen 1881.

fachen Schnittpunkten beschränken, so geschieht dies lediglich der Einfachheit der Darstellung wegen, und wir bemerken, dass eine Ausdehnung der erhaltenen Sätze auf Curven mit gemeinsamen vielfachen Punkten, wie im II. Theile der Dissertation gezeigt ist, keine wesentliche Schwierigkeit bietet.

§ 1.

Fundamentalsatz.

Von fundamentaler Bedeutung für die ganze Untersuchung ist der bekannte Satz der Algebra:

„*Verschwindet eine ganze, nicht homogene Function* f *von* x *und* y *für alle Werthsysteme* x, y, *welche zwei ganze Functionen* φ *und* ψ *zu* 0 *machen, so ist* f *von der Form*

$$f \equiv A\varphi + B\psi,$$

wo A *und* B *ebenfalls ganze Functionen von* x *und* y *sind.*“ *)

Wenn daher eine Curve $f = 0$ durch sämmtliche Schnittpunkte zweier Curven $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ hindurchgeht, so lässt sich ihre Gleichung in die Form setzen:

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0,$$

wo $A = 0$ und $B = 0$ ebenfalls Curven bedeuten. (Immer vorausgesetzt, dass die gemeinsamen Punkte der Curven $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ keine vielfachen Punkte sind.**)

Seien f, φ und ψ beziehungsweise von den Ordnungen n, p und q ($n \geqq p$ und $n \geqq q$), so sind zufolge obiger Identität die Curven $A = 0$ und $B = 0$ von den resp. Ordnungen $n - p$ und $n - q$. Da nun für die Coordinaten der np Schnittpunkte von f mit φ diese Ausdrücke verschwinden, so muss für ebendieselben auch $B\psi = 0$ identisch erfüllt sein. Nun verschwindet aber ψ nur für die Coordinaten von pq jener np Schnittpunkte, also muss für diejenigen der $p(n - q)$ übrigen $B = 0$ befriedigt werden. Wir können somit den Fundamentalsatz auch folgendermassen aussprechen:

„*Wenn von den* np *Schnittpunkten einer Curve* n. *Ordnung mit einer Curve* p. *Ordnung* pq *auf einer Curve* q. *Ordnung liegen, so liegen die übrigen* $p(n - q)$ *Schnittpunkte auf einer Curve* $(n - q)^{\text{ter}}$ *Ordnung.*“

Dieser Satz gilt *ausnahmslos*, also unabhängig von der Lage jener $p(n - q)$ Punkte und natürlich auch, wenn f zerfällt; sämmtliche

*) Der strenge Beweis dieses Satzes ist von Herrn Noether, Math. Ann. Bd. VI, p. 354 geführt worden,

**) Diese im übrigen unnöthige Beschränkung machen wir, weil im Folgenden nur von dem speciellen Fall einfacher Schnittpunkte die Rede sein soll.

Beweise durch Constantenzählung sind zu verwerfen, da sie die Frage über die allgemeine Gültigkeit jener Sätze unentschieden lassen und weil aus denselben nicht geschlossen werden kann, dass die Curve f sowohl als auch insbesondere die Curve φ zerfallen darf.

Bemerkenswerth ist der specielle Fall $p = n$, der vielfache Anwendung findet.

§ 2.

Der Restsatz*).

Durch Q Punkte einer Curve F von der Ordnung p seien die Curven Φ von der Ordnung q_1 und Ψ von der Ordnung q_2 hindurchgelegt, von denen erstere noch weitere R, letztere noch R' Punkte aus F ausschneiden möge.

Wir bezeichnen die Gruppe der Q Punkte mit G_Q, die der R Punkte auf Φ mit G_R und die der R' Punkte auf Ψ mit $G_{R'}$, nennen ferner zwei Gruppen wie G_Q und G_R oder G_Q und $G_{R'}$, welche zusammen das vollständige Schnittpunktsystem von F mit irgend einer andern Curve bilden, zu einander *residual*, endlich zwei Gruppen, wie G_R und $G_{R'}$, welche zu einer und derselben dritten G_Q residual sind, zu einander *corresidual*. Wenn wir nun noch durch die Gruppe G_R eine Curve A der r. Ordnung legen, welche F in weiteren Q' Punkten schneiden möge, so finden wir, dass von den $(q_2 + r)\,p$ Schnittpunkten einer (zerfallenden) Curve $A\Psi$ der $(q_2 + r)^{\text{ten}}$ Ordnung mit einer Curve F der p. Ordnung pq_1 auf einer Curve Φ der q_1^{ten} Ordnung liegen; der Fundamentalsatz berechtigt daher zu dem Schlusse, dass die übrigen $p(r + q_2 - q_1)$ Schnittpunkte auf einer Curve B der Ordnung $r + q_2 - q_1$ liegen. Es muss daher die von A auf F ausgeschnittene zu G_R residuale Gruppe $G_{Q'}$ von $pr - R$ Punkten mit der Gruppe $G_{R'}$ auf einer Curve B liegen, oder die beiden Punktgruppen G_R und $G_{R'}$ sind corresidual nicht bloss in Bezug auf die Gruppe G_Q, sondern auch in Bezug auf die zu $G_{R'}$ residuale Gruppe $G_{Q'}$.

Auf Φ	liegen	die	Gruppen	G_Q	und	G_R;
„ Ψ	„	„	„	G_Q	„	$G_{R'}$;
„ A	„	„	„	G_R	„	$G_{Q'}$;
mithin auf B	„		„	$G_{Q'}$	„	$G_{R'}$.

Wenn wir uns der oben definirten Bezeichnungen bedienen, so können wir den Restsatz in folgender Weise aussprechen:

„*Sind auf einer algebraischen Curve F die Punktgruppen G_R und $G_{R'}$ einander corresidual in Bezug auf eine Punktgruppe G_Q, so sind sie es auch in Bezug auf jede andere $G_{Q'}$, welche zu einer von ihnen (etwa G_R) residual ist*“.

---

*) Wegen des Folgenden vergl. man: Brill und Noether, Math. Ann. Bd. VII, p. 271 ff.

Die Bedeutung des Restsatzes liegt darin, dass man gewisse Punktgruppen definiren kann unabhängig von der durch sie hindurchgehenden Curve. Um dies einzusehen, denken wir uns auf einer Curve F eine ganze Schaar g_Q von Punktgruppen von je Q Punkten, welche zu einander in Bezug auf die Punktgruppe G_R corresidual sind. Legt man jetzt durch eine beliebige Gruppe G_Q der Schaar g_Q eine beliebige Curve, welche auf F noch eine weitere Gruppe $G_{R'}$ von R' Punkten ausschneiden möge, so ist die Schaar g_Q auch corresidual in Bezug auf $G_{R'}$, d. h. sie ist auch durch Curven ausschneidbar, welche alle durch die Gruppe $G_{R'}$ gehen. Die Schaar g_Q ist überhaupt corresidual in Bezug auf jede Gruppe G_ϱ, welche zu irgend einer Gruppe der Schaar residual ist.

Als Beispiel für die Verwendbarkeit des Restsatzes zum Beweis der Schnittpunktsätze möge das Chasles'sche Theorem entwickelt werden. Dasselbe lautet:

„Fallen von einem Curvenbüschel der n. Ordnung die n^2 Basispunkte auf eine Curve $C_{(n+n')}$ der $(n+n')^{\text{ten}}$ Ordnung, so giebt es immer einen zu jenem Curvenbüschel der n. Ordnung projectivischen Curvenbüschel der n'. Ordnung, dessen Basispunkte ebenfalls auf die Curve $C_{(n+n')}$ fallen, und welcher mit jenem durch den Durchschnitt der entsprechenden Elemente die Curve $C_{(n+n')}$ erzeugt.“*)

Zum Beweise legen wir durch die n^2 Basispunkte eines Curvenbüschels n. Ordnung eine Curve der $(n+n')^{\text{ten}}$ Ordnung und wählen letztere als Grundcurve F. Der Curvenbüschel schneidet nun auf F eine einfach unendliche corresiduale Schaar $g_{nn'}$ von je nn' Punkten aus, von der zu zeigen ist, dass sie auch durch eine Curvenschaar der n'^{ten} Ordnung ausgeschnitten werden kann, deren n'^2 Basispunkte ebenfalls auf der Curve F liegen. Dies ist aber immer möglich, da wir durch eine beliebige Gruppe $G_{nn'}$ der Schaar $g_{nn'}$ eine Curve der n'. Ordnung legen können, wodurch wir eine weitere zu $G_{nn'}$ residuale Gruppe $G_{n'^2}$ von n'^2 Punkten auf F erhalten. Diese sind zufolge des Restsatzes die Basispunkte des gesuchten Curvenbüschels der n'. Ordnung. Dass man durch die Gruppe $G_{nn'}$ immer eine Curve n'^{ter} Ordnung legen kann, selbst wenn

$$nn' > \frac{n'(n'+3)}{2},$$

ergiebt sich aus dem Umstand, dass von den $(n+n')n$ Schnittpunkten der $C_{(n+n')}$ mit derjenigen Curve n. Ordnung, welche die Gruppe $G_{nn'}$ ausschneidet, n^2 auf einer andern Curve n. Ordnung liegen (sogar

*) Chasles, Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géometriques de tous les ordres. (Comptes rendus, 28. décembre 1857).

auf unendlich vielen); alsdann liegen nämlich die übrigen nn' Schnittpunkte, das sind die Punkte der Gruppe $G_{nn'}$, nach dem Fundamentalsatze, auf einer Curve der n'^{ten} Ordnung.

§ 3.

Der Cayley'sche Satz.

In seiner gewöhnlichen Form lautet derselbe:

„*Jede Curve von der Ordnung r*

(für $r \geqq m$ und $r \geqq n$, $r \leqq m + n - 3$),

welche durch alle bis auf

$$\frac{1}{2}(m + n - r - 1)(m + n - r - 2)$$

von den Durchschnittspunkten zweier Curven von den Ordnungen m und n hindurchgeht, enthält auch alle diese übrigen Schnittpunkte."

Zur Untersuchung desselben führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$m + n - r = \gamma,$$

$$\frac{1}{2}(\gamma - 1)(\gamma - 2) = \delta;$$

endlich sei $n \geqq m$.

Wir wählen nun die Curve m. Ordnung als Grundcurve F und schneiden dieselbe durch diejenige Curvenschaar r. Ordnung, welche durch die $mn - \delta$ festen Punkte auf F hindurchgeht. Zu dieser Schaar gehört sowohl die gegebene Curve r. Ordnung, als auch die in die gegebene Curve n. Ordnung und eine beliebige Curve $(r-n)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallende Curve r^{ter} Ordnung. Wir untersuchen jetzt die zu den $mn - \delta$ festen Punkten residualen Punktgruppen von je $m(r - n) + \delta$ Punkten, die von der betrachteten Curvenschaar ausgeschnitten werden. Gelingt es, nachzuweisen, dass δ Punkte fest, d. h. allen Gruppen gemeinsam sind, so ist der Satz bewiesen, denn die gegebene Curve r. Ordnung geht dann in der That durch die δ Punkte, in welchen sich die Curven n. und m. Ordnung (ausser den festen) noch schneiden.

Zu den zu untersuchenden Gruppen gehört nun auch, wie schon erwähnt, diejenige, welche aus den δ zu untersuchenden Punkten und weiteren $m(r - n)$ Punkten besteht, die eine beliebige Curve $C_{(r-n)}$ der $(r - n)^{\text{ten}}$ Ordnung auf F ausschneidet.

Wir wollen eine solche Gruppe, weil sie von einer zerfallenden Curve ausgeschnitten wird, eine zerfallende Gruppe und den von den δ fraglichen Punkten gebildeten Bestandtheil G_δ derselben Restgruppe nennen. Durch unsre zerfallende Punktgruppe legen wir jetzt eine

Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese muss nach dem Fundamentalsatz zerfallen in die C_{r-n} und eine Curve $C_{\gamma-2}$ der Ordnung:

$$m-2-(r-n)=m+n-r-2=\gamma-2.$$

Wir lassen nun noch die $C_{\gamma-2}$ zerfallen in irgend eine Gerade Q durch einen beliebigen **a** der δ Punkte der Restgruppe und eine Curve $C_{\gamma-3}$ der $(\gamma-3)^{\text{ten}}$ Ordnung durch die $\delta-1$ übrigen, was immer möglich ist, da

$$\delta-1=\frac{1}{2}\gamma(\gamma-3).$$

Von der $C_{\gamma-3}$ nehmen wir zunächst an, dass sie durch **a** nicht hindurchgehe.

In Bezug auf diese zerfallende Curve

$$C_{m-2}\equiv C_{r-n}\cdot C_{\gamma-3}\cdot Q$$

suchen wir jetzt das Residuum der Gruppe der oben erwähnten

$$m(r-n)+\delta$$

Punkte. Da der eine Bestandtheil — nämlich $m(r-n)$ Punkte — dieser Gruppe das vollständige Schnittpunktsystem der Grundcurve F mit der C_{r-n} bildet, so liefert diese Curve keine weiteren Schnittpunkte; das Residuum besteht daher aus $m-1$ Punkten der Geraden Q und aus

$$m(\gamma-3)-(\delta-1)$$

Punkten, welche von der $C_{\gamma-3}$ auf F noch ausgeschnitten werden. Nach dem Restsatz ist die fragliche Schaar von Punktgruppen von je

$$\delta+m(r-n)$$

Punkten auch corresidual in Bezug auf das soeben gefundene Residuum, d. h. sie können auch durch eine Curvenschaar $(m-2)$. Ordnung ausgeschnitten werden, welche durch letzteres hindurchgeht. Nun liegen aber $m-1$ Punkte dieses Residuums in gerader Linie Q; es müssen daher sämmliche Curven $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallen in die feste Gerade Q und in eine Curvenschaar $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die übrigen Punkte des Residuums hindurchgeht. Würden jene Curven nicht zerfallen, so kämen wir zu dem Widersinn, dass eine Curve $(m-2)$. Ordnung von einer Geraden in mehr als $m-2$ Punkten getroffen wird.

Damit ist gezeigt, dass der Punkt **a** der Restgruppe fest ist, d. h. dass alle Curven r. Ordnung unsrer Schaar, mithin auch die gegebene, denselben enthalten. Da er aber beliebig war, so gilt gleiches auch von den $\delta-1$ übrigen Punkten der Restgruppe, mithin enthalten die Curven r. Ordnung, welche durch $mn-\delta$ Schnittpunkte zweier Curven m. und n. Ordnung hindurchgehen, auch die δ übrigen Schnittpunkte der letzteren. In unserem Beweise war es nöthig, durch

$$\delta - 1 = \frac{1}{2}\gamma(\gamma - 3)$$

Punkte eine Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung zu legen; es verdient hervorgehoben zu werden, dass bei specieller Lage jener Punkte mehr als eine Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung hindurchgelegt werden kann; der Beweis bleibt aber derselbe, da es genügt, wenn wir nur irgend eine dieser überhaupt möglichen Curven, welche **a** nicht enthalten, herausgreifen.

Es bleibt nun noch der Fall zu berücksichtigen, dass die δ Punkte der Restgruppe auf einer Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen.

Alsdann wird die Gerade Q überflüssig, und es genügt letztere Curve $(\gamma - 3)$. Ordnung zusammen mit der $C_{(r-n)}$, um das Residuum von $m(\gamma - 3) - \delta$ Punkten auf F auszuschneiden. Durch dieses Residuum sind jetzt alle möglichen Curven der Ordnung

$$\gamma - 3 + r - n = m - 3$$

an Stelle der früheren Curven $(m - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung zu legen, welche uns wiederum die zu untersuchenden corresidualen Gruppen von $\delta + m(r - n)$ Punkten liefern. Es ist aber jetzt kein Grund vorhanden, weshalb diese Curven $(m - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallen sollen in eine feste Curve, die etwa die δ Punkte der Restgruppe ausschneiden würde. Die δ Punkte sind daher in diesem Falle nicht nothwendig fest, wir haben somit einen Ausnahmefall des Cayley'schen Satzes nachgewiesen, und letzterer muss daher genauer in folgender Weise ausgesprochen werden:

„Eine Curve der r. Ordnung, welche durch

$$mn - \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\gamma - 2), \quad [\textit{wo} \;\; \gamma = m + n - r]$$

Schnittpunkte zweier Curven m. und n. Ordnung geht

$$[r \geqq m \;\; \textit{und} \;\; r \geqq n; \qquad r \leqq m + n - 3],$$

enthält im allgemeinen auch die übrigen

$$\frac{1}{2}(\gamma - 1)(\gamma - 2)$$

Schnittpunkte der letzteren; wenn dagegen diese

$$\delta = \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\gamma - 2)$$

Punkte auf einer Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, so braucht eine durch die $mn - \delta$ Punkte gelegte, aber sonst willkürliche Curve r. Ordnung nicht zugleich durch die δ übrigen Schnittpunkte der beiden Curven m. und n. Ordnung zu gehen.“

§ 4.

Besondere Behandlung des Ausnahmefalles.

Wir haben gesehen, dass, wenn die δ Punkte der Restgruppe auf einer Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, dieselbe aufhört fest sein zu müssen. In diesem kritischen Falle ist nun die weitere Frage zu erörtern, ob dann nothwendig *alle* δ Punkte der Restgruppe beweglich sind, d. h. ob die Curven r. Ordnung, die durch $mn - \delta$ Schnittpunkte der Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung hindurchgehen, *keinen* der noch übrigen δ Schnittpunkte enthalten, oder ob sie durch einen Theil der Punkte der Restgruppe hindurchgehen, durch den andern aber nicht, oder endlich, ob sie doch durch *alle* δ Punkte gehen.

Ein Beispiel möge die Frage noch näher beleuchten. Gegeben sei eine Curve 8. Ordnung C_8, welche durch 36 Schnittpunkte einer Curve 6. Ordnung C_6 mit einer Curve 7. Ordnung C_7 hindurchgeht, während von den 6 übrigen Schnittpunkten der beiden letzten Curven 5 in gerader Linie A liegen, der 6. Punkt a aber ausserhalb A liegen soll. In diesem Falle ist $\gamma = 6 + 7 - 8 = 5$. Die 6 Punkte der Restgruppe liegen auf einem Kegelschnitt, gebildet von der Geraden A zusammen mit einer beliebigen Geraden B durch a. Unser Satz lässt uns daher schliessen, dass die C_8 durch diese 6 Punkte nicht hindurchgehen wird.

Wenn man aber den Beweis genau so wie im allgemeinen Falle wiederholt und jeden der 6 Punkte der Restgruppe einmal dadurch auszeichnet, dass man die Gerade Q (vgl. oben) durch ihn hindurchlegt, so stellt sich heraus, dass zwar die C_8 durch die in Rede stehenden 5 Punkte der Geraden A nicht hindurchgeht, wohl aber durch den Punkt a.

Daraus müssen wir schliessen, dass in dem Ausnahmefalle einige der δ Punkte zwar beweglich, andre aber noch fest sein können, und wir haben uns jetzt die weitere Frage vorzulegen: Wenn eine Curve r. Ordnung durch einen Theil des vollständigen Schnittpunktsystems zweier Curven m. und n. Ordnung, nämlich durch $mn - \delta$ Schnittpunkte, hindurchgeht, auf welche Weise lässt sich alsdann ermitteln, ob sie durch einen aus den δ übrigen Punkten beliebig ausgewählten weiteren Punkt auch noch hindurchgeht? Um diese Frage zu entscheiden, müssen wir uns erinnern, dass die im Beweis des allgemeinen Falles benützte Curvenschaar $(m - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung in eine feste Gerade Q und eine Curvenschaar $(m - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfiel. Dies verhalf uns zum Nachweise des Umstands, dass ein Punkt der Restgruppe, derjenige nämlich, der auf der Geraden Q liegt, fest ist. Wollte man dasselbe für einen anderen der δ Punkte nachweisen, so müsste man ihn dadurch auszeichnen, dass man durch die noch übrigen $\delta - 1$

Punkte eine Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung und durch ihn selber — falls diese $C_{\gamma-3}$ nicht schon hindurchgeht — eine Gerade Q' legt. So oft nun Q' auf diese Weise einzuführen ist, was z. B. bei allgemeiner Lage der δ Punkte der Restgruppe für alle der Fall ist, dann ist immer der auf ihr liegende Punkt fest. Wenn aber die δ Punkte auf einer Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, so kann man freilich diese benützen, womit die Gerade Q überflüssig wird; damit ist aber noch nicht gesagt, dass dann alle δ Punkte beweglich sind. Denn es können dann schon $\delta - 1$ Punkte so speciell liegen, dass man unendlich viele Curven $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung durch sie hindurchlegen kann, von denen zwar ein Theil durch den letzten Punkt hindurchgeht, der andere aber nicht. Sobald sich nun wenigstens *eine* unter diesen Curven befindet, welche den letzten Punkt nicht enthält, so kann man diese benützen, und die Gerade Q ist dann durch ihn hindurch zu legen, wie im allgemeinen Falle, er ist mithin fest. Also:

„*Um zu erfahren, ob einer der δ Punkte der Restgruppe fest ist, lege man durch die $\delta - 1$ übrigen alle möglichen, auch zerfallenden Curven $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung (im allgemeinen giebt es nur eine); wenn sich nun unter diesen eine solche befindet, die den fraglichen Punkt nicht enthält, so ist derselbe fest.*“

In dem von uns gewählten Beispiel (s. oben) ist der Punkt a fest, obgleich er mit den 5 Punkten der Geraden A auf einem Kegelschnitt liegt; denn es giebt nicht nur einen, sondern unendlich viele Kegelschnitte durch diese 5 Punkte, die den Punkt a nicht enthalten. Dagegen sind die 5 Punkte der Geraden A beweglich, denn alle Kegelschnitte, die man durch a und 4 beliebige derselben legen kann, gehen auch durch den fünften, da sie alle in die feste Gerade A und eine weitere durch a gehende Gerade zerfallen. Wir folgern daraus, dass eine C_r durch mehr als $mn - \delta$ Schnittpunkte einer C_m mit einer C_n hindurchgehen kann, ohne dass sie darum nothwendig auch die übrigen Schnittpunkte derselben enthalten muss. Würden in dem von uns gewählten Beispiel 4 von den 6 Punkten der Restgruppe in gerader Linie, die beiden anderen ausserhalb derselben liegen, so wären letztere fest, erstere aber beweglich, und wir hätten eine Curve 8. Ordnung, welche durch 38 Schnittpunkte einer Curve 6. mit einer Curve 7. Ordnung hindurchgeht, ohne zugleich die vier übrigen zu enthalten (weil sie in gerader Linie liegen).

Aus dem Beweis des Cayley'schen Satzes hat sich ergeben, dass, wenn die δ Punkte der Restgruppe auf einer $C_{\gamma-3}$ liegen, dieselben nicht *nothwendig* fest sind; es ist weiter das Kriterium dafür nachgewiesen worden, dass in diesem Ausnahmefalle *einzelne* der δ Punkte noch fest bleiben; es erübrigt noch, zu untersuchen, ob nicht trotz

ihrer besonderen Lage (auf einer $C_{\gamma-3}$) doch *alle δ Punkte der Restgruppe fest sein können*. Wir werden beweisen, dass dies unmöglich ist.

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_\delta$ die δ Punkte der Restgruppe, welche auf einer Curve $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung $C=0$ liegen sollen. Wären nun die δ Punkte a_i fest, so gäbe es δ verschiedene Curven $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, von denen jede durch $\delta-1$ Punkte der Restgruppe hindurchgeht, durch den letzten aber nicht. Seien

$$C_1=0;\ C_2=0;\ \ldots;\ C_\delta=0$$

die Gleichungen dieser Curven, so dass $C_1=0$ durch alle Punkte a_i bis auf a_1, $C_2=0$ durch alle bis auf a_2 u. s. w., $C_\delta=0$ durch alle bis auf a_δ hindurchgeht. Nun lassen sich aber, da die $C_1, C_2, \ldots, C_\delta$ linear von einander unabhängig sind, Parameter

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\delta$$

so bestimmen, dass die Gleichung einer beliebigen Curve $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, mithin auch derjenigen, auf welcher *alle* Punkte a_i liegen $(C=0)$, in die Form

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_\delta C_\delta = 0$$

gebracht werden kann. Dieser Gleichung müssten daher die Coordinaten eines beliebigen der Punkte a genügen; dies ist aber nicht der Fall, da für die Coordinaten eines beliebigen Punktes a_i der Restgruppe alle C *bis auf* C_i verschwinden. Also:

„Wenn $\delta=\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$ Punkte auf einer oder unendlich vielen Curven $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, so lassen sich immer $\delta-1$ dieser Punkte so auswählen, dass *alle* durch sie hindurchgelegten Curven $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung auch noch den letzten Punkt enthalten."

Unter Beibehaltung der früher gemachten Annahmen über m, n und r können wir nun den Satz aufstellen:

„*Wenn eine Curve r. Ordnung durch $mn-\delta$ Schnittpunkte einer Curve m. mit einer Curve n. Ordnung hindurchgeht, so giebt es unter den δ übrigen Schnittpunkten dann und nur dann solche, welche die Curve r. Ordnung nicht enthält, wenn jene δ Punkte auf einer Curve $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen.*"

Wir stellen uns jetzt die Frage, wie viele von den δ Punkten der Restgruppe im Ausnahmefalle, wo also $\gamma>3$, zum Mindesten beweglich sein müssen.

Zu diesem Zwecke beweisen wir unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen zuerst den folgenden Hilfssatz:

„*Wenn eine Curve r. Ordnung durch $mn-(\gamma-1)$ Schnittpunkte einer C_m mit einer C_n hindurchgeht, durch die übrigen $\gamma-1$ Punkte aber nicht, so liegen letztere in gerader Linie.*"

Wählt man die C_m als Grundcurve und denkt sich durch die Gruppe der

$$mn - (\gamma - 1)$$

Punkte alle möglichen C_r hindurchgelegt, so schneiden diese die C_m noch in einer Schaar von Gruppen von je

$$\gamma - 1 + m(r - n)$$

weiteren Punkten. Zu dieser Schaar gehört auch die Gruppe von Punkten, welche die C_n ausser den festen Punkten, ferner eine willkürliche C_{r-n} auf C_m noch ausschneiden. Durch diese Gruppe lege man eine C_{m-1}, welche nach dem Fundamentalsatze in die C_{r-n} und eine $C_{\gamma-1}$ durch die fraglichen $\gamma - 1$ Punkte zerfallen muss.

Letztere Curve schneidet C_m noch in einer Gruppe G_x von

$$(m-1)(\gamma-1)$$

Punkten. Obige Punktgruppen von je

$$(\gamma-1) + m(r-n)$$

Punkten müssen daher nach dem Restsatze ausschneidbar sein durch Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die Punkte der Gruppe G_x hindurchgehen. Wenn aber von den $m(\gamma-1)$ Schnittpunkten einer C_m mit einer $C_{\gamma-1}$

$$(\gamma-1)(m-1)$$

auf einer Curve der Ordnung $m - 1$ liegen, so liegen die übrigen $\gamma - 1$ Schnittpunkte in gerader Linie (nach dem ausnahmslos geltenden Fundamentalsatz). Das sind gerade die $\gamma - 1$ Schnittpunkte von C_m mit C_n, durch welche die C_r nicht hindurchgeht und unser Hilfssatz ist bewiesen.

Aus dem Hilfssatze folgt sofort, dass im Ausnahmefalle wenigstens $\gamma - 1$ Punkte beweglich sein müssen. Denn wäre noch einer derselben fest, so würden die $\gamma - 2$ beweglichen Punkte mit jedem beliebigen der festen in gerader Linie liegen, was unmöglich.

Dass das gefundene Minimum für die Zahl der im Ausnahmefalle noch beweglichen Punkte sich nicht weiter begrenzen lässt, zeigen wir, indem wir beweisen, dass von den δ Punkten der Restgruppe noch

$$\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-4)$$

fest sein können.

Man braucht bloss anzunehmen, dass letztere beliebig und die weiteren $\gamma - 1$ Punkte der Restgruppe in gerader Linie liegen. Wendet man jetzt, um zu erfahren, welche der δ Punkte fest und welche beweglich sind, auf alle δ Punkte das oben erörterte Verfahren an, so stellt sich heraus, dass die

$$\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-4)$$

Punkte fest, die $\gamma - 1$ Punkte jedoch beweglich sind.

Wir kommen daher zu dem Schlusse:

„Eine Curve r. Ordnung, welche durch $mn - \delta$ Schnittpunkte einer Curve m. mit einer Curve n. Ordnung hindurchgeht, kann, wenn die noch übrigen δ Schnittpunkte auf einer Curve $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, höchstens noch weitere

$$\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-4)$$

der letzteren δ Punkte enthalten, und wenn dies der Fall ist, so liegen die noch übrigen

$$\gamma-1$$

Punkte in gerader Linie.“

§ 5.

2. Beweis des Cayley'schen Satzes.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen sei

$$r = m + n - 3.$$

Dann ist $\gamma = 3$ und $\delta = 1$.

Es handelt sich in diesem Falle um die Untersuchung der Curven $(m+n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch alle bis auf einen der mn Durchschnittspunkte einer Curve m. mit einer Curve n. Ordnung hindurchgehen. Wählen wir wieder die C_m als Grundcurve und verfahren wie beim ersten Beweis, so ergiebt sich mit Hilfe der Geraden Q durch den fraglichen Punkt, dass *alle Curven r. Ordnung, welche durch $mn - 1$ Schnittpunkte einer C_m mit einer C_n hindurchgehen, auch noch den letzten Schnittpunkt dieser Curven enthalten.*

Es muss hier betont werden, dass sich für diesen besonderen Fall

$$r = m + n - 3$$

keine Ausnahme des Cayley'schen Satzes ergiebt.

Für die Coefficienten der Gleichung einer Curve r. Ordnung, welche durch das vollständige Schnittpunktsystem einer Curve m. Ordnung mit einer Curve n. Ordnung hindurchgeht, hat man mn lineare Bedingungsgleichungen, und der Cayley'sche Satz sagt gewissermassen aus, dass, wenn $r \leq m + n - 3$, δ bestimmte, aber nicht beliebige der Gleichungen eine Folge der übrigen sind; ist aber $r = m + n - 3$, also $\delta = 1$, so folgt, dass *jede* eine Folge der $mn - 1$ übrigen Gleichungen ist.

Es sei jetzt

$$r = m + n - \gamma; \quad \gamma > 3.$$

Wir fragen: Enthält eine Curve r. Ordnung, welche durch $mn - \delta$ Schnittpunkte einer Curve m. Ordnung mit einer Curve n. Ordnung hindurchgeht, auch die δ übrigen Schnittpunkte dieser Curven?

Durch

$$\delta - 1 = \frac{1}{2}\gamma(\gamma - 3)$$

dieser letzteren δ Punkte legen wir eine Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese ergänzt die Curve r. Ordnung zu einer Curve der Ordnung

$$m + n - 3,$$

welche, wie schon bewiesen, unbedingt durch den letzten der δ Punkte hindurchgehen muss. Dieser liegt somit entweder auf der Curve r. Ordnung, ist also fest, oder auf der Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung, womit wieder das Verhalten der Curve r. Ordnung im Ausnahmefall des Cayley'schen Satzes charakterisirt ist.

Dieses Beweisverfahren giebt zum Unterschied vom ersten Beweis unmittelbar zu erkennen, wann einzelne der auf einer Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegenden δ Punkte der Restgruppe noch zu den festen Punkten gehören.

§ 6.

Specielle Fälle und Anwendungen.

Der Cayley'sche Satz gilt, wie sich aus unserem Beweise ergiebt, auch noch, wenn $r = n$ ist. In diesem Falle ist $\gamma = m$, und wir haben dann den bekannten Satz:*)

(A) „*Alle Curven n. Ordnung, welche durch*

$$nm - \frac{1}{2}(m-1)\cdot(m-2)$$

Schnittpunkte einer Curve n. mit einer Curve m. Ordnung ($n \geqq m$) *hindurchgehen, gehen auch durch die* $\frac{1}{2}(m-1)\cdot(m-2)$ *übrigen Schnittpunkte der letzteren, vorausgesetzt, dass diese nicht auf einer Curve* $(m-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung liegen.*" Oder:

„*Von den Schnittpunkten einer gegebenen Curve m. Ordnung mit einer Curve n. Ordnung sind, wenn* $m \leqq n$, *im allgemeinen* $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ *durch die übrigen bestimmt; wenn aber letztere auf einer Curve* $(m-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung liegen, so sind weniger Punkte durch die übrigen bestimmt.*"

Für $r = m = n$ erhält man den Satz:

(B) „*Eine Curve n. Ordnung, welche durch*

$$n^2 - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Schnittpunkte zweier anderen Curven n. Ordnung hindurch-

*) Vergl. Brill und Nöther, Ueber die algebraischen Functionen etc. Math. Ann. Bd. VII, p. 277.

geht, enthält auch die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *weiteren Schnittpunkte der letzteren, vorausgesetzt, dass sie nicht auf einer Curve* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung liegen.*"

Bisher lagen als Grenzen der Gültigkeit des Cayley'schen Satzes stets die Bedingungen zu Grunde

$$r \geqq m \quad \text{und} \quad r \geqq n.$$

Wir wollen jetzt annehmen, r liege zwischen m und n, und zwar so, dass

$$n > r \geqq m.$$

Die Zahl der von einander unabhängigen Bedingungen, welchen in diesem Falle eine durch sämmtliche Schnittpunkte der C_m mit der C_n hindurchgehende C_r zu genügen hat, ist, da die C_r von der Form AC_m wird, wo A eine willkürliche Curve der $(r-m)^{\text{ten}}$ Ordnung ist:

$$\frac{r(r+3)}{2} - \frac{(r-m)(r-m+3)}{2}.$$

Diese Zahl stimmt für $r = n-1$ und für $r = n-2$ noch mit der anderen

$$mn - \frac{1}{2}(m+n-r-1)(m+n-r-2)$$

überein, so dass der Cayley'sche Satz auch noch für $r = n-1$ und für $r = n-2$ anwendbar ist. Auch kann der Beweis für diese speciellen Fälle ganz ebenso geführt werden wie früher. Freilich wird eine Curve r. Ordnung, welche durch $mn - \delta$ Schnittpunkte einer C_m mit einer C_n und mithin *im allgemeinen* auch durch die δ übrigen Schnittpunkte derselben hindurchgeht, für

$$n > r \geqq m$$

in die C_m und eine beliebige Curve $(r-m)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallen, aber im Ausnahmefalle existiren eigentliche Curven r. Ordnung (für $r = n-1$ und $r = n-2$), welche durch $mn - \delta$ Schnittpunkte einer C_m mit einer C_n hindurchgehen, obgleich $r < n$ ist.

Für $r = n-1$ ergiebt sich $\gamma = m+1$;

$$\delta = \frac{1}{2}m(m-1)$$

und wir können somit den Satz aussprechen:

(C) „*Liegen von den mn Schnittpunkten einer C_m mit einer C_n*

$$mn - \frac{1}{2}m(m-1)$$

auf einer, nicht in C_m und eine weitere Curve zerfallenden, Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung, so liegen die übrigen*

$$\frac{1}{2}m(m-1)$$

Punkte auf einer Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ *Ordnung.*"

Dieser Satz lässt sich auch direct mittelst des Restsatzes beweisen.

Der Cayley'sche Satz gilt ausnahmslos, wenn $\delta = 1$ ist. In diesem Falle würde $m = 2$ sein müssen und vorstehender Satz noch nichts aussagen, da es keine nicht zerfallende Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung giebt, die durch alle bis auf einen der Schnittpunkte eines Kegelschnitts mit einer Curve n. Ordnung hindurchgeht.

Für $r = n - 2$ erhalten wir den Satz:

(D) *„Liegen von den mn Schnittpunkten einer C_m mit einer C_n*

$$mn - \frac{1}{2} m(m+1)$$

auf einer, nicht in C_m und eine weitere Curve zerfallenden, Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, so liegen die übrigen

$$\frac{1}{2} m(m+1)$$

Punkte auf einer Curve $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung."

Der Restsatz ergiebt auch noch die Richtigkeit vorstehender Sätze für $m = n$, in welchem Falle sie übrigens identisch werden, weil

$$n^2 - \frac{1}{2} n(n-1) = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Es gilt daher der Satz:

(E) *„Wenn von den n^2 Basispunkten eines Curvenbüschels n. Ordnung*

$$\frac{1}{2} n(n+1)$$

auf einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, so liegen die übrigen

$$\frac{1}{2} n(n-1)$$

auf einer Curve der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung."

Endlich gelten die Zahlen des Cayley'schen Satzes noch für den Fall

$$m = n - 1; \quad r = n - 2.$$

Daraus erhalten wir:

(F) *„Wenn von den Schnittpunkten einer C_n mit einer C_{n-1} die eine Hälfte auf einer C_{n-2} liegt, so liegt auch die andere Hälfte auf einer C_{n-2}."*

Beispiel zu Satz (C).

$$r = 6, \quad n = 7, \quad m = 4.$$

Dann ist:

$$\gamma = 5; \quad \delta = 6.$$

Alle Curven 6. Ordnung, welche durch 22 Schnittpunkte einer Curve 7. Ordnung mit einer Curve 4. Ordnung hindurchgehen, enthalten im allgemeinen auch die 6 weiteren Schnittpunkte der letzteren, müssen also zerfallen. Liegen aber diese 6 Punkte auf einem Kegelschnitt, so giebt es thatsächlich nicht zerfallende Curven 6. Ordnung, die durch jene 22 Schnittpunkte der C_7 mit der C_4 hindurchgehen, ohne

die übrigen Schnittpunkte dieser Curven zu enthalten. Liegen insbesondere von den 6 Punkten der Restgruppe 4 in gerader Linie, die beiden anderen ausserhalb derselben, so sind letztere fest, und wir schliessen daraus, dass es Curven 6. Ordnung giebt, welche durch 24 Schnittpunkte einer C_4 mit einer C_7 hindurchgehen, ohne die 4 übrigen Schnittpunkte zu enthalten, *wenn diese in gerader Linie liegen.* Die Curve 7. Ordnung geht dann durch das vollständige Schnittpunktsystem der gegebenen C_4 mit einer beliebigen der Curven 6. Ordnung, und es erhellt überdies auch aus dem Fundamentalsatze (§ 1), dass diese C_4 von der C_7 noch in 4 Punkten einer geraden Linie geschnitten werden muss.

Bevor wir nun zu Anwendungen der bisher entwickelten Sätze übergehen, müssen wir noch die wichtige Bemerkung vorausschicken, dass, ebenso wie der Restsatz, auch der Cayley'sche noch gilt, wenn die betrachteten Curven zerfallen, da an keiner Stelle des Beweises Irreducibilität verlangt war; nur müssen die Schnittpunkte der Bestandtheile einer zerfallenden Curve als Doppelpunkte derselben gelten, *was aber so lange die Sätze nicht beeinflusst, als keine andere der Curven durch einen solchen Doppelpunkt hindurchgeht.* Dies wollen wir aber hier voraussetzen.

Herr Olivier hat folgenden Satz aufgestellt:*)

„Schneiden sich drei Curven S_1, S_2 und S_3 der n. Ordnung in denselben

$$p = \frac{1}{2}n(n-1)+1$$

Punkten, so schneiden sie sich paarweise noch in weiteren

$$q = \frac{1}{2}(n-1)(n+2)$$

Punkten und bestimmen dadurch drei Curven E_1, E_2 und E_3 der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Diese gehen durch dieselben

$$\mu = \frac{1}{2}n(n-1)$$

Punkte der Ebene, während ihre übrigen

$$\lambda = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Schnittpunkte, paarweise genommen, bezüglich auf die drei Curven S_1, S_2 und S_3 zu liegen kommen.“

Um diesen Satz zu beweisen, fassen wir die 6 Curven zu drei Paaren, nämlich $(S_1 E_1)$, $(S_2 E_2)$ und $(S_3 E_3)$ zusammen und haben so drei zerfallende Curven der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, von denen jede, z. B. $S_1 E_1$, durch

*) Borchardt's Journal Bd. 70, p. 159.

$$p + 3q = (2n-1)^2 - \frac{1}{2}(2n-2)(2n-3)$$

einfache Schnittpunkte der beiden anderen hindurchgeht.

Nach dem sich aus dem Cayley'schen Satz ergebenden und unter den obigen Specialfällen unter (B) aufgeführten Satze geht nun die Curve $S_1 E_1$ im allgemeinen auch durch die noch übrigen $\frac{1}{2}(2n-2)(2n-3)$ Schnittpunkte der Curve $S_2 E_2$ mit $S_3 E_3$. Von diesen Schnittpunkten müssen nun je λ auf jede der 3 Curven S fallen. Denn nimmt man z. B. S_1 als Grundcurve an und schneidet sie mit S_2 und S_3 in der festen Gruppe der p Punkte, so erhält man 2 corresiduale Gruppen von je q Punkten, welche nach dem Restsatze auch durch die beiden Curven E_2 und E_3 ausgeschnitten werden können, die durch dieselben λ Punkte der S_1 gehen. Ebenso zeigt man, dass sich E_1 und E_3 in λ Punkten auf S_2, ferner E_1 und E_2 in λ Punkten auf S_3 schneiden müssen. Da nun auf den Curven S keine weiteren Schnittpunkte liegen können, so müssen durch die noch übrigen μ Punkte alle drei Curven E hindurchgehen, wo

$$3\lambda + \mu = \frac{1}{2}(2n-2)(2n-3).$$

Damit hätten wir einen neuen Beweis des Olivier'schen Satzes geliefert; nun verliert aber dieser Satz nach dem allgemeinen Theorem seine Gültigkeit, sobald die $3\lambda + \mu$ Punkte der Restgruppe auf einer Curve der $(2n-4)^{\text{ten}}$ Ordnung liegen. Es fragt sich nun, unter welchen Umständen dieser Ausnahmefall eintreten kann. Um dies zu ermitteln, müssen wir aufs neue unsere Schnittpunktsätze verwerthen. Bei der erwähnten besonderen Lage der $3\lambda + \mu$ Punkte, die sich schon aus dem Schnitt der Curve $S_1 E_1$ mit $S_2 E_2$ ergeben, würden von den Schnittpunkten einer C_{2n-4} mit der Curve E_1 der Ordnung $n-1$

$$\lambda + \mu = (n-1)^2$$

Punkte auf einer weiteren Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, nämlich E_2, liegen; dann müssen aber nach dem Fundamentalsatze die noch übrigen Schnittpunkte jener Curven C_{2n-4} und $C_{n-1}(E_1)$ nothwendig auf einer Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen. Zu diesen gehört nun noch die Gruppe der λ Punkte, in welchen sich E_1, E_3 und S_2 schneiden. Es müssen demnach von allen Gruppen der λ Punkte jede für sich auf einer Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, wenn der Ausnahmefall stattfinden soll. Liegen aber von den Schnittpunkten einer C_n mit einer C_{n-1}

$$\lambda = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

auf einer C_{n-3}, so bilden (nach Satz (C) der spec. Fälle für $r = m = n-1$) die übrigen

$$q=\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$$

Schnittpunkte die Basispunkte einer einfach unendlichen Schaar, und man kann daher durch solche q Punkte unendlich viele Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung hindurchlegen. Der Olivier'sche Satz verliert daher seine Gültigkeit, sobald die 3 Gruppen von je q Punkten, in welchen sich die Curven S paarweise schneiden, die jedesmaligen Basispunkte eines Büschels von Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bilden. Für $n=2$ und $n=3$ sagt diese Ausnahme noch nichts aus.

Olivier hat dann analog dem früheren noch den folgenden weiteren Satz abgeleitet:

„Schneiden sich drei Curven n. Ordnung S_1, S_2, S_3 in denselben

$$p=\frac{1}{2}n(n+1)+1$$

Punkten, so schneiden sie sich paarweise in noch weiteren

$$q=\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$$

Punkten und bestimmen dadurch drei Curven E_1, E_2, E_3 der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung. Diese drei Curven E_1, E_2, E_3 gehen durch dieselben

$$\mu=\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

Punkte der Ebene; ihre übrigen

$$\lambda=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Schnittpunkte, paarweise genommen, fallen bezüglich auf die Curven S_1, S_2, S_3."

Auch dieser Satz erleidet in dem Falle eine Ausnahme, wenn die

$$3\lambda+\mu=\frac{1}{2}(2n-3)(2n-4)=\frac{1}{2}(2n-5)(2n-2)+1$$

Punkte der Restgruppe auf einer Curve der $(2n-5)^{\text{ten}}$ Ordnung liegen, oder, wie sich auf eine der obigen ganz analoge Weise herausstellt, wenn die drei Gruppen von je q Punkten die Basispunkte eines Büschels von Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung bilden. Die Ausnahme *dieses* Satzes sagt übrigens für $n=3$ und $n=4$ noch nichts aus.

Die soeben behandelten zwei Sätze sind von Herrn Lindemann zu folgendem allgemeinen Satze zu erweitern versucht worden:*)

„Schneiden sich 3 Curven C_1, C_2, C_3 der n. Ordnung in denselben

$$p=\frac{1}{2}n(n+2r-3)-\frac{1}{2}r(r-3)$$

Punkten, so schneiden sie sich paarweise in noch weiteren

---

*) Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, I, p. 763.

$$q = \frac{1}{2}(n-r)(n-r+3)$$

Punkten und bestimmen dadurch 3 Curven K_1, K_2, K_3 der $(n-r)^{\text{ten}}$ Ordnung. Diese letzteren gehen alsdann durch dieselben

$$\mu = (n-r)^2 - (p-rn)$$

Punkte der Ebene, während ihre übrigen

$$\lambda = p - rn$$

Schnittpunkte, paarweise genommen, bezüglich auf den Curven C_1, C_2, C_3 liegen."

Diese Verallgemeinerung lässt sich aber nicht aufrecht erhalten. Für $r = 3$ müssten sich z. B. drei Curven 4. Ordnung ($n=4$) durch dieselben 14 Punkte noch paarweise in je zwei Punkten schneiden, während doch solche drei Curven jederzeit einem Büschel angehören. Für $n = 5$ und $r = 3$ würde sich ergeben, dass 3 Curven 5. Ordnung durch dieselben 20 Punkte *paarweise* noch je 5 Punkte gemein hätten, während doch im allgemeinen 3 Curven 5. Ordnung durch dieselben 19 Punkte schon einem Büschel angehören; im besonderen könnten die fraglichen 5 Punkte, wie sich aus § 4 ergiebt, beweglich sein, dann müssten sie aber in gerader Linie liegen und die Lindemann'sche Verallgemeinerung wird wieder illusorisch.

Der von Lindemann ausgesprochene Satz gilt also nur für $r=1$ und $r=2$, wofür er schon von Olivier gegeben ist.

Analoge Bemerkungen lassen sich zu den beiden Sätzen machen, zu welchen Herr Olivier in seinem Aufsatze: „Zur Theorie der Erzeugung geometrischer Curven" gelangt*).

Der erste jener Sätze lautet:

„Schneiden sich drei Curven K_1, K_2, K_3 der n. Ordnung in demselben Punkte P, ausserdem paarweise in noch $n^2 - 1$ Punkten und nimmt man auf jeder der 3 Curven noch beliebige $p = \frac{1}{2}n(n-1)$ Punkte, so treffen sich die 3 Curven $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ der $(2n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche bezüglich durch (n^2-1) Schnittpunkte zweier Curven K und die auf diesen gewählten $2p$ Punkte bestimmt sind, paarweise noch in

$$s = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

weiteren Punkten, die beziehungsweise auf die drei Curven K zu liegen kommen; zugleich gehen aber auch alle drei Curven Σ durch dieselben

$$r = 3(n-1)^2$$

Punkte der Ebene."

*) Borchardt's Journal Bd. 71, p. 1.

Zur genaueren Untersuchung dieses Satzes kann man wieder wie früher je eine Curve K mit einer Curve Σ zusammennehmen, so dass man drei Curven $(3n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $K_1\,\Sigma_1$, $K_2\,\Sigma_2$, $K_3\,\Sigma_3$ erhält, von denen jede durch

$$(3n-2)^2 - \frac{1}{2}(3n-3)(3n-4)$$

einfache Schnittpunkte der beiden anderen hindurchgeht; nach dem allgemeinen Schnittpunktstheorem geht sie dann auch durch die übrigen

$$3s + r = \frac{1}{2}(3n-5)(3n-2) + 1$$

Schnittpunkte, welche sich, wie man durch leichte Rechnung findet, in der angegebenen Weise auf die einzelnen Curven vertheilen. Nur in dem Falle erleidet der Satz wieder eine Ausnahme, wenn die $3s+r$ Punkte, die sich schon durch die Wahl zweier Curven z. B. $K_1\,\Sigma_1$ und $K_2\,\Sigma_2$ ergeben, auf einer Curve $(3n-5)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen. Nun zeigt sich aber, dass dieser Ausnahmefall nur dann eintreten kann, wenn die 3 Curven Σ zusammenfallen (d. i. wenn die 3 Curven K einem Büschel angehören). In dem Ausnahmefalle ginge nämlich eine C_{3n-5} durch

$$r + s = (2n-2)^2 - \frac{1}{2}n(n-1)$$

Schnittpunkte zweier C_{2n-2}; nach dem Cayley'schen Satze geht sie daher auch durch die übrigen

$$p = \frac{1}{2}n(n-1)$$

Schnittpunkte. Hieraus ergiebt sich, dass, wenn die $3s+r$ Punkte auf einer C_{3n-5} liegen, auf dieser auch die $3p$ willkürlich auf den Curven K gewählten Punkte liegen müssen. Dann würden aber von den Schnittpunkten einer C_{3n-5} mit einer C_{2n-2}

$$r + s + p = 4(n-1)^2 = (2n-2)^2$$

auf einer anderen C_{2n-2} liegen, also die übrigen auf einer C_{n-3}. Dazu gehören aber auch die

$$p + s = (n-1)^2$$

Punkte, die auf einer und derselben Curve K der n. Ordnung liegen, was nur möglich ist, wenn letztere zerfällt; natürlich müssten dann die beiden anderen K auch zerfallen.

Wenn also ein Zerfallen der ursprünglichen Curven derart, dass alle 3 einen gemeinsamen Bestandtheil haben, sowie auch der Umstand, dass sie einem Büschel angehören, ausgeschlossen wird, so ist der Satz allgemein gültig. Auf das gleiche Resultat würde die Discussion des weiter von Olivier behandelten Falles führen, in welchem sich die 3 Curven K in denselben 4 Punkten schneiden. Eine Erweiterung des Theorems auf drei Curven, die durch dieselben ϱ^2 Punkte gehen,

zu geben, liegt auch hier wieder nahe, führt aber wiederum zu keinem Resultat, und zwar aus folgendem Grunde:

3 Curven n. Ordnung, welche durch dieselben ϱ^2 Punkte gehen, schneiden sich paarweise noch in $n^2 - \varrho^2$ Punkten, und wenn durch eine dieser 3 Gruppen von je $n^2 - \varrho^2$ Punkten eine Curve der $(2n-2\varrho)^{\text{ten}}$ Ordnung (diese Ordnung würde nämlich im allgemeinen Falle der Ordnung $2n - 2$ im speciellen, $\varrho = 1$, entsprechen) hindurchgehen soll, die nicht gleichzeitig die übrigen ϱ^2 Schnittpunkte der drei gegebenen Curven enthält, so muss nach dem Cayley'schen Satze sein:

$$n^2 - \varrho^2 < n^2 - \frac{1}{2}(2\varrho-1)(2\varrho-2).$$

Dies ist aber nur der Fall für $\varrho = 1$ und $\varrho = 2$, wofür der Satz von Olivier gegeben ist.

Wollte man aber selbst den Fall, dass die $C_{2n-2\varrho}$ jene ϱ^2 Punkte enthielte, noch gelten lassen, so würde sich zeigen, dass die $n^2 - \varrho^2$ Punkte zusammen mit den beiden auf zwei Curven K beliebig gewählten Gruppen von je

$$p = \frac{1}{2}(n-\varrho)(n-3\varrho+3)$$

Punkten, die $C_{2n-2\varrho}$ nicht mehr bestimmen würden, sobald $\varrho > 2$ wird.

Weitere Anwendungen der Schnittpunktsätze sind von Herrn Cremona in seiner „Theorie der ebenen Curven" gemacht worden; die daselbst (§ 9, Anwendungen) abgeleiteten Sätze gelten alle *ohne Ausnahme*, weil sie auf den ausnahmslos geltenden Fundamentalsatz zurückführbar sind.

§ 7.

Mannigfaltigkeit der Curven r. Ordnung.

Die Frage, wie viele Curven r. Ordnung durch $mn - \delta$ Schnittpunkte einer C_m mit einer C_n hindurchgehn, lässt sich nun sowohl für den allgemeinen Fall als auch für alle möglichen Ausnahmefälle mit Leichtigkeit beantworten.

Im allgemeinen Falle, wo die δ Punkte der Restgruppe keine specielle Lage haben, ist C_r von der Form:

$$C_r = AC_m + BC_n.$$

Mithin ist die Mannigfaltigkeit t der Curvenschaar r^{ter} Ordnung:

$$t = \frac{1}{2}(r-m)(r-m+3) + \frac{1}{2}(r-n)(r-n+3) + 1.$$

Es ist natürlich auch:

$$t = \frac{1}{2}r(r+3) - (mn-\delta).$$

Liegen aber die δ Punkte der Restgruppe G_δ auf einer Curve $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, so bilden die corresidualen Punktgruppen von je

$$\delta+m(r-n)$$

Punkten, welche die Curvenschaar r. Ordnung auf der C_m ausschneidet, eine Specialschaar, die durch Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausschneidbar ist. (Ein ähnliches Verhalten findet auf der C_n statt). Daher lässt sich zufolge des Riemann-Roch'schen Satzes auch in den Ausnahmefällen die Mannigfaltigkeit der Curvenschaar r^{ter} Ordnung bestimmen. Nach diesem Satze erhöht sich die Mannigfaltigkeit t um so viele Einheiten als die Zahl der linear von einander unabhängigen Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung beträgt, welche sich durch die Gruppe der

$$\delta+m(r-n)$$

Punkte, nämlich der δ Punkte von G_δ und $m(r-n)$ Schnittpunkten einer beliebigen $C_{(r-n)}$ mit der C_m, hindurchlegen lassen. Da aber diese Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung alle in die $C_{(r-n)}$ und in Curven $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung durch G_δ zerfallen, so brauchen wir nur zu bestimmen, wie viele linear von einander unabhängige Curven $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung durch diese δ Punkte gehen. Ist diese Zahl $=i$, so beträgt die Mannigfaltigkeit der Curvenschaar r. Ordnung, welche durch die übrigen $mn-\delta$ Schnittpunkte der C_m mit der C_n hindurchgeht,

$$t'=t+i,$$

wenn t deren Mannigfaltigkeit im allgemeinen Falle bedeutet.

Die Zahl t' hängt also (ausser von t) lediglich von der Mannigfaltigkeit $i-1$ der Curvenschaar $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ab, die man durch die δ Punkte der Restgruppe hindurchlegen kann, dagegen wird sie durch die Zahl derjenigen Punkte der Restgruppe, welche möglicherweise noch fest sein können, nicht weiter beeinflusst.

Die *Maximalzahl* der Mannigfaltigkeit der Curvenschaar r. Ordnung durch $mn-\delta$ Schnittpunkte einer C_m mit einer C_n wird nun offenbar erreicht, wenn die Mannigfaltigkeit $i-1$ der Curvenschaar $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung durch die δ Punkte der Restgruppe ihr Maximum erreicht. Die Aufgabe, auf der Curve m. Ordnung die Gruppen von je δ Punkten anzugeben, durch welche sich eine Curvenschaar $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung von grösstmöglicher Mannigfaltigkeit legen lässt, ist nun gleichbedeutend mit der Bestimmung der Punktgruppen von je

$$\delta+m(r-n)$$

Punkten auf C_m, durch welche sich möglichst viele Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung legen lassen. Dieses Problem ist von Herrn Nöther in seiner Abhandlung: „Zur Theorie der algebraischen Raumcurven“ Borch. Journ. Bd. 93, p. 287 gelöst worden. Setzt man nämlich

$$\delta+m(r-n)=\alpha m-\beta, \qquad [0\leq\beta<m]$$

so ist nach dem l. c. bewiesenen Satze die Schaar g_Q von je

$$\delta + m(r-n)$$

Punkten immer dann von möglichst grosser Mannigfaltigkeit, wenn, für $\alpha \geqq \beta - 1$, die

$$\delta + m(r-n)$$

Punkte auf einer Curve α^{ter} Ordnung liegen und, für $\alpha \leqq \beta - 1$, wenn $(\alpha - 1)m$ dieser Punkte auf einer Curve $(\alpha - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die übrigen $m - \beta$ beliebig liegen, wobei letztere feste Punkte der Schaar werden. Nun liegen aber $m(r-n)$ Punkte der betrachteten Gruppe auf einer Curve $(r-n)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche einen festen Bestandtheil der durch die $\delta + m(r-n)$ zu legenden Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung bildet. Unser Kriterium für die Maximalzahl der Mannigfaltigkeit der Curvenschaar r^{ter} Ordnung, lässt sich daher folgendermassen aussprechen:

„*Es lassen sich durch $mn - \delta$ Schnittpunkte einer C_m mit einer C_n möglichst viele Curven r. Ordnung hindurchlegen, wenn, sofern*

$$\delta = \alpha' m - \beta \qquad [0 \leqq \beta < m]$$

gesetzt wird, für $\alpha' + r - n \geqq \beta - 1$ die δ Punkte der Restgruppe auf einer Curve der Ordnung α' liegen, und wenn für $\alpha' + r - n \leqq \beta - 1$ von den δ Punkten der Restgruppe $(\alpha' - 1)m$ auf einer Curve der $(\alpha' - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung, die übrigen $m - \beta$ beliebig liegen, wobei letztere zu den festen Punkten von G_δ gehören.“

Die Bestimmung der Mannigfaltigkeit der Curvenschaar r. Ordnung in jedem gegebenen Falle sowie der Maximalzahl derselben bietet somit keine Schwierigkeit mehr.

Erlangen, im Mai 1885.

Bemerkung über pseudosphärische Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen.

Von

A. Brill in Tübingen.

Bekanntlich zieht die Transformirbarkeit einer Form des Linienelementes in eine andere die Gleichheit gewisser in den Coefficienten der Differentialien gebildeten Ausdrücke nach sich, welche hierdurch die Bedeutung von Invarianten für die vorzunehmende Transformation erlangen. Für das Linienelement einer Fläche ist ein solcher Ausdruck der, welcher das Krümmungsmass in einem Punkte der Fläche darstellt, ferner derjenige für die geodätische Krümmung einer auf derselben gezogenen Linie u. A. m. Von den Herren Christoffel und Lipschitz wurden Methoden zur Herstellung solcher Invarianten auch für eine grössere Anzahl von Variabeln angegeben. In expliciter Form hat Herr Suworoff, dem Falle von drei Variabeln entsprechend, drei solche Ausdrücke aufgestellt, welche, auf das Linienelement des Raumes*) von constantem negativen Krümmungsmass angewandt, einen merkwürdigen Schluss zu ziehen gestatten.

Herr Suworoff findet als Ergebniss einer längeren Rechnung (die in dem in Darboux's Bulletin des Sc. math. 1. Sér. T. 4, 1873 enthaltenen Auszuge nur angedeutet ist) Folgendes:

Wenn der Ausdruck für das Linienelement:

$$ds^2 = a_{11}\,dx_1^2 + 2a_{12}\,dx_1\,dx_2 + \cdots + a_{33}\,dx_3^2$$

durch Transformation der Variabeln $x_1 x_2 x_3$ in die neuen $X_1 X_2 X_3$ die Form erhält:

$$ds^2 = A_{11}\,dX_1^2 + 2A_{12}\,dX_1\,dX_2 + \cdots + A_{33}\,dX_3^2,$$

so gehen die Ausdrücke:

*) Ich bezeichne mit dem Worte „Raum" eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen, gleichviel, ob sie (in dem Sinne von Riemann) „eben" ist, oder nicht; wie man ja auch das Wort „Fläche" in uneigentlichem Sinne auf krumme Gebilde überträgt.

$$(I) = \frac{1}{\omega}\sum_p\sum_{p'} a_{pp'}v_{pp'},$$

$$(II) = \frac{1}{\omega^2}\sum_p\sum_{p'} \omega_{pp'}(v_{qq'}\,v_{rr'} - v_{qr'}\,v_{rq'}), \qquad \left.\begin{matrix} p,\, q,\, r \\ p',\, q',\, r' \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3,$$

$$(III) = \frac{1}{\omega^2}\sum \pm v_{1p}\,v_{2q}\,v_{3r}$$

in die entsprechenden, gebildet in den A_{ik}, $X_1 X_2 X_3$, über. Hier bedeuten q, r die Reste der Division von $p+1$, $p+2$ durch 3; $\sum \pm$ ist eine Determinante. Setzt man ferner zur Abkürzung:

$$a^{\alpha}_{hk} = \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_\alpha}; \quad a^{\alpha\beta}_{hk} = \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta},$$

$$\begin{bmatrix} mn \\ i \end{bmatrix} = a^{n}_{mi} - a^{i}_{mn} + a^{m}_{ni};$$

$$\omega = \sum \pm a_{11}a_{22}a_{33}; \quad \omega_{hk} = \frac{\partial \omega}{\partial a_{hk}},$$

so ist:

$$2v_{lm} = a^{mn}_{lm} - a^{ln}_{mn} - a^{lm}_{nn} - a^{mm}_{ln}$$
$$- \sum_\sigma\sum_\varrho \frac{\omega_{\varrho\sigma}}{2\omega}\left\{\begin{bmatrix} ln \\ \sigma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} mn \\ \varrho \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} nn \\ \sigma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ml \\ \varrho \end{bmatrix}\right\},$$

$$2v_{ll} = 2a^{mn}_{mn} - a^{nn}_{mm} - a^{mm}_{nn} - \sum_\sigma\sum_\varrho \frac{\omega_{\varrho\sigma}}{2\omega}\left\{\begin{bmatrix} mm \\ \sigma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} nn \\ \varrho \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} mn \\ \sigma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} mn \\ \varrho \end{bmatrix}\right\}.$$

Ebenso nun, wie der Ausdruck für das Krümmungsmass einer Fläche eine greifbare Bedeutung erst erhält, wenn man in den Raum übergeht, wo sich Normalen u. s. w. construiren lassen, so kann man die Frage stellen nach der geometrischen Bedeutung der Invarianten (I), (II), (III) in einem Raume, der durch *eine* Gleichung zwischen *vier* Variabeln $x\,y\,z\,t$ aus einer ebenen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen ausgeschieden wird.

Sei:

$$f(xyzt) = 0$$

diese Gleichung, so lässt sich, ähnlich wie man bei Aufstellung der indicatorischen Linie für einen Punkt einer Fläche verfährt, durch Entwicklung der Variabeln t nach aufsteigenden Potenzen von x, y, z, Verlegung des betrachteten Raumpunktes in den Ursprung und Drehung des Coordinatensystems, der Nachweis führen, dass in jedem Punkte drei zu einander senkrechte Hauptkrümmungsrichtungen existiren, für welche die Krümmungshalbmesser $R_1\,R_2\,R_3$ der zugehörigen ebenen

Schnittcurven mit denen eines „parabolischen" Raumes 2. Ordnung übereinstimmt, dessen Gleichung ist:

$$2t = \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} + \frac{z^2}{R_3}.$$

Anstatt für den gegebenen Raum bilde man nun jene Invarianten für diesen Osculationsraum in der Nähe des Ursprungs des Coordinatensystems. Man hat für das Linienelement desselben:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2}{R_2 R_3}\, yz\, dy\, dz + \frac{2}{R_3 R_1}\, zx\, dz\, dx \\ &\qquad + \frac{2}{R_1 R_2}\, xy\, dx\, dy, \end{aligned}$$

wo x^2, y^2, z^2 als sehr kleine Grössen gegen die Einheit vernachlässigt wurden. Berechnet man nun, unter der nämlichen Annahme, hieraus die oben mit v_{lm}, v_{ll} bezeichneten 6 Grössen, und setzt dieselben in die Ausdrücke (I), (II), (III) ein, so erhält man die folgenden Werthe:

$$\begin{aligned} (I) &= \frac{1}{R_2 R_3} + \frac{1}{R_3 R_1} + \frac{1}{R_1 R_2}, \\ (II) &= \frac{1}{R_1^2 R_2 R_3} + \frac{1}{R_2^2 R_3 R_1} + \frac{1}{R_3^2 R_1 R_2}, \\ (III) &= \frac{1}{R_1^2 R_2^2 R_3^2}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck (III) hat also einen wesentlich *positiven* Werth in jedem Punkte eines Raumes, der aus einer ebenen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen durch eine Gleichung ausgeschieden werden kann. Diese Bemerkung hat auch Suworoff gemacht, aber er zieht daraus nicht den naheliegenden und doch wichtigen Schluss, *dass es hiernach unmöglich ist, solche Räume, für welche*, vermöge der eigenthümlichen Beschaffenheit ihres Linienelementes, *die Invariante* (III) *eine wesentlich negative Grösse wird, aus einem ebenen Raume von vier Dimensionen durch eine Gleichung zwischen vier Variabeln auszusondern.*

Insbesondere gilt diess für Räume von *constantem negativem* Krümmungsmass, für welche, aus der bekannten Form des Linienelementes:

$$\text{(A)} \qquad ds^2 = \frac{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2}{\left[1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}{4R^2}\right]^2}$$

sofort folgt:

$$(I) = -\frac{3}{R^2}; \quad (II) = \frac{3}{R^4}; \quad (III) = -\frac{1}{R^6}.$$

Die Umkehrung des Vorzeichens von R^2 würde die Grösse (*III*) zu einer positiven machen, wie denn in der That ein Raum von constanter positiver Krümmung durch eine Gleichung zwischen den vier Coordinaten einer ebenen Mannigfaltigkeit:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2$$

darstellbar ist. — Andererseits steht nichts im Wege, anzunehmen, *dass ein pseudosphärischer Raum durch zwei Gleichungen aus einer ebenen Mannigfaltigkeit von fünf Dimensionen ausgeschieden werden kann.* In der That, sind x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 die fünf Coordinaten, so leisten diess die Gleichungen:

$$x_1 = \frac{\cos(Ry_1)}{y}; \quad x_2 = \frac{\sin(Ry_1)}{y};$$

$$x_3 = \frac{\cos(Ry_2)}{y}; \quad x_4 = \frac{\sin(Ry_2)}{y};$$

$$x_5 = -\int dy\,\frac{\sqrt{R^2y^2-2}}{y^2},$$

welche, reelle Werthe der unabhängig Veränderlichen vorausgesetzt, für $y > \frac{\sqrt{2}}{R}$ reelle Werthe der Coordinaten ergeben, und aus denen folgt:

$$ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_5^2 = R^2 \cdot \frac{dy^2 + dy_1^2 + dy_2^2}{y^2},$$

eine Form des Linienelementes, die bekanntlich auf die (A) für den pseudosphärischen Raum transformirbar ist. Man kann diese Form des Linienelementes durch die Formeln:

$$y = \frac{\eta}{\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2}; \quad y_1 = \frac{\eta_1}{\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2}; \quad y_2 = \frac{\eta_2}{\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2}$$

in sich selbst überführen. Es erledigt sich hierdurch ein früher von Herrn R. Beez bezüglich der Verbiegbarkeit solcher Räume erhobenes Bedenken (vgl. Schlömilch's Journal, Bd. XXI, S. 377) und zwar in demjenigen Sinne, wie ich es in einer Besprechung seines Aufsatzes (Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik, Bd. 9, S. 513) vorausgesagt hatte und wie es die Untersuchungen des Herrn Monro (Proceed. London Math. Society, 9. Bd.) andererseits bestätigt haben.

Tübingen, im Juni 1885.

Beispiele zu den Cremona'schen ebenen Transformationen.

Von

Rudolf Sturm in Münster i./W.

Zur Einführung in die Theorie der rationalen (eindeutigen) Transformationen in der Ebene*) scheint es wünschenswerth, Beispiele voranschicken zu können, insbesondere solche, bei denen die beiden Netze verschieden sind. Mit Hülfe zweier verschiedener eindeutiger Abbildungen der cubischen Fläche auf eine Ebene gelangt man leicht zu solchen Beispielen.

1. *Es seien Σ, Σ' gegeben als Träger der Felder, zwischen denen eine Cremona'sche Verwandtschaft hergestellt werden soll, F^3 eine feste cubische Fläche, u, v zwei windschiefe Gerade auf ihr (ein Dupel), R' eine cubische Raumcurve der Fläche. Die Zahl der Schnitte von u, bez. v mit R' sei σ, bez. τ*; so dass wir, indem wir annehmen: $\sigma \geqq \tau$, sechs Fälle haben:

$$1)\ \sigma = \tau = 0;\quad 2)\ \sigma = 1,\ \tau = 0;\quad 3)\ \sigma = \tau = 1;\quad 4)\ \sigma = 2,\ \tau = 0;$$
$$5)\ \sigma = 2,\ \tau = 1;\quad 6)\ \sigma = \tau = 2.$$

Es ist bekannt, dass unter den Geraden, welche u, v treffen (Bisecanten von u, v) 5 und von den Bisecanten von R' 6 auf der Fläche F^3 liegen**). Zu letzteren gehört in 4), 5) die Gerade u, in 6) beide Geraden u, v.

Von einem beliebigen Punkt X von Σ sei die Bisecante von (u, v) gezogen, welche F^3 zum dritten Male in $\mathfrak{X}$ schneidet; die Bisecante von R' aus $\mathfrak{X}$ treffe Σ' in X'; so ist dadurch zwischen Σ, Σ' eine eindeutige Beziehung hergestellt. Bewegt sich X auf einer Geraden x, so beschreibt die erste Bisecante eine Fläche 2. Grades, der Punkt $\mathfrak{X}$ eine Raumcurve 4. Ordnung (zweiter Species) R^4, welche der R' in $6-(\sigma+\tau)$ Punkten begegnet; denn so oft trifft R' jene Fläche

---

*) Cremona, Memorie dell' Istituto di Bologna t. II, V; Giornale di Matematiche Bd. I, S. 305, Bd. III, S. 269, 363. Bulletin des Sciences mathém. Bd. V (1873) S. 206 (in der Bearbeitung des Herrn Dewulf).

**) Cf. z. B. meine „Flächen 3. Ordnung" Nr. 21, 58.

ausserhalb u, v. Die an einer Geraden x' von Σ' hingleitende Bisecante von R' beschreibt eine Regelfläche 4. Grades, auf der R' doppelt ist und die der R^4 demnach ausserhalb R' in $16-2[6-(\sigma+\tau)] = 4+2(\sigma+\tau)$ Punkten begegnet. *Der Grad der eindeutigen Verwandtschaft ist also* $4+2(\sigma+\tau)$, in den 6 Fällen 4, 6, 8, 8, 10, 12.

2. Es sei k die Zahl der gemeinsamen Bisecanten von (u, v) und R', welche sie in getrennten Punkten treffen und deshalb auf F^3 liegen. In den 3 letzten Fällen, wo mindestens u Bisecante von R' ist, ist $k=0$. In den drei andern Fällen ist der Grad der Fläche der Bisecanten von R', welche u treffen, $4-2\sigma$ und R' auf ihr $(2-\sigma)$-fach; v trifft diese Fläche ausserhalb R' in $(2-\sigma)(2-\tau)$ Punkten. Demnach ist:

$$k=(2-\sigma)(2-\tau),$$

was auch die 3 letzten Fälle mit umfasst; also einzeln in den 6 Fällen $k=4, 2, 1, 0, 0, 0$.

Demnach treffen von den 5 Geraden der Fläche, welche u und v schneiden, $l=5-(2-\sigma)(2-\tau)$ die Curve R' höchstens einmal.

Es sei $j'=2, 1, 0$, je nachdem u, v beide Bisecanten von R' sind oder nur u oder keine von beiden. So bleiben von den 6 Geraden der Fläche, welche R' zweimal treffen, $l'=6-j'-(2-\sigma)(2-\tau)$, welche mit keiner der Geraden u, v identisch sind und höchstens eine von ihnen treffen. In den 6 Fällen ist:

$$l=1, 3, 4, 5, 5, 5, \quad j'=0, 0, 0, 1, 1, 2, \quad l'=2, 4, 5, 5, 5, 4.$$

3. Suchen wir nun die *Hauptpunkte* in den beiden Feldern auf und die Ordnungen der ihnen entsprechenden Hauptcurven. Die Hauptpunkte in Σ ergeben sich auf drei Arten:

a) Die beiden Spuren U, V von u, v in Σ sind Hauptpunkte. Dem U z. B. entspricht als Punkt $\mathfrak{X}$ jeder beliebige Punkt des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^2$, den die Ebene Uv ausschneidet; R' trifft v in τ, also $\mathfrak{K}^2$ in $3-\tau$ Punkten, und die Curve, welche durch die an $\mathfrak{K}^2$ hingleitende Bisecante von R' in Σ' eingeschnitten wird, ist deshalb von der Ordnung $2(1+\tau)$.

Also ist U ein $2(1+\tau)$-facher und V ein $2(1+\sigma)$-facher Hauptpunkt.

b) Die Spuren der k gemeinsamen Bisecanten von (u, v) und R' sind nicht Hauptpunkte. Hingegen führt die Spur von jeder der l Bisecanten von (u, v), welche R' höchstens einmal treffen, zu einem Hauptpunkte. Der zugehörige Punkt $\mathfrak{X}$ durchläuft die Bisecante und man findet leicht, dass durch X' in Σ' ein Kegelschnitt oder eine Curve 4. Ordnung entsteht, je nachdem die Bisecante die R' einmal oder gar nicht trifft. Sei l_1, bez. l_0 die Zahl derjenigen der l Geraden, bei denen jenes oder dies geschieht. Zwischen der Ordnung n einer

auf einer cubischen Fläche befindlichen Curve und den Zahlen s, s', $q_1, q_2, \ldots, q_5$ ihrer Schnitte mit den Geraden eines Dupels und den 5 auf der Fläche befindlichen Bisecanten desselben habe ich anderwärts*) folgende Relation gefunden:

$$3n = 2(s + s') + \Sigma q_i.$$

Auf R' und (u, v) angewandt lautet sie:

$$9 = 2(\sigma + \tau) + 2k + l_1;$$

mithin:

$$l_1 = 3 - 2(1 - \sigma)(1 - \tau), \quad l_0 = \sigma\tau;$$

im Einzelnen in den 6 Fällen:

$$l_1 = 1, 3, 3, 5, 3, 1; \quad l_0 = 0, 0, 1, 0, 2, 4.$$

c) Wenn A', B', C' die 3 Spuren von R' in Σ' sind, so haben die 3 Punkte in Σ, deren nach (u, v) gehende Bisecanten die F^3 zum dritten Male in den dritten Schnitten der Verbindungsgeraden $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ treffen, diese Geraden zu entsprechenden und sind deshalb einfache Hauptpunkte in Σ.

Wir haben also in Σ einen $2(1 + \tau)$-fachen, einen $2(1 + \sigma)$-fachen, $\sigma\tau$ vierfache, $3 - 2(1 - \sigma)(1 - \tau)$ doppelte, 3 einfache Hauptpunkte, insgesammt $6 + 2(\sigma + \tau) - \sigma\tau$ Hauptpunkte.

4. Die Hauptpunkte in Σ' hingegen kommen auf vier Weisen zu Stande:

a) Ist u (oder v) eine Bisecante von R', so sei U' ihre Spur in Σ'; die Fläche der Geraden, welche F^3 auf u tangiren und v treffen, ist eine cubische Regelfläche mit u als einfacher, v als doppelter Leitgeraden; sie schneidet in Σ die dem Punkte U' entsprechende Hauptcurve ein; wir erhalten so j' dreifache Hauptpunkte.

b) Wir hatten l' auf F^3 gelegene Bisecanten von R' gefunden, welche nur eine der Geraden u, v treffen oder keine; sei l_1', l_0' die Zahl derjenigen unter ihnen, welche jenes oder dieses thun; den Schnitten der ersteren mit Σ' entsprechen Gerade, denen der letzteren Kegelschnitte in Σ. In dem Falle 6), wo $\sigma = \tau = 2$, ist $l_1' = 0$, $l_0' = 4$. Für die andern Fälle benutzen wir die Formel:

$$5n = 3s + \Sigma q_i$$

zwischen der Ordnung n einer auf F^3 befindlichen Curve und den Zahlen ihrer Schnitte $s, q_1, q_2, \ldots, q_6$ mit einer cubischen Raumcurve der Fläche und mit den 6 Geraden derselben, welche diese Raumcurve zweimal treffen**). In den Fällen 1), 2), 3), in denen $\sigma < 2$,

*) Math. Ann. Bd. 21, S. 458; Bd. 23, S. 300, 306.

**) Math. Ann. Bd. 21, S. 504, wo sie $3v = n + \Sigma q_i$ lautete, indem $s = 2n - v$ gesetzt war.

$j' = 0$, wenden wir sie auf (u, v) als Curve 2. Ordnung, in den Fällen 4), 5), in denen $\sigma = 2$, $k = 0$, auf v an und haben

$$10 = 3(\sigma + \tau) + 2k + l_1',$$

oder

$$l_1' = 2 + (\sigma + \tau) - 2\sigma\tau,$$

bez.

$$5 = 3\tau + l_1',$$

oder

$$l_1' = 5 - 3\tau.$$

Wir können alle 6 Fälle vereinigen in der Formel:

$$l_1' = 2 + \sigma + \tau - 2\sigma\tau + j';$$

also:

$$l_0' = l' - l_1' = \sigma + \tau + \sigma\tau - 2j';$$

demnach im Einzelnen:

$$l_1' = 2, 3, 2, 5, 2, 0; \quad l_0' = 0, 1, 3, 0, 3, 4.$$

c) Jeder der drei Kegel, welche R' aus A', B', C' projiciren, schneidet aus F^3 noch eine cubische Raumcurve R^3, welche von (u, v) in $4 - (\sigma + \tau)$ Punkten getroffen wird; demnach erzeugt die Bisecante von (u, v), welche an R^3 hingleitet, eine Fläche vom Grade $2 + \sigma + \tau$, die in Σ die entsprechende Curve einschneidet; A', B', C' sind also $(2 + \sigma + \tau)$-fache Hauptpunkte.

d) Die Bisecante von R', welche vom dritten Schnitte der Geraden UV mit F^3 ausgeht, trifft Σ' in einem Hauptpunkte, dem in Σ die Gerade UV entspricht; so ergiebt sich noch ein einfacher Hauptpunkt.

Wir haben demnach in Σ' *drei* $(2 + \sigma + \tau)$*-fache*, j' *dreifache*, $\sigma + \tau + \sigma\tau - 2j'$ *zweifache*, $3 + \sigma + \tau - 2\sigma\tau + j'$ *einfache Hauptpunkte; insgesammt* $6 + 2(\sigma + \tau) - \sigma\tau$, also ebenso viele wie in der andern Ebene, entsprechend dem interessanten Satze, welchen Cremona a. a. O. gefunden und Clebsch*) später noch auf eine andere Art bewiesen hat.

5. Bezeichnen wir, wie Herr Cremona, die Zahlen der r-fachen Hauptpunkte in Σ, bez. Σ' bez. mit x_r, y_r, so haben wir im Einzelnen in den 6 Fällen folgende Transformationen:

$\sigma = \tau = 0$; $n = 4$; $x_1 = y_1 = 3$, $x_2 = y_2 = 3$.

$\sigma = 1$, $\tau = 0$; $n = 6$; $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_4 = 1$;
$y_1 = 4$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$.

$\sigma = \tau = 1$; $n = 8$; $x_1 = y_1 = 3$, $x_2 = y_2 = 3$, $x_4 = y_4 = 3$.

$\sigma = 2$, $\tau = 0$; $n = 8$; $x_1 = 3$, $x_2 = 6$, $x_6 = 1$;
$y_1 = 6$, $y_3 = 1$, $y_4 = 3$.

*) Math. Ann. Bd. 4, S. 490.

$\sigma = 2, \quad \tau = 1; \quad n = 10; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 3, \quad x_4 = 3, \quad x_6 = 1;$
$y_1 = 3, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 1, \quad y_5 = 3.$

$\sigma = \tau = 2; \quad n = 12; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 1, \quad x_4 = 4, \quad x_6 = 2;$
$y_1 = 1, \quad y_2 = 4, \quad y_3 = 2, \quad y_6 = 3.$

In Bezug auf die 5 ersten Transformationen vergleiche man die Tabellen bei Cremona, Cayley*), S. Roberts**). — Der Umstand, dass es auf der F^3 von jeder Ordnung n eine Curve giebt, welche von mindestens einer Geraden der Fläche in $n-1$ Punkten getroffen wird***), gestattet die obige Construction beliebig zu vervielfältigen.

Münster i./W., Februar 1885.

---

*) Proc. London Math. Soc. Bd. 3, S. 143.
**) Ebenda Bd. 4, S. 130.
***) Math. Ann. Bd. 21, S. 477.

Ueber die Galois'sche Gruppe der Modulargleichungen, wenn der Transformationsgrad die Potenz einer Primzahl > 2 ist*).

Von

Joseph Gierster in Bamberg.

§ 1.

Definition der Gruppe.

Es sei die in der Ueberschrift angeführte Gruppe im Folgenden immer mit G bezeichnet und es sei festgesetzt, dass q eine Primzahl grösser als 2 und n eine ganze Zahl grösser als 1 sei.

Die Gruppe G besteht dann in ihrer reellen Darstellungsform aus allen Substitutionen

$$S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \varphi\left(\frac{\alpha-\delta}{2}, \beta, \gamma\right) \equiv \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} \text{ mod. } q^n,$$

wo α, β, γ, δ ganze Zahlen der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \text{ mod. } q^n$$

sind. Hierbei sind jedoch die Substitutionen $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, und $f(-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta)$ als identisch aufzufassen. Um ferner die durch φ zu bezeichnende Substitution vollkommen zu bestimmen, muss ausser den 3 Grössen $\frac{\alpha-\delta}{2}$, β, γ noch die zugehörige Wurzel $u = \frac{\alpha+\delta}{2}$ der Congruenz $u^2 \equiv 1 + \left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)^2 + \beta\gamma$ mod. q^n angegeben sein. Für die Substitutionen der sogleich zu erwähnenden Gruppe E sowie der später auftretenden Gruppen F hat letztere Congruenz immer zwei Wurzeln u. Um nun für *diese* Substitionen das Functionszeichen φ eindeutig aus den 3 angegebenen Werthen zu bestimmen, sei festgesetzt, dass dann stets diejenige Wurzel gewählt werden soll, welche $\equiv 1$ mod. q ist.

Modulo q sind die Substitutionen S zu $\frac{q(q^2-1)}{2}$ verschiedenen Substitutionen congruent, welche die Galois'sche Gruppe der Modulargleichungen für den Transformationsgrad q bilden.

---

*) Vergl. eine vorläufige Mittheilung in den Berichten der k. sächs. Ges. d. Wiss. vom 1. Juni 1885.

Die Gruppe G enthält eine im allgemeinen*) umfassendste ausgezeichnete Untergruppe E, welche von den $q^{3(n-1)}$ Substitutionen

$$U = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_1 \equiv \frac{(u + \mu q)\,\omega + \nu q}{\varrho q \omega + (u - \mu q)} \text{ mod. } q^n,$$

$$\mu, \nu, \varrho = 1, 2, \cdots, q^{n-1}$$

gebildet wird. E enthält also alle Substitutionen von G, die mod. q zur Identität congruent sind.

Ist S eine beliebige Substitution von G, so giebt es gerade q^{3n-3} Substitutionen, welche mod. q zu S congruent sind. Es sind diess die q^{3n-3} Substitutionen $S' = SU$. Demnach ist die Ordnung von G dargestellt durch

$$N = q^{3n-2} \cdot \frac{q^2 - 1}{2}.$$

Die Gruppe E enthält ferner die ausgezeichneten Untergruppen $E_2, E_3, \ldots, E_\tau, \ldots, E_{n-1}$. Die Gruppe E_τ besteht aus den $q^{3\sigma} = q^{3(n-\tau)}$ Substitutionen

$$U_\tau = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau \equiv \frac{(u + \mu q^\tau)\,\omega + \nu q^\tau}{\varrho q^\tau \omega + (u - \mu q^\tau)} \text{ mod. } q^n,$$

$$u^2 \equiv 1 + \Pi q^{2\tau}, \quad \Pi = \mu^2 + \nu\varrho, \quad u \equiv 1 \text{ mod. } q$$

wobei die Zahlen μ, ν, ϱ alle Reste mod. q^σ beschreiben.

Die letzte von diesen Gruppen E_{n-1} enthält die q^3 Substitutionen

$$U_{n-1} \equiv \frac{(1 + \mu q^{n-1})\,\omega + \nu q^{n-1}}{\varrho q^{n-1} \omega + (1 - \mu q^{n-1})} \text{ mod. } q^n,$$

$$\mu, \nu, \varrho = 0, 1, 2, \cdots, q - 1.$$

In der im Folgenden gelegentlich verwendeten imaginären Gestalt**) von G hat die allgemeine Substitution S die Form:

$$S = f(A, B, C, D) \equiv \frac{A\omega + B}{C\omega + D} \text{ mod. } q^n,$$

$$A = a + d\sqrt{N}, \qquad D = a - d\sqrt{N},$$

$$B = b + c\sqrt{N}, \qquad C = b - c\sqrt{N},$$

$$AD - BC \equiv 1 \text{ mod. } q^n.$$

---

*) Nur wenn $q = 3$ ist, wird E nicht die umfassendste ausgezeichnete Untergruppe sein. Letztere hat dann vielmehr die Ordnung $4 \cdot 3^{3n-3}$.

**) Ich verweise in Bezug auf diese imaginären Gestalten der Gruppe G auf meine Arbeit: „Die Untergruppen der Galois'schen Gruppe etc. Math. Annalen Bd. XVIII, pag. 319 ff. Die Einführung der imaginären Gestalten von G ist nicht nur zweckmässig, sondern in manchen Fällen dem Wesen der Sache nach nicht zu vermeiden.

Hierbei bedeuten a, b, c, d irgend welche der letzten Bedingung genügende Reste mod. q^n, ferner ist N ein beliebiger jedoch fester quadratischer Nichtrest von q^n und $\sqrt{N}$ ist eine Galois'sche Imaginäre, welche formal durch die Congruenz

$$(\sqrt{N})^2 \equiv N \text{ mod. } q^n$$

definirt wird. Die Substitutionen der imaginären Gestalt der Gruppe sollen ebenso bezeichnet werden, wie jene der reellen. Insbesondere sollen die Substitutionen von E_τ in der imaginären Gestalt wieder durch

$$\varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$$

dargestellt sein, nur dass μ, ν, ϱ hier folgende Formen haben:

$$\mu = d\sqrt{N}, \quad \nu = b + c\sqrt{N}, \quad \varrho = b - c\sqrt{N}.$$

§ 2.

Einige Hülfssätze.

I. Es seien $S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ und $S' = f(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ zwei Substitutionen von G, welche nicht der Gruppe E angehören, es sei ferner $\Delta = \left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right)^2 - 1$, $\Delta' = \left(\frac{\alpha' + \delta'}{2}\right)^2 - 1$, dann folgt:

(*a*) *Ist* $\Delta \gtrless 0$ *mod.* q, *dann ist* $\alpha' + \delta' \equiv \pm(\alpha + \delta)$ *mod.* q^n *die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass* S *und* S' *gleichberechtigt sind**);

(*b*) *Wenn dagegen* $\Delta \equiv 0$ *mod.* q *ist, so muss* $\Delta \equiv \Delta'$ *mod.* q^n *sein und ausserdem muss noch eine der Grössen* $-\beta'(\alpha' + \delta')$, $\gamma'(\alpha' + \delta')$ *denselben quadratischen Charakter* $+1$ *oder* -1 *mod.* q *haben wie* $-\beta(\alpha + \delta)$ *oder* $\gamma(\alpha + \delta)$.

Beweis. Sollen S und S' gleichberechtigt sein, so muss eine Substitution $P = f(x, y, z, t)$ von G existiren, so dass $PS = S'P$ ist. Diess giebt, wenn $\varepsilon = \pm 1$ gesetzt wird, die folgenden Bedingungen:

$$(\mathrm{I}) \quad \left.\begin{array}{ll} (1) & (\varepsilon\alpha - \alpha')\,x + \varepsilon\gamma y - \beta' z \equiv 0, \\ (2) & (\varepsilon\alpha - \delta')\,z + \varepsilon\gamma t - \gamma' x \equiv 0, \\ (3) & (\varepsilon\delta - \alpha')\,y + \varepsilon\beta x - \beta' t \equiv 0, \\ (4) & \varepsilon\beta z - \gamma' y + (\varepsilon\delta - \delta')\,t \equiv 0, \\ (5) & xt - yz \equiv 1 \end{array}\right\} \text{mod. } q^n.$$

Bildet man hieraus die durch (1) t + (4) x − (2) y − (3) $y \equiv 0$ angedeutete Congruenz, so kommt $(xt - yz)(\varepsilon\alpha + \varepsilon\delta - \alpha' - \delta') \equiv 0$, also wegen (5)

*) Hiernach ist die Angabe 2 pag. 294 der oben erwähnten Mittheilung abzuändern.

(6a) $\varepsilon(\alpha + \delta) \equiv \alpha' + \delta'$ mithin auch (6b) $\Delta \equiv \Delta'$ mod. q^n

als nothwendige Bedingung für das Bestehen der Congruenzen (I).

Es sei jetzt der Einfachheit halber angenommen, dass $\gamma \gtrless 0$ mod. q*) sei, dann kommt aus (1) und (2)

$$(7) \qquad y \equiv \frac{\beta' z + (\alpha' - \varepsilon\alpha)\, x}{\varepsilon\gamma}, \quad t \equiv \frac{\gamma' x + (\delta' - \varepsilon\alpha)\, z}{\varepsilon\gamma} \text{ mod. } q^n,$$

welche Werthe in (5) eingesetzt, die Bedingung

$$(8) \qquad \varepsilon\gamma \equiv \gamma' x^2 + (\delta' - \alpha')\, xz - \beta' z^2 \text{ mod. } q^n$$

ergeben**). Ist jetzt (6a) erfüllt, bilden ferner x, z eine Lösung von (8) und sind y, t aus den Congruenzen (7) bestimmt, so werden, wie man sich durch Einsetzen überzeugt, die Bedingungen (3) und (4) von selbst erfüllt und die Substitution $P = f(x, y, z, t)$ genügt der Gleichung $PS = S'P$***)

Es handelt sich also noch um die Lösbarkeit der Congruenz (8). Da S' nicht der Gruppe E angehört, so kann nicht gleichzeitig $\gamma' \equiv \delta' - \alpha' \equiv \beta' \equiv 0$ mod. q sein. Es sind demnach 2 Fälle zu unterscheiden:

$$(a) \qquad \Delta' \equiv \left(\frac{\delta' - \alpha'}{2}\right)^2 + \beta'\gamma' \equiv \left(\frac{\delta' + \alpha'}{2}\right)^2 - 1 \gtrless 0 \text{ mod. } q,$$

$$(b) \qquad \Delta' \equiv 0 \text{ mod. } q.$$

Im ersten Falle giebt es immer Lösungen der Congruenz (8), im zweiten Falle aber nur dann, wenn $\varepsilon\gamma$ denselben quadratischen

---

*) Wäre $\gamma \equiv 0$ mod. q, so könnte man an Stelle von S eine zu S gleichberechtigte Substitution S'' nehmen, für welche $\gamma'' \gtrless 0$ mod. q ist. Ist nämlich $V = f(a, b, c, d)$, so hat die Substitution $S'' = VSV^{-1}$ ein $\gamma'' = d^2\gamma + cd(\alpha - \delta) - c^2\beta$. Da aber nicht zugleich $\gamma \equiv \alpha - \delta \equiv \beta \equiv 0$ mod. q sein kann, weil sonst gegen die Voraussetzung S eine Substitution der Untergruppe E wäre, so kann man immer $\gamma'' \gtrless$ mod. q machen.

**) Ist $\beta \gtrless 0$ mod. q, so kann man statt der Gleichungen (7) und (8) auch schreiben:

$$(7') \qquad x \equiv \frac{\beta' t + (\alpha' - \varepsilon\delta)\, x}{\varepsilon\beta}, \quad z \equiv \frac{\gamma' y + (\delta' - \varepsilon\delta)\, t}{\varepsilon\beta},$$

$$(8') \qquad \varepsilon\beta \equiv \beta' t^2 + (\alpha' - \delta')\, yt - \gamma' y^2 \text{ mod. } q^n.$$

***) Man bemerke hierbei, dass ausser im Falle $\alpha + \delta \equiv 0$ mod. q^n (S hat dann die Periode 2) aus (6a) der Werth von ε bestimmt ist. Hat man die Vorzeichen von $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ passend gewählt, so wird $\varepsilon = 1$ und man hat für den Fall $\alpha + \delta \gtrless 0$ mod. q^n die einfacheren Bedingungen: $\alpha' + \delta' \equiv \alpha + \delta$, $\gamma \equiv \gamma' x^2 + (\delta' - \alpha')\, xz - \beta' z^2$ mod. q^n. Ist aber $\alpha + \delta \equiv 0$ mod. q^n, so kann $\varepsilon = +1$ und -1 sein und man hat daher ausser $\alpha' + \delta' \equiv \alpha + \delta$ die beiden Congruenzen in Betracht zu ziehen, welche man aus (8) erhält, wenn man $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = -1$ setzt.

Charakter mod. q hat, wie γ', oder, falls $\gamma' \equiv 0$ mod. q sein sollte, wie $-\beta'$. Diess war aber zu beweisen.

Auch der entsprechende Satz für die Substitutionen der Gruppe E lässt sich ohne Schwierigkeit ableiten*). Derselbe lautet: *Sollen* $S = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$ *und* $S' = \varphi(\mu', \nu', \varrho')_\tau$, *welche beide der Gruppe* E_τ, *nicht aber der Gruppe* $E_{\tau+1}$ *angehören (so dass nicht gleichzeitig* $\mu \equiv \nu \equiv \varrho \equiv 0$ *oder* $\mu' \equiv \nu' \equiv \varrho' \equiv 0$ *mod.* q *sein kann), gleichberechtigt sein, so muss*

$$\Pi = \mu^2 + \nu\varrho \equiv \Pi' = \mu'^2 + \nu'\varrho' \text{ mod. } q^\sigma$$

$$\sigma = n - \tau$$

sein. Diese Bedingung reicht aber für den Fall $\Pi \gtrless 0$ *mod.* q *zur Gleichberechtigung von* S *und* S' *auch hin. Ist jedoch* $\Pi \equiv 0$ *mod.* q, *so muss ausserdem eine der Grössen* ν', $-\varrho'$ *denselben quadratischen Charakter* $+1$ *oder* -1 *haben, wie* ν *oder, falls* $\nu \equiv 0$ *mod.* q *sein sollte, wie* $-\varrho$.

II. *Ist* r *die Anzahl aller Substitutionen* W_i *von* G *(inclusive der Identität), welche der Bedingung*

$$W_i S W_i^{-1} = S \tag{9}$$

genügen und es giebt eine Substitution V, *für welche*

$$V S V^{-1} = S^\nu \tag{10}$$

ist, so giebt es genau r *Substitutionen, welche diese Bedingung erfüllen.*

Beweis. Offenbar haben nämlich die r Substitutionen $V_i = V W_i$ diese Eigenschaft. Wäre ausser diesen noch eine weitere etwa V' vorhanden, so würde $V^{-1} V'$ der Bedingung (9) genügen; sie würde also eine der r Substitutionen W_i sein und es käme $V' = V W_i$, was gegen die Annahme ist.

III. *Ist* $S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *eine Substitution von* G, *aber nicht von* E, *welche eine von 2 verschiedene Periode hat, so sind alle Substitutionen* W_ξ *von* G, *welche der Bedingung* (9) *genügen, durch*

$$W_\xi = f\left(u + \frac{\alpha - \delta}{2}\xi, \beta\xi, \gamma\xi, u - \frac{\alpha-\delta}{2}\xi\right) = \varphi\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\xi, \beta\xi, \gamma\xi\right)$$

dargestellt, wobei ξ *und* u *alle jene (reellln) Werthe mod.* q^n *annehmen können, für welche die Congruenz*

$$u^2 \equiv 1 + \Delta\xi^2 \text{ mod. } q^n$$

erfüllt ist. Die Lösungen u, ξ *und* $-u$, $-\xi$ *sind dabei wieder als identisch zu betrachten. Es giebt also dann* q^n *Lösungen* W_i *der Congruenz* (9), *wenn* $\Delta \equiv 0$ *mod.* q *ist, es giebt* $\frac{q-1}{2}q^{n-1}$, *wenn* Δ

*) Siehe auch die Gleichungen § 5, II, 1.

quadratischer Rest und $\frac{q+1}{2}\,q^{n-1}$, *wenn* Δ *quadratischer Nichtrest von* q *ist.* Unter ihnen befinden sich immer q^{n-1} Substitutionen der Gruppe E, welche man erhält, wenn man $\xi = \zeta q$, $\zeta = 1, 2, \ldots, q^{n-1}$ setzt; sie bilden eine cyklische Gruppe der Ordnung q^{n-1}.

Beweis. Setzt man $W = f(x, y, z, t)$, so kommen aus den Congruenzen (I), damit die Relation $WSW^{-1} = S$ besteht, wegen $\alpha' \equiv \alpha$, $\beta' \equiv \beta$, $\gamma' \equiv \gamma$, $\delta' \equiv \delta$ mod. q^n, $\varepsilon = +1$ die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} y\gamma - z\beta \equiv 0, & z(\alpha - \delta) + (t - x)\gamma \equiv 0, \\ y(\delta - \alpha) + (x - t)\beta \equiv 0, & xt - yz \equiv 1 \end{array}\right\} \text{mod. } q^n.$$

Setzt man noch $t + x = 2u$, so erhält man hieraus die Werthe

$$y \equiv \beta\xi, \quad z \equiv \gamma\xi, \quad x \equiv u + \frac{\alpha - \delta}{2}\,\xi, \quad t \equiv u - \frac{\alpha - \delta}{2}\,\xi,$$

wobei $u^2 \equiv 1 + \Delta\xi^2$ mod. q^n ist. Es kann also ξ jeden Werth annehmen, für den die letzte Congruenz lösbar ist.

Ist jetzt $\Delta \equiv 0$ mod. q, so hat die obige Congruenz für jeden der q^n Werthe $\xi = 1, 2, \ldots, q^n$ je zwei Lösungen, von denen diejenige zu nehmen ist, welche $\equiv 1$ mod. q ist. Es giebt also dann q^n Substitutionen W_i. Ist Δ quadratischer Rest von q, so setze ich

$$u + \sqrt{\Delta}\,\xi = \varkappa, \quad u - \sqrt{\Delta}\,\xi = \lambda.$$

Dann nimmt die zu lösende Congruenz die einfache Gestalt $\varkappa\lambda \equiv 1$ mod. q^n an, welche $(q-1)\,q^{n-1}$ verschiedene Lösungen $\varkappa$, λ hat. Ihnen entsprechen ebensoviele verschiedene Werthsysteme

$$\xi = \frac{\varkappa - \lambda}{2\sqrt{\Delta}}, \quad u = \frac{\varkappa + \lambda}{2}.$$

Da ferner die Werthepaare u, ξ und $-u$, $-\xi$ die nämliche Substitution S liefern, so erhält man $\frac{q-1}{2}\,q^{n-1}$ Substitutionen W_i.

Ist Δ quadratischer Nichtrest von q, so hat man zunächst die q^{n-1} Werthe $\xi = q, 2q, 3q, \ldots, q^n$. Um die übrigen brauchbaren Werthe ξ ($\gtrless 0$ mod. q) zu finden, schreibe ich die zu behandelnde Congruenz in der Form an: $\left(\frac{u}{\xi}\right)^2 - \left(\frac{1}{\xi}\right)^2 \equiv \Delta$, welche wieder $\frac{q-1}{2}\,q^{n-1}$ verschiedene Substitutionen W_i liefert. Zusammen erhält man also hier $\frac{q+1}{2}\,q^{n-1}$ Substitutionen W_i.

In allen Fällen findet man die q^{n-1} Substitutionen W, welche der Gruppe E angehören, wenn man $\xi = \zeta q$, $\zeta = 1, 2, 3, \ldots, q^{n-1}$ setzt. Dass dieselben eine cyklische Gruppe bilden, folgt daraus, dass allgemein die Substitution $U = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_1$ von E die Periode q^{n-1} hat,

wenn nicht gleichzeitig $\mu \equiv \nu \equiv \varrho \equiv 0$ mod. q ist. In der That erhält man sehr leicht

$$U^\tau \equiv \varphi(\tau\mu, \tau\nu, \tau\varrho)_1 \text{ mod. } q^3,$$

also

$$U_1 = U^q \equiv \varphi(q\mu, q\nu, q\varrho)_1 \text{ mod. } q^3$$

und

$$\equiv \varphi(q\mu + mq^2, q\nu + nq^2, q\varrho + rq^2)_1 \text{ mod. } q^4.$$

Ferner erhält man

$$U_1^\tau \equiv \varphi(\tau q\mu + \tau mq^2, \tau q\nu + \tau nq^2, \ldots)_2 \text{ mod. } q^4,$$

also

$$U_1^q = U^{q^2} \equiv \varphi(\mu q^2, \nu q^2, \varrho q^2)_1 \text{ mod. } q^4.$$

Fährt man so fort, so kommt

$$U^{q^{n-2}} \equiv \varphi(\mu q^{n-2}, \nu q^{n-2}, \varrho q^{n-2})_1 \text{ mod. } q^n$$

und zum Schlusse $U^{q^{n-1}} \equiv \omega$ mod. q^n. Diess zeigt, dass U die Periode q^{n-1} hat, wenn nicht gleichzeitig $\mu \equiv \nu \equiv \varrho \equiv 0$ mod. q ist. Wenn nun U eine Substitution W_i ist, so ist diess offenbar auch mit allen Potenzen von U der Fall und da diese ebenfalls in der Gruppe E enthalten sind, so fallen sie mit den Substitutionen $W_{q\zeta}$ $(\zeta = 1, 2, \ldots, q^{n-1})$ zusammen.

Zusatz 1. Hat S die Periode 2, so dass $\alpha + \delta \equiv 0$ mod. q^n ist, so müssen in den Congruenzen (I) für ε die beiden Werthe $+1$ und -1 genommen werden und man erhält als Lösungen von (9) ausser den Substitutionen W_ξ noch die weiteren Substitutionen W_ξ', welche $\varepsilon = -1$ entsprechen und welche sämmtlich die Periode 2 haben, da $t + x \equiv 0$ mod. q^n wird.

Zusatz 2. *Die Substitutionen W_ξ bilden eine Gruppe.*

Setzt man nämlich

$$W_\xi = f\left(u + \frac{\alpha - \delta}{2}\,\xi, \cdots\right), \qquad W_\xi' = f\left(u' + \frac{\alpha - \delta}{2}\,\xi', \cdots\right),$$

so kommt

$$W_\xi W_{\xi'} = W_{u\xi' + u'\xi} = W_{\xi''}.$$

Zusatz 3. *Die Substitution $U = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$ von E_τ, für welche nicht zugleich $\mu \equiv \nu \equiv \varrho \equiv 0$ mod. q ist, hat die Periode $q^\sigma = q^{n-\tau}$ und die Potenzen von U sind dargestellt durch*

$$U^{\nu}\xi = \varphi(\mu\xi, \nu\xi, \varrho\xi)_\tau, \qquad \xi = 1, 2, 3, \ldots, q^\sigma.$$

Die erstere Behauptung folgt unmittelbar daraus, dass $U = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_1$ die Periode q^{n-1} hat. Um die letztere Behauptung einzusehen, bemerke man, dass nach Zusatz 2 die q^σ Substitutionen $U^{\nu}\xi$ eine Gruppe bilden und dass diese die Substitution U selbst enthält und damit alle Potenzen von U.

§ 3.

Die cyklischen Gruppen von G.

I. 1) Ist $S = f(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = f(1+x,\beta,\gamma,1+y)$ eine Substitution der Gruppe G, welche nicht der Untergruppe E angehört und für welche $\Delta \equiv 0$ mod. q, also $\alpha+\delta \equiv 2+\mu q$ mod. q^n ist, so findet man:

$$S^\nu \equiv \frac{\alpha_\nu\,\omega+\beta_\nu}{\gamma_\nu\,\omega+\delta_\nu} \tag{1}$$

$$= \frac{\left\{1+\nu x+\sum\limits_{\xi=1}^{\xi=\nu-1}\left[\binom{\nu+\xi}{2\xi+1}^{*)}x+\binom{\nu+\xi-1}{2\xi}\right]\mu^\xi q^\xi\right\}\omega+\beta\sum\limits_{\xi=0}^{\xi=\nu-1}\binom{\nu+\xi}{2\xi+1}\mu^\xi q^\xi}{\gamma\sum\limits_{\xi=0}^{\xi=\nu-1}\binom{\nu+\xi}{2\xi+1}\mu^\xi q^\xi\,\omega+\left\{1+\nu y+\sum\limits_{\xi=1}^{\xi=\nu-1}\left[\binom{\nu+\xi}{2\xi+1}y+\binom{\nu+\xi-1}{2\xi}\right]\mu^\xi q^\xi\right\}} \text{ mod. } q^n.$$

Setzt man jetzt $\nu = q^n$, so wird

$$\binom{\nu+\xi}{2\xi+1} = \frac{\nu(\nu^2-1)(\nu^2-4)\ldots(\nu^2-\xi^2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2\xi+1)}$$

durch die nämliche Potenz von q theilbar, wie $q^n\cdot\frac{\xi!\,\xi!}{(2\xi+1)!}$ *). Nun ist $\frac{(2\xi+1)!}{\xi!\,\xi!}$ höchstens durch q^λ theilbar**), wenn dieses die grösste Potenz

---

*) Es ist $\binom{n}{r} = \frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots r}$, $\xi! = 1\,.\,2\,.\,3\ldots\xi$ zu setzen.

**) Stellt man die Zahlen $m, n, r, \ldots, m+n+r+\cdots$ in der Form dar:

$$m = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_s q^s,$$
$$n = b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + \cdots + b_t q^t,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m+n+\cdots = c_0 + c_1 q + c_2 q^2 + \cdots + c_w q^w,$$

wobei die auftretenden Coefficienten a, b, c sämmtlich positiv und $< q$ sein müssen, so ist der Quotient $\frac{(m+n+r+\cdots)!}{m!\,n!\,r!\ldots}$ durch q^ε (aber durch keine höhere Potenz von q) theilbar, wenn ε die Zahl der Einheiten bedeutet, um welche man die Coefficienten höherer Potenzen von q vergrössern muss, um aus den obigen Darstellungen für $m, n, \ldots$ durch Addition diejenige von $m+n+\cdots$ abzuleiten. Aus den Darstellungen von m und n folgt z. B. $m+n = a_0+b_0+(a_1+b_1)q+\cdots$ Ist nun $a_0+b_0 > q$, so ist $c_0 = a_0+b_0-q$, da $a_0+b_0 < 2q$ ist; dagegen ist der Coefficient a_1+b_1 um 1 zu erhöhen. Nun ist entweder $a_1+b_1+1 < q$, dann ist es gleich c_1; oder es ist $\geqq q (< 2q)$, dann ist $c_1 = a_1+b_1+1-q$, dagegen ist a_2+b_2 um 1 zu vergrössern. Es ist nun $\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$ gerade durch q^ε theilbar, wenn ε die Zahl der Einheiten ist, um welche erhöht wird. Ist nun $m+n < q^{\lambda+1}$ aber $\geqq q^\lambda$, so ist offenbar $\varepsilon \leqq \lambda$.

von q ist, welche kleiner als $2\xi + 1$ ist. Also ist $\binom{\nu+\xi}{2\xi+1}$ mindestens durch $q^{n-\lambda}$ theilbar. Dasselbe gilt von $\binom{\nu+\xi-1}{2\xi}$. Demnach ist das allgemeine Glied jeder in S^ν vorkommenden Summe mindestens durch $q^{n-\lambda+\xi}$ und da offenbar $\xi \geq \lambda$ ist, durch q^n theilbar. Folglich ist $S^{q^n} \equiv \omega \text{ mod. } q^n$.

Ebenso findet man, wenn $\nu = q^{n-1}$ gesetzt wird, dass das ξ^{te} Glied jeder der auftretenden Summen durch $q^{n-1-\lambda+\xi}$ theilbar ist. Nun ist im allgemeinen $\xi > \lambda$, also $\xi - \lambda - 1 \geq 0$. Der Fall $\xi = \lambda$ tritt nur ein, wenn entweder $\xi = \lambda = 0$ oder $\xi = \lambda = 1$, $q = 3$ ist.*) Es kommt also für $q > 3$ das Resultat:

$$S^{q^{n-1}} \equiv \frac{(1+xq^{n-1})\,\omega + \beta q^{n-1}}{\gamma q^{n-1}\,\omega + (1+yq^{n-1})} \text{ mod. } q^n.$$

Ist demnach $q > 3$, so haben alle Substitutionen S der Gruppe G, welche nicht der Untergruppe E angehören und für welche $\Delta \equiv 0$ mod. q ist, die Periode q^n.

Ist hingegen $q = 3$, so kommt

$$S^{3^{n-1}} \equiv \frac{[1 + (1+\mu)x\,.\,3^{n-1}]\,\omega + (1+\mu)\,\beta\,.\,3^{n-1}}{(1+\mu)\gamma\,.\,3^{n-1}\,\omega + [1 + (1+\mu)\,y\,.\,3^{n-1}]} \text{ mod. } 3^n.$$

Ist also $q = 3$, so haben nur jene von den eben bezeichneten Substitutionen S die Periode 3^n, für welche $\mu \equiv 0$ oder $\mu \equiv 1$ mod. 3 ist. Ist aber $\mu \equiv -1 + t_0\,.\,3^{n-\varepsilon}$ mod. 3^{n-1}, wo $t_0 \lesseqgtr 0$ mod. 3 ist, so ist die Periode 3^ε. Hiebei kann ε die Werthe $\varepsilon = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ haben.

In dem letzten Falle findet man nämlich:

$$S^3 \equiv \frac{[1 - t_0\,.\,3^\eta(1+2\alpha) + \alpha t_0^2\,.\,3^{2\eta}]\,\omega - (2t_0\,.\,3^\eta - t_0^2\,.\,3^{2\eta})\,\beta}{-(2t_0 3^\eta - t_0^2\,.\,3^{2\eta})\,\gamma\omega + [1 - t_0\cdot 3^\eta(1+2\delta) + \delta t_0^2 3^{2\eta}]} \text{ mod. } 3^n,$$

wobei $\eta = n - \varepsilon + 1$ ist. Diese Substitution hat aber (§ 2, III) die Periode $3^{\varepsilon-1}$.

2. *Bemerken wir ferner dass die Potenzen S^{ν_ξ} von S, den letzten Fall ausgeschlossen, mit den Substitutionen W_ξ von § 2, III einzeln übereinstimmen ($S^{\nu_\xi} = W_\xi$).*

Denn die q^n Substitutionen W_ξ bilden eine Gruppe der Ordnung q^n, welche die Substitution $S = W_1$ der Periode q^n enthält.

Im ausgeschlossenen Falle $q = 3$, $\mu = -1 + t_0\,.\,3^{n-\varepsilon}$ enthält die Gruppe der W den Cyklus (S) der Periode 3^ε als Untergruppe und die Substitutionen S^{ν_ξ} ($\nu_\xi \gtrless 0$ mod. 3) sind identisch mit den Substitu-

---

*) Hierauf beruht die Ausnahmestellung von $q = 3$.

tionen $W_\xi(\xi = \pm 1 + m \cdot 3^{n-\epsilon+1},\ m = 0, 1, 2, \ldots, 3^{\epsilon-1} - 1)$. Dies folgt einfach aus der Congruenz:

$$S^{\pm 1 + 3r} = S^{\pm 1} \cdot S^{3r} \equiv S^{\pm 1} \text{ mod. } 3^{n-\epsilon+1}.$$

Es ist demnach:

$$(2) \qquad \Delta_{\nu_\xi} = \left(\frac{\alpha_{\nu_\xi} + \delta_{\nu_\xi}}{2}\right)^2 - 1 = u^2 - 1 = \Delta\,\xi^2 \text{ mod. } q^n.$$

II. Man kann jetzt leicht die Zahl der Substitutionen $S\,(\Delta \equiv 0$ mod. $q)$ bestimmen. Es sei zunächst

a) $\mu = 0$, also $\alpha + \delta \equiv 2$ mod. q^n, $\Delta \equiv 0$ mod. q^n.

Nach § 2, I giebt es 2 Gattungen solcher Substitutionen S. Für die eine Art ist eine der Grössen $-\beta$ oder γ quadratischer Rest von q, für die andere Nichtrest. Also ist S nur mit jenen Potenzen S^r gleichberechtigt, für welche r quadratischer Rest mod. q ist. Mod. q^n giebt es $\frac{q-1}{2}\, q^{n-1}$ solche Werthe. Da man q^n Lösungen W_i der Gleichung $W_i\, S\, W_i^{-1} = S$ hat (§ 2, III), so giebt es also (§ 2, II) gerade $\frac{q-1}{2}\, q^{2n-1}$ Lösungen V von $V S V^{-1} = S^r$. Ein Cyklus (S) geht mithin durch Transformation in Bezug auf $s = \frac{q-1}{2}\, q^{2n-1}$ Substitutionen in sich über. Durch Transformation in Bezug auf alle $N = \frac{q^2-1}{2} \cdot q^{3n-2}$ Substitutionen von G geht er demnach in $N : s = (q+1)\, q^{n-1}$ gleichberechtigte Cyklen über. Bemerkt man ferner, dass alle Cyklen $\Delta \equiv 0$ mod. q^n nach § 2, I gleichberechtigt sind, da sie ja Substitutionen der einen und der andern Gattung enthalten, so folgt das Resultat:

(A) *Es giebt $(q+1)\, q^{n-1}$ gleichberechtigte Cyklen G_{q^n} (I) der Periode q^n. Für sie ist $\Delta \equiv 0$ mod. q^n.*

Ein Beispiel eines solchen Cyklus ist $(\omega' \equiv \omega + 1$ mod. $q^n)$.

b) Sei jetzt $\alpha + \delta \equiv 2 + s_1 q^{n-\epsilon}$, also $\Delta \equiv s_0 q^{n-\epsilon}$ mod. q^n, wobei $\epsilon = 1, 2, \ldots, n-1$ sein kann und s_0 und $s_1 \gtrless 0$ mod. q zu nehmen sind.

Es giebt wieder q^n Lösungen der Congruenz (9) nämlich

$$W_i = S^\nu (\nu = 1, 2, \ldots, q^n).$$

Soll ferner S mit S^{ν_ξ} gleichberechtigt sein, so muss nach § 2, I zunächst $\Delta_{\nu_\xi} \equiv \Delta$ mod. q^n sein. Dies giebt aber nach (2) die Bedingung

$$(\xi^2 - 1)\, \Delta \equiv 0 \text{ mod. } q^n.$$

Wegen der Annahme $\Delta \equiv s_0 q^{n-\epsilon}$ mod. q^n folgt hieraus $\xi \equiv \pm 1$ mod. q^ϵ, also $\xi = \pm 1 + m q^\epsilon$, $m = 1, 2, \ldots, q^{n-\epsilon}$.

Die Bedingung $\Delta_{v_\xi} \equiv \Delta$ mod. q^n reicht aber zur Gleichberechtigung von S und S^{v_ξ} nicht aus. Es muss noch gleichzeitig $-\beta'$ oder γ' denselben quadratischen Charakter $+1$ oder -1 mod. q haben wie $-\beta$ oder γ. Dies ist für die Werthe $\xi = 1 + mq^\varepsilon$ immer der Fall, für die Werthe $\xi = -1 + mq^\varepsilon$ jedoch nur dann, wenn -1 quadratischer Rest von q, also $q \equiv 1$ mod. 4 ist. Also hat die Gleichung $V_i S V_i^{-1} = S^{v_\xi}$, wenn $q \equiv 1$ mod. 4 ist, je q^n Lösungen (§ 2, III und II) für jeden der angegebenen $2q^{n-\varepsilon}$ Werthe ξ. Sie hat demnach im ganzen $2q^{2n-\varepsilon}$ Lösungen. Ist aber $q \equiv 3$ mod. 4, wobei der Fall $q = 3$, $\mu \equiv -1$ mod. 3 ausgeschlossen ist, so hat sie nur Lösungen für die ersteren Werthe von ξ, so dass die fragliche Anzahl nur $q^{2n-\varepsilon}$ ist.

Nun bemerke man, dass nach (2) die durch $\Delta \equiv s_0 q^{n-\varepsilon}$ mod. q^n charakterisirten Substitutionen jedenfalls 2 Arten von Cyklen $G_{q^n}(\Gamma', \varepsilon)$ bilden, von denen die eine Art nur Substitutionen enthält, für welche s_0 quadratischer Rest, die andere nur solche, für welche s_0 quadratischer Nichtrest von q ist. Die beiden Arten trennen sich fernerhin, wenn $q \equiv 1$ mod. 4 ist, wieder in je 2 Gattungen von Cyklen, so dass nur die Cyklen derselben Gattung unter einander gleichberechtigt sind. Wenn $(S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta))$ ein Repräsentant der einen Gattung ist, so ist $(S' = f(\alpha, \beta m, \gamma : m, \delta))$, wo m quadratischer Nichtrest mod. q ist, ein Repräsentant der andern. Ist aber $q \equiv 3$ mod. 4, so tritt eine solche Trennung nicht ein. Es ist dann S' mit S^{-1} also Cyklus (S') mit (S) gleichberechtigt. Daher kommt das Resultat:

(B) 1. *Es giebt $2j$ Gattungen von $\frac{q^2-1}{2j} q^{n+\varepsilon-2}$ gleichberechtigte Cyklen $G_{q^n}(\Gamma', \varepsilon)$ für $\varepsilon = 1, 2, \ldots, n-1$, welche durch $\Delta \equiv s_0 q^{n-\varepsilon}$ mod. q^n, $s_0 \gtrless 0$ mod. q bestimmt sind. Die einzelnen Gattungen sind durch den Charakter $\left(\frac{s_0}{\beta^2}\right)^{\frac{q-1}{2j}}$ oder $\left(\frac{s_0}{\gamma^2}\right)^{\frac{q-1}{2j}}$ mod. q von einander unterschieden. Hiebei hat j den Werth 1 oder 2, je nachdem $q \equiv 3$ oder $\equiv 1$ mod. 4 ist.*

Selbstverständlich hat der erstere der angegebenen Charaktere nur Sinn, wenn $\beta \gtrless 0$ mod. q ist und ebenso ist der letztere nur brauchbar, wenn $\gamma \gtrless 0$ mod. q ist. Zugleich können beide Grössen nicht $\equiv 0$ mod. q werden. Sind beide von 0 mod. q verschieden, so bemerke man, dass die 2 Charaktere denselben Werth haben, da ja

$$\Delta = \frac{1}{4}(\alpha - \delta)^2 + \beta\gamma \equiv 0 \text{ mod. } q$$

ist. Ist speciell $q \equiv 3$ mod. 4, so vereinigen sich dieselben zu dem Legendre'schen Zeichen $\left(\frac{s_0}{q}\right)$, d. h. zwei durch die Substitutionen

$S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $\Delta \equiv s_0 q^{n-\varepsilon}$ und $S' = f(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, $\Delta' \equiv s_0' q^{n-\varepsilon}$ mod. q^n erzeugte Cyklen sind dann und nur dann gleichberechtigt, wenn $\left(\frac{s_0}{q}\right) = \left(\frac{s_0'}{q}\right)$ ist. Ist hingegen $q \equiv 1$ mod. 4, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichberechtigung dieser Cyklen durch $\left(\frac{s_0}{\gamma^2}\right)^{\frac{q-1}{4}} \equiv \left(\frac{s_0'}{\gamma'^2}\right)^{\frac{q-1}{4}}$ mod. q dargestellt. Hiebei tritt, wenn $\gamma \equiv 0$ mod. q sein sollte, β an Stelle von γ und ebenso β' an Stelle von γ', wenn $\gamma' \equiv 0$ mod. q ist.

Der Charakter für $q \equiv 1$ mod. 4 leitet sich auf folgende Weise ab. Jedenfalls muss $\left(\frac{s_0}{q}\right) = \left(\frac{s_0'}{q}\right)$ sein. Also giebt es eine reelle Grösse ξ, so dass $\xi^2 \equiv \frac{s_0'}{s_0}$ mod. q^ε ist. Sollen jetzt die Cyklen (S) und (S') gleichberechtigt sein, so müssen es nach den obigen Entwicklungen auch die Substitutionen $S = \varphi\left(\frac{\alpha - \delta}{2}\xi, \beta\xi, \gamma\xi\right)$ und $S' = \varphi\left(\frac{\alpha' - \delta'}{2}, \beta', \gamma'\right)$ sein, deren Determinanten denselben Werth haben. Dies ist jedoch nach (§ 2, I), da hier $\left(\frac{-1}{q}\right) = 1$ ist, nur dann der Fall, wenn eine der Grössen $\beta\xi$, $\gamma\xi$ denselben quadratischen Charakter $+1$ hat, wie β' oder γ'. Sind etwa γ und γ' von 0 mod. q verschieden, so erhält man hieraus

$$\frac{\gamma'}{\gamma\xi} \equiv \eta^2, \quad \frac{\gamma'^2}{\gamma^2\xi^2} \equiv \eta^4, \quad \left(\frac{\gamma'^2}{\gamma^2\xi^2}\right)^{\frac{q-1}{4}} \equiv 1 \text{ mod. } q.$$

Setzt man in die letzte Congruenz den Werth von ξ^2 ein, so kommt die Bedingung

$$\left(\frac{s_0}{\gamma^2}\right)^{\frac{q-1}{4}} \equiv \left(\frac{s_0'}{\gamma'^2}\right)^{\frac{q-1}{4}} \text{ mod. } q.$$

Ist umgekehrt die letzte Bedingung erfüllt, so schliesst man leicht auf die Existenz einer Grösse ξ, so dass $\xi^2 \equiv \frac{s_0'}{s_0}$ mod. $q^{n-\varepsilon}$ und

$$\left(\frac{\gamma'}{q}\right) = \left(\frac{\gamma\xi}{q}\right) \text{ ist.}$$

Ausgeschlossen ist hiebei wieder der Fall $q = 3$, $\mu = -1$. Für ihn hat man die Resultate:

2. *Es giebt im Falle $q = 3$ immer 2 Gattungen von je $4 \,.\, 3^{2n-3}$ gleichberechtigten Cyklen Γ_{3^ε} der Ordnung 3^ε für $\varepsilon = 2, 3, \ldots, n-1$. Sie sind durch $\alpha + \delta \equiv -1 + t_1 \,.\, 3^{n-\varepsilon+1}$* oder *$\Delta \equiv -\frac{3}{4} + t_0\, 3^{n-\varepsilon+1}$ mod. 3^n definirt und zwar ist für die eine Gattung $t_0 \equiv 1$, für die andere $\equiv -1$ mod. 3.*

3. *Es giebt im Falle $q = 3$ immer $4 \,.\, 3^{2n-2}$ gleichberechtigte Cyklen Γ_3 der Ordnung 3. Für sie ist $\alpha + \delta \equiv -1$ mod. 3^n.*

Die Bedingung $\Delta(\xi^2-1)\equiv 0$ mod. 3^n liefert hier $\xi\equiv\pm 1+m.3^{n-1}$, $m=0,1,2$. Da aber nach § 2, I wegen $\Delta\equiv 0$ mod. 3 die Substitutionen S und S^{-1} nicht gleichberechtigt sind, so darf man nur die Werthe $\xi=1+m.3^{n-1}$, $m=0,1,2$ zulassen. Nach dem Satze I, 2 dieses Paragraphen sind aber die diesen 3 Werthen ξ entsprechenden Substitutionen W_ξ nur dann mit Potenzen von S identisch, wenn $\varepsilon>1$ ist. In diesem Falle hat also die Gleichung $VSV^{-1}=S^{\nu_\xi}$ je 3^n Lösungen für $\xi=1,\ 1+3^{n-1},\ 1+2.3^{n-1}$; sie hat also im ganzen 3^{n+1} Lösungen V. Ist aber $\varepsilon=1$, so hat man nur 3^n Lösungen für $\nu_\xi=1$. Hieraus folgen die angegebenen Resultate.

III. Für den Fall $\Delta\gtrless 0$ mod. q hat man den Satz:

(C) *Es giebt in der Gruppe* G $\frac{q+1}{2}q^{2n-1}$ *gleichberechtigte Cyklen* $G_{\frac{q-1}{2}q^{n-1}}$ *der Ordnung* $\frac{q-1}{2}q^{n-1}$ *und* $\frac{q-1}{2}q^{2n-1}$ *gleichberechtigte Cyklen* $G_{\frac{q+1}{2}q^{n-1}}$ *der Ordnung* $\frac{q+1}{2}q^{n-1}$. *Für die ersteren Cyklen ist* $\left(\frac{\Delta}{q}\right)=+1$, *für die letzteren* $=-1$.

Zum Beweise bemerke man, dass die Gruppe G Substitutionen der Perioden $\frac{q-1}{2}$ und $\frac{q+1}{2}$ enthält, für welche bez. $\left(\frac{\Delta}{q}\right)=+1$ oder -1 ist, da dies ja mod. q der Fall ist. Sei jetzt etwa T' eine Substition der Periode $\frac{q-1}{2}$. Dann giebt es nach § 2, III eine Substitution W_ξ der Ordnung q^{n-1} von E, so dass $WT'=T'W$ ist. Dann hat aber $T=WT'$ die Periode $\frac{q-1}{2}q^{n-1}$. Es ist dann wieder klar, dass die Potenzen T^{ν_ξ} von T mit den $\frac{q-1}{2}q^{n-1}$ Substitutionen W_ξ (§ 2, III) übereinstimmen und dass also wieder $\Delta_{\nu_\xi}=\xi^2\Delta$ ist. Hieraus folgt nach § 2, I, dass alle Cyklen unter sich gleichberechtigt sind, welche $\left(\frac{\Delta}{q}\right)=1$ entsprechen und ebenso alle Cyklen, für welche $\left(\frac{\Delta}{q}\right)=-1$ ist. Ferner folgt, dass die Gleichung $VTV^{-1}=T^{\nu_\xi}$ nur Lösungen hat, wenn $\Delta(\xi^2-1)\equiv 0$, also $\xi\equiv\pm 1$ mod. q^n ist. Da überdies Gl. (6a) von § 2 erfüllt sein muss, so kommt $\nu_\xi=1$ oder -1. Also ist die Zahl aller Lösungen V durch

$$2\cdot\frac{q-1}{2}q^{n-1}=(q-1)\,q^{n-1}$$

dargestellt, was zu beweisen war.

Damit sind die Substitutionen von G erschöpft. In der folgenden Tabelle gebe ich eine Zusammenfassung der Resultate.

A. Tabelle der Cyklen von G.

I. $q > 3$.

1) $(q+1)\,q^{n-1}$ gl. G_{q^n} (I)*), $\Delta \equiv 0 \text{ mod. } q^n$;

1') $2j$ Gattungen von $\frac{q^2-1}{2j}\, q^{n+\varepsilon-2}$ gl. $G_{q^n}(\mathrm{I}', \varepsilon)$ für $\varepsilon = 1, 2, \ldots, n-1$,

$\Delta \equiv s_0 q^{n-\varepsilon} \text{ mod. } q^n$; Ch: $\left(\frac{s_0}{q}\right)$, wenn $q \equiv 3 \text{ mod. } 4$,

$\left(\frac{s_0}{\gamma_0^2}\right)^{\frac{q-1}{4}}$ oder $\left(\frac{s_0}{\beta_0^2}\right)^{\frac{q-1}{4}}$ mod. q, wenn $q \equiv 1 \text{ mod.} 4$ ist;

2) $\frac{q+1}{2}\, q^{2n-1}$ gl. $G_{\frac{q-1}{2}\, q^{n-1}}$, $\left(\frac{\Delta}{q}\right) = 1$;

3) $\frac{q-1}{2}\, q^{2n-1}$ gl. $G_{\frac{q+1}{2}\, q^{n-1}}$, $\left(\frac{\Delta}{q}\right) = -1$.

II. $q = 3$.

1) $4 \cdot 3^{n-1}$ gl. G_{3^n} (I), $\Delta \equiv 0 \text{ mod. } 3^n$;

1') α) 2 Gattungen von $4 \cdot 3^{n+\varepsilon-2}$ gl. $G_{3^n}(\mathrm{I}', \varepsilon)$, für $\varepsilon = 1, 2, \ldots, n-2$,

$\Delta \equiv s_0 \cdot 3^{n-\varepsilon} \text{ mod. } 3^n$; Ch.: $\left(\frac{s_0}{3}\right)$;

β) 1 Gattung von $4 \cdot 3^{2n-3}$ gl. $G_{3^n}(\mathrm{I}', n-1)$;

$\Delta \equiv 3 s_0 \text{ mod. } 3^n$; $\left(\frac{s_0}{3}\right) = 1$.

γ) 2 Gattungen von $4 \cdot 3^{2n-3}$ gl. Γ_{3^ε} für $\varepsilon = 2, 3, \ldots, n-1$,

$\Delta \equiv -\frac{3}{4} + t_0 \cdot 3^{n-\varepsilon+1}$; Ch.: $\left(\frac{t_0}{3}\right)$;

δ) $4 \cdot 3^{2n-2}$ gl. Γ_3, $\Delta \equiv -\frac{3}{4} \text{ mod. } 3^n$ oder

$\alpha + \delta \equiv -1 \text{ mod. } 3^n$;

2) 3^{2n-1} gl. $G_{2 \cdot 3^{n-1}}$, $\left(\frac{\Delta}{3}\right) = -1$.

Die angehängten Indices 0 sollen stets bedeuten, dass der Werth 0 mod. q für die betreffende Grösse auszuschliessen ist. Ferner ist

$$j = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{q}\right),$$

oder

$j = 1$, wenn $q \equiv 3 \text{ mod. } 4$, $j = 2$, wenn $q \equiv 1 \text{ mod. } 4$ ist.

*) gl. ist Abkürzung für „gleichberechtigt", Ch. bedeutet „Charakter", der Index, welcher dem einzelnen G angehängt ist, die Anzahl der Substitutionen der Gruppe.

§ 4.

Die Cyklen von E_τ.

I. Es werde zuerst der Fall $q > 3$ behandelt. Es seien dann die Cyklen der Perioden q^n, $\frac{q-1}{2}q^{n-1}$, $\frac{q+1}{2}q^{n-1}$ als Hauptcyklen von G bezeichnet.

Nun ist klar, das jeder Hauptcyklus von G einen Cyklus $G_{q^{n-1}}$ von E enthält. Ist der Hauptcyklus durch

$$S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \varphi\left(\frac{\alpha-\delta}{2}, \beta, \gamma\right)$$

erzeugt, so ist nach § 2 und § 3 die enthaltene $G_{q^{n-1}}$ von E durch

$$U_1^{(\xi)} = \varphi(\mu\xi, \nu\xi, \varrho\xi)_1 = \varphi\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\xi, \beta\xi, \gamma\xi\right)_1$$

dargestellt, wo nicht gleichzeitig $\mu \equiv \nu \equiv \varrho$ mod. q sein kann.*) Daraus erkennt man, dass für einen solchen durch $\varphi(\mu, \nu, \varrho)_1$ erzeugten Cyklus die Grösse

$$\Pi = \mu^2 + \nu\varrho \equiv \left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)^2 + \beta\gamma \equiv \Delta \text{ mod. } q^{n-1}$$

von Wichtigkeit ist. Wir unterscheiden sogleich, den Hauptcyklen entsprechend, die Fälle:

$$\Pi \equiv 0;\ \Pi \equiv s_0 q^{n-1-\varepsilon} (\varepsilon = 1, 2, \ldots, n-2) \text{ mod. } q^{n-1};\ \left(\frac{\Pi}{q}\right) = 1;\ \left(\frac{\Pi}{q}\right) = -1.$$

Umgekehrt ist jede $G_{q^{n-1}}$ von E in q^2 Hauptcyklen von G enthalten. Denn die Grössen μ, ν, ϱ kommen in $\varphi(\mu, \nu, \varrho)_1$ nur mod. q^{n-1} in Betracht und man erhält also zu einer solchen Substitution q^2 verschiedene Verhältnisse

$$\frac{\alpha-\delta}{2} : \beta : \gamma \equiv (\mu + m q^{n-1}) : (\nu + s q^{n-1}) : (\varrho + r q^{n-1}) \text{ mod. } q^n$$

und damit**) q^2 verschiedene Hauptcyklen von G, welche durch

$$\Delta \equiv \Pi + (2\mu m + \nu r + \varrho s)\, q^{n-1} \text{ mod. } q^n$$

bestimmt sind.

Hieraus ersieht man ferner, dass die Cyklen $\Pi \equiv 0$ mod. q^{n-1} zu $q\ G_{q^n}$ (I) und $q(q-1)\ G_{q^n}$ (I′, 1) gehören, dass ebenso jeder Cyklus $\Pi \equiv s_0 q^{n-1-\varepsilon}$ mod. q^{n-1} in $q^2\ G_{q^n}$ (I′, $\varepsilon + 1$), jeder Cyklus $\left(\frac{\Pi}{q}\right) = 1$ in $q^2\ G_{\frac{q-1}{2}q^{n-1}}$ und jeder Cyklus $\left(\frac{\Pi}{q}\right) = -1$ in $q^2\ G_{\frac{q+1}{2}q^{n-1}}$ enthalten ist.

---

*) Sonst wäre nämlich S eine Substitution von E.

**) Da $q > 3$ vorausgesetzt ist, so hat man immer von 0 mod. q verschiedene Werthe ξ, für welche $u^2 \equiv 1 + \Delta\xi^2$ mod. q^n lösbar ist, welches auch der Werth Δ sein mag.

Jetzt bemerke man noch, dass gleichberechtigte Hauptcyklen ganz gewiss auch gleichberechtigte $G_{q^{n-1}}$ liefern, dass aber 2 $G_{q^{n-1}}$ nicht gleichberechtigt sein können, wenn irgend ein zur einen $G_{q^{n-1}}$ gehöriger Hauptcyklus mit keinem zur andern $G_{q^{n-1}}$ gehörigen gleichberechtigt ist. Dann erkennt man die Richtigkeit des folgenden Resultates:

Die Gruppe E enthält

1) $(q+1)\, q^{n-2}$ *gl.* $G_{q^{n-1}}\ (I)$, $\Pi \equiv 0$ *mod.* q^{n-1}.

1′) $2j$ *Gattungen von* $\frac{q^2-1}{2j}\, q^{n+\varepsilon-3}$ *gl.* $G_{q^{n-1}}\ (I', \varepsilon)$,

$\Pi \equiv s_0\, q^{n-1-\varepsilon}$ *mod.* q^{n-1} *für* $\varepsilon = 1, 2, \ldots, n-2$;

Ch.: $\left(\frac{s_0}{q}\right)$, *wenn* $q \equiv 3$ *mod.* 4,

$\left(\frac{s_0}{\varrho_0^2}\right)^{\frac{q-1}{4}}$ *oder* $\left(\frac{s_0}{\nu_0^2}\right)^{\frac{q-1}{4}}$ *mod.* q, *wenn* $q \equiv 1$ *mod.* 4;

2) $\frac{q+1}{2}\, q^{2n-3}$ *gl.* $G_{q^{n-1}}\ (II)$, $\left(\frac{\Pi}{q}\right) = 1$;

3) $\frac{q-1}{2}\, q^{2n-3}$ *gl* $G_{q^{n-1}}\ (III)$, $\left(\frac{\Pi}{q}\right) = -1$.

Damit sind die Cyklen von E erschöpft.

II. Von der Gruppe E kann man jetzt ebenso leicht zu den Gruppen E_2, E_3, ... herabsteigen. Es wird dann die Grösse Π mod. q^{n-2}, mod. q^{n-3} ... betrachtet. Allgemein erhält man die nachstehende

B. Tabelle der Cyklen von E_τ.

In ihr bedeutet σ die Zahl $\sigma = n - \tau$; ferner ist der Einfachheit halber an Stelle von G_{q^σ} kurz σ gesetzt. Das übrige vergl. Tabelle A.

1) $(q+1)\, q^{\sigma-1}$ *gl.* $\sigma\,(I)$, $\Pi \equiv 0$ *mod.* q^σ;

1′) $2j$ *Gattungen von* $\frac{q^2-1}{2j}\, q^{\sigma+\varepsilon-2}$ *gl.* $\sigma(I', \varepsilon)$,

$\Pi \equiv s_0\, q^{\sigma-\varepsilon}$ *mod.* q^σ *für* $\varepsilon = 1, 2, \ldots, \sigma - 1$;

Ch.: α) *wenn* $q \equiv 3$ *mod.* 4, $\left(\frac{s_0}{q}\right)$,

β) *wenn* $q \equiv 1$ *mod.* 4, $\left(\frac{s_0}{\nu_0^2}\right)^{\frac{q-1}{4}}$ *oder* $\left(\frac{s_0}{\varrho_0^2}\right)^{\frac{q-1}{4}}$ *mod.* q;

2) $\frac{q+1}{2}\, q^{2\sigma-1}$ *gl.* $\sigma(II)$, $\left(\frac{\Pi}{q}\right) = 1$;

3) $\frac{q-1}{2}\, q^{2\sigma-1}$ *gl.* $\sigma(III)$, $\left(\frac{\Pi}{q}\right) = -1$.

Speciell enthält E_{n-1} die folgenden Cyklen:

1) $q+1$ *gl.* $1\,(I) = G_q\,(I)$, $\Pi \equiv 0$ *mod.* q;

2) $\frac{q(q+1)}{2}$ *gl.* $1\,(II) = G_q(II)$, Π *quadratischer Rest von* q;

3) $\frac{q(q-1)}{2}$ *gl.* $1\,(III) = G_q(III)$, Π *quadr. Nichtrest von* q.

III. Die eben für $q > 3$ erhaltene Zusammensetzung von E aus Cyklen lässt sich leicht auf den Fall $q = 3$ ausdehnen. Zunächst gelten die obigen Schlüsse für alle jene $G_{3^{n-1}}$ von E, welche in Hauptcyklen von G enthalten sind. Es giebt aber hier 2 Gattungen von $G_{3^{n-1}}$, welche nicht in höheren Cyklen enthalten sind und für welche daher diese Schlüsse nicht mehr gelten. Es führen aber auch hier Betrachtungen zum Ziele, welche denen des § 3 ganz analog sind.

Die erste Gattung bilden die Cyklen $G_{3^{n-1}}(II)$, für welche $\Pi \equiv 1$ mod. 3 ist. Ich betrachte hier den Cyklus:

$$T \equiv \frac{4\omega}{\frac{1}{4}} \text{ mod. } 3^n.$$

Nach § 2, I, Zusatz ist T unter den Potenzen T^ν nur mit T und T^{-1} gleichberechtigt. Es ist also nur noch die Zahl der Lösungen $WTW^{-1} = T$ zu finden. Setzt man $W = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, so ist

$$WTW^{-1} = f\left(4\alpha\delta - \frac{\beta\gamma}{4}, \frac{-15\alpha\beta}{4}, \frac{15\gamma\delta}{4}, \ldots\right)$$

und diese Substitution ist $= T = f\left(4, 0, 0, \frac{1}{4}\right)$, wenn $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \text{ mod. } 3^{n-1}$ ist. Die Substitutionen W bestehen also aus den Potenzen von T in Verbindung mit den Substitutionen der Gruppe E_{n-1} und sie bilden eine Gruppe (T, E_{n-1}), deren Ordnung 3^{n+1} ist. Ebensoviele Lösungen hat nach § 2, II auch die Gleichung $VTV^{-1} = T^{-1}$; also wird Cyclus (T) durch $2 \,.\, 3^{n+1}$ Substitutionen in sich transformirt und ist folglich *mit* $2 \,.\, 3^{2n-3}$ *Cyklen* $G_{3^{n+1}}(II)$ *gleichberechtigt.**)

Die zweite Art, welche indess nur für $n > 2$ existirt, sind die Cyklen $G_{3^{n-1}}(I', n-2)$, für welche $s_0 \equiv -1$ mod. 3, also $\Pi \equiv -3$ mod. 9 ist. Ein solcher Cyklus wird z. B. von den 3^{n-1} Substitutionen

$$U^{(\xi)} = \varphi\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\xi, \beta\xi, \gamma\xi\right)_1, \quad u^2 \equiv 1 - \frac{27}{4}\xi^2 \text{ mod. } 3^n$$

gebildet, welche nach § 2, III die Substitution $S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $\Delta \equiv -\frac{3}{4}$ mod. 3^n der Periode 3 in sich transformiren, so dass $U^{(\xi)}S = SU^{(\xi)}$ ist. Jedem Cyklus $\Gamma_3 = (S)$ entspricht so eine bestimmte $G_{3^{n-1}}$ der genannten Art und zwar ist die angegebene Beziehung

*) Es ist selbstverständlich, dass jede Untergruppe mit sich selbst gleichberechtigt ist.

durch Transformation unzerstörbar, so dass gleichberechtigten Γ_3 auch gleichberechtigte G_{3^n-1} entsprechen. Umgekehrt aber gehört eine $G_{3^n-1}=(\varphi(\mu,\nu,\varrho)_1)$, $\Pi=-\frac{3}{4}$ mod. 3^n zu 27 Γ_3. Man erhält nämlich:

$$\frac{\alpha-\delta}{2}:\beta:\gamma\equiv(\mu+m.3^{n-1}):(\nu+s.3^{n-1}):(\varrho+r.3^{n-1}) \text{ mod. } 3^n$$

oder:

$$\frac{\alpha-\delta}{2}\equiv\xi(\mu+m.3^{n-1}),\ \beta\equiv\xi(\nu+s.3^{n-1}),\ \gamma\equiv\xi(\varrho+r.3^{n-1}) \text{ mod. } 3^n.$$

Nun soll

$$\Delta=\Pi\xi^2+(2\mu m+\nu r+\varrho s).3^{n-1}\equiv-\frac{3}{4}\xi^2+R.3^{n-1}\equiv-\frac{3}{4} \text{ mod. } 3^n$$

sein. Dies erreicht man durch:

1) $\xi=\pm1$, $R=0$ — dies giebt $9\Gamma_3$ —;

2) $\xi=\pm(1+3^{n-2})$, $R=-1$ — dies giebt wieder $9\Gamma_3$ —;

3) $\xi=\pm(1-3^{n-2})$, $R=+1$ — dies giebt ebenfalls $9\Gamma_3$.

Mithin hat man, wenn $n>2$ ist 4.3^{2n-5} gleichberechtigte $G_{3^n-1}(I',n-2)$, $\Pi=s_0.3$ mod. 3^{n-1}, $s_0\equiv-1$ mod. 3.

Fasst man diese Resultate zusammen, so erkennt man, *dass die oben für $q>3$ angegebene Zusammensetzung der Gruppe E aus Cyklen auch für $q=3$ Gültigkeit hat.*

Ich bemerke hiezu noch, dass (SU) und (S^2U) Cyklen Γ_{3^n-1}, ebenso (SU^2) und (S^2U^2) Cyklen Γ_{3^n-2} von verschiedener Gattung sind etc., wobei $U=\varphi(\mu,\nu,\varrho)_1$, $\Pi=\mu^2+\nu\varrho\equiv-\frac{3}{4}$ mod. 3^n, $\mu:\nu:\varrho\equiv\frac{\alpha-\delta}{2}:\beta:\gamma$ mod. 3^n, $S=f(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ ist.

IV. Zu jeder cyklischen Gruppe gehört eine Gruppe W, welche aus *allen* jenen Substitutionen besteht, durch welche dieser Cyklus in sich transformirt wird. Man kann diese Gruppen W jetzt um so leichter aufstellen, als ja die Ordnungen o schon bekannt sind. Bezeichnet nämlich z die Zahl der Cyklen, welche zum gegebenen Cyklus gleichberechtigt sind, so ist

$$o=\frac{q^2-1}{2}\,q^{3n-2}:z.$$

Was hiebei die Cyklen σ von E_τ anbelangt, so enthält das zugehörige W nach dem am Eingange des § 5 angeführten Satze die ganze Gruppe E_σ, sie enthält ferner den Hauptcyklus $R=\varphi(\mu\xi,\nu\xi,\varrho\xi)$, der zu σ gehört, sowie die Substitutionen, welche diesen Hauptcyklus in sich überführen. Ist ferner

$$\sigma = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau, \quad \Pi = s_0 q^{\sigma-\varepsilon} \text{ mod. } q^\sigma, \quad \nu \gtrless 0 \text{ mod.}^{*)}\ q,$$

so gehört auch, wie man sich leicht überzeugt, die Substitution

$$T_\varepsilon = f\left(\alpha, 0, (\delta - \alpha)\frac{\mu}{\nu}, \delta\right), \quad \alpha^j \equiv 1 \text{ mod. } q^\varepsilon,$$

welche die Periode $j\, q^{n-\varepsilon}$ hat, der Gruppe W an.

Man erhält dadurch die nachstehenden Resultate:

a. 1) $\sigma(I) = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$, $\Pi \equiv 0$ mod. q^σ, $\nu \gtrless 0$ mod. q,

$$W = \left(E_\sigma, R = \varphi(\mu, \nu, \varrho) = G_{q^n}(I),\right.$$
$$\left. T = f\left(\lambda, 0, (\lambda^{-1} - \lambda)\frac{\mu}{\nu}, \lambda^{-1}\right)\right).$$

Hier ist λ eine Primitivwurzel der Congruenz $x^{(q-1)\cdot q^{n-1}} \equiv 1$ mod. q^n, so dass T die Periode $\frac{q-1}{2} \cdot q^{n-1}$ hat.

Speciell kommt für

$$\sigma(I) = \varphi(0, 1, 0)_\tau; \quad W = \left(E_\sigma, R \equiv \omega + 1, \ T = \frac{\lambda\omega}{\lambda^{-1}}\right).$$
$$o = \frac{q-1}{2}\, q^{3n-\sigma-1}.$$

1') $\sigma(I', \varepsilon) = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$, $\Pi \equiv s_0 q^{\sigma-\varepsilon}$ mod. q^σ, $\nu \gtrless 0$ mod. q,

$$W = (E_\sigma, R = \varphi(\mu, \nu, \varrho) = G_{q^n}(I', \varepsilon + \tau), T_\varepsilon).$$

Speciell ist

$$\sigma(I', \varepsilon) = \varphi(0, 1, s_0 q^{\sigma-\varepsilon})_\tau.$$
$$o = j\, q^{3n-\sigma-\varepsilon}.$$

Ausgeschlossen ist hier der Fall $q = 3$, $\varepsilon = \sigma - 1$, $s_0 \equiv -1$ mod. 3. Dann hat man

$$q = 3, \ \sigma(I', \sigma - 1) = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau, \ \Pi \equiv -3 \text{ mod. } 9, \ \nu \gtrless 0 \text{ mod. } q,$$
$$W = (E_\sigma, R_1 = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_1, \ S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \ T_{\sigma-1}).$$

Hier bedeutet S eine Substitution der Periode $3\,(\alpha + \delta \equiv -1 \text{ mod. } 3^n)$, für welche $\frac{\alpha - \delta}{2} : \beta : \gamma \equiv \mu : \nu : \varrho$ mod. 3^σ ist.

---

2) $\sigma(II) = \varphi(1, 0, 0)_\tau$,

$$W = \left(E_\sigma, T = \frac{\lambda\omega}{\lambda^{-1}}, \ \Theta = -\frac{1}{\omega}\right),$$
$$o = (q-1)\, q^{3n-2\sigma-1}.$$

---

*) Wenn $\nu \equiv 0$ mod. q ist, so ist jedenfalls $\varrho \gtrless 0$ mod. q. Man braucht dann nur die Elemente β, γ zu vertauschen. Vergl. übrigens § 5, II, (1).

3) $\sigma(III) = \varphi(\sqrt{N}, 0, 0)_\tau$ (imaginäre Gestalt der Gruppe),

$$W = \left(E_\sigma,\ T = \frac{l\omega}{l^{-1}},\ \Theta = \frac{B}{C\omega}\right).$$

Hier ist l eine primitive Wurzel der Congruenz $x^{(q+1)\cdot q^{n-1}} \equiv 1 \bmod. q^n$, ferner ist $B = b + c\sqrt{N}$, $C = b - c\sqrt{N}$, $BC \equiv -1 \bmod. q^n$,

$$o = (q+1)\, q^{3n-2\sigma-1}.$$

Für die Hauptcyklen von G erhält man:

b. 1) $G_{q^n}(I) = R = \varphi\left(\frac{\alpha-\delta}{2}, \beta, \gamma\right)$, $\Delta \equiv 0 \bmod. q^n$,

$$W = \left(R,\ T = \frac{\lambda\omega}{\lambda^{-1}}\right),\quad o = \frac{q-1}{2}\, q^{2n-1}.$$

1′) $G_{q^n}(I', \varepsilon) = R = \varphi\left(\frac{\alpha-\delta}{2}, \beta, \gamma\right)$, $\Delta \equiv s_0 q^{n-\varepsilon} \bmod. q^n$,

$$W = (R, T_\varepsilon),\quad o = j\, q^{2n-\varepsilon}.$$

Ausgeschlossen ist wieder der Fall: $q = 3$, $\varepsilon = n-1$, $s_0 \equiv -1 \bmod. 3$.

---

2) $G_{\frac{q-1}{2} q^{n-1}} = T = \frac{\lambda\omega}{\lambda^{-1}}$,

$$W = \left(T,\ \Theta = -\frac{1}{\omega}\right),\quad o = (q-1)\, q^{n-1}.$$

---

3) $G_{\frac{q+1}{2} q^{n-1}} = T = \frac{l\omega}{l^{-1}}$ (imaginäre Gestalt der Gruppe),

$$W = \left(T, \Theta = \frac{B}{C\omega}\right),\quad o = (q+1)\, q^{n-1}.$$

§ 5.

Die Gruppe E_{n-1}.

I. Sind $U = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$ und $U' = \varphi(\mu', \nu', \varrho')_{\tau'}$ 2 Substitutionen der Gruppe E, für welche $\tau + \tau' \geqq n$ ist, so findet man

$$UU' = U'U = \varphi(\mu q^{\tau-\tau'} + \mu',\ \nu q^{\tau-\tau'} + \nu', \ldots)_{\tau'},\ \text{wo } \tau' \leqq \tau$$

ist. Die Bedingung $\tau + \tau' \geqq n$ ist immer erfüllt, wenn U und U' der Gruppe E_{n-1} angehören. Bezeichnet man die Substitutionen $\varphi(\mu, \nu, \varrho)_{n-1}$ kurz mit $\psi(\mu, \nu, \varrho)$, so hat man

(1) $$U = \psi(\mu, \nu, \varrho),\quad U' = \psi(\mu', \nu', \varrho'),$$
$$UU' = U'U = \psi(\mu+\mu', \nu+\nu', \varrho+\varrho').$$

Daher bilden U und U', wenn sie nicht demselben Cyklus angehören, d. h. wenn nicht $\mu : \nu : \varrho \equiv \mu' : \nu' : \varrho'$ mod. q ist, eine Gruppe G'_{q^2} der Ordnung q^2. Da ferner eine solche G'_{q^2} aus $q+1$ Cyklen G_q zusammengesetzt ist, so erhält man im Hinblicke auf die Zahl q^2+q+1 aller G_q von E_{n-1} gerade $\frac{(q^2+q+1)(q^2+q)}{2} : \frac{q(q+1)}{2} = q^2+q+1$ Gruppen G'_{q^2} von E_{n-1}.

Es handelt sich jetzt darum, diese Gruppen G'_{q^2} zu classificiren. Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass die q^2 Substitutionen der Gruppe $(U = \psi(\mu, \nu, \varrho),\ U' = \psi(\mu', \nu', \varrho'))$ durch

$$U^x U'^y = \psi(x\mu + y\mu',\ x\nu + y\nu',\ x\varrho + y\varrho')$$
$$x, y = 0, 1, 2, \ldots, q-1$$

und ihre $q+1$ Cyklen G_q durch die $q+1$ Verhältnisse

$$x : y = 0, \infty, 1, 2, \ldots, q-1$$

definirt werden. Die für die Substitution $U^x U'^y$ charakteristische Grösse Π_{xy} ist daher

$$\begin{aligned}(2)\qquad \Pi_{xy} &= (x\mu + y\mu')^2 + (x\nu + y\nu')(x\varrho + y\varrho') \\ &= \Pi x^2 + 2Txy + \Pi' y^2,\end{aligned}$$

wo

$$\Pi = \mu^2 + \nu\varrho,\quad \Pi' = \mu'^2 + \nu'\varrho',\quad T = \frac{\nu\varrho' + \nu'\varrho}{2} + \mu\mu'$$

ist und es kann nicht gleichzeitig $\Pi \equiv \Pi' \equiv T \equiv 0$ mod. q sein, da sonst gegen die Voraussetzung $\mu : \nu : \varrho \equiv \mu' : \nu' : \varrho'$ mod. q wäre.

Ferner wird die Discriminante der auf der rechten Seite von Gleichung (2) stehenden quadratischen Form:

$$(3)\qquad S = T^2 - \Pi\Pi'.$$

Diese Grösse S ist nun für die Gruppen G'_{q^2} ebenso charakteristisch, wie der Ausdruck Π für die Cyklen G_q. Es giebt 3 Arten von Gruppen G'_{q^2}. Für die erste Art ist $S \equiv 0$ mod. q, für die zweite ist S quadratischer Rest von q, für die dritte quadratischer Nichtrest.

Nach § 4 ist die Zahl der Werthe $x : y$, für welche bez. $\Pi_{xy} \equiv 0$ oder quadratischer Rest oder Nichtrest mod. q wird, der Anzahl der Cyklen $G_q(I)$ oder (II) oder (III) gleich, welche in der betrachteten G'_{q^2} enthalten sind. Demnach enthalten die 3 Arten von solchen Gruppen bez. 1, 2 oder 0 $G_q(I)$*). Ueberhaupt enthält

eine $G'_{q^2}(I)$ — 1 $G_q(I)$, $qG_q(II)$,

eine $G'_{q^2}(II)$ — 2 $G_q(I)$, $\frac{q-1}{2} G_q(II)$, $\frac{q-1}{2} G_q(III)$,

*) Im ersten Falle ist die $G_q(I)$ durch $x : y \equiv T : -2\Pi \equiv -2\Pi' : T$ bestimmt, im zweiten Falle erhält man die 2 Cyklen $G_q(I)$ durch

$$x : y \equiv (T \pm \sqrt{S}) : -2\Pi \equiv -2\Pi' : (T \mp \sqrt{S}) \text{ mod. } q.$$

$$\text{eine } G'_{q^2}(III) - 0\, G_q(I),\ \frac{q+1}{2} G_q(II),\ \frac{q+1}{2} G_q(III).$$

Für den ersten Fall kann man den Cyklus (U) mit der $G_q(I)$ zusammenfallen lassen, dann wird $T \equiv \Pi \equiv 0$ mod. q und $\Pi_{xy} = y^2 \Pi'$. Ist nun $\mu \equiv 0$ mod. q, so ist wegen $\Pi \equiv 0$ auch $\varrho \equiv 0$ oder $\nu \equiv 0$ mod. q, folglich wegen $T \equiv 0$ auch ϱ' oder $\nu' \equiv 0$ und $\Pi' \equiv \mu'^2$, also quadratischer Rest von q. Ist aber $\mu \gtrless 0$ mod. q, so wird $\Pi' = \left(\frac{\nu\varrho' - \nu'\varrho}{2\mu}\right)^2$, also ebenfalls quadratischer Rest von q. Daher wird auch $\Pi_{xy} = y^2\Pi'$. quadratischer Rest mod. q für die q Werthe $x:y = 0, 1, 2, \ldots, q-1$. Den letzten q Werthen entsprechen aber $q\ G_q(II)$.

Im zweiten Falle kann man die $2\ G_q(I)$ mit den Cyklen (U) und (U') identificiren und erhält $\Pi = \Pi' = 0$, also $\Pi_{xy} = xy\,T$, welcher Ausdruck für $\frac{q-1}{2}$ Werthe $x : y$ quadratischer Rest und für ebensoviele Werthe quadratischer Nichtrest mod. q wird. Im 3. Falle aber kann man die Lösungen der Congruenz $\Pi\left(x + \frac{T}{2\Pi}\, y\right)^2 - \frac{S}{\Pi}\, y^2 \equiv z^2$ mod. q ebensoleicht auffinden, wie in § 2, III. Für $\frac{q+1}{2}$ Werthe $x : y$ wird Π_{xy} quadratischer Rest von q, für die übrigen $\frac{q+1}{2}$ Werthe hingegen quadratischer Nichtrest.

II. *Die Bedeutung der Grösse S für die Gruppen G'_{q^2} wird noch klarer durch den folgenden Satz:*

Die sämmtlichen Substitutionen $S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, welche die Gruppe $G'_{q^2} = (U = \psi(\mu, \nu, \varrho),\ U' = \psi(\mu', \nu', \varrho'))$ in sich transformiren, lassen zugleich auch den Cyklus

$$G_q = \left(U'' = \psi(\mu'', \nu'', \varrho'') = \psi\left(\frac{\nu\varrho' - \nu'\varrho}{2},\ \mu\nu' - \mu'\nu,\ \varrho\mu' - \varrho'\mu\right)\right)$$

fest und umgekehrt. Die zu (U'') gehörige charakteristische Grösse ist $\Pi'' = S$, so dass jeder $G'_{q^2}(I)$ eine $G_q(I)$, jeder $G'_{q^2}(II)$ eine $G_q(II)$, jeder $G'_{q^2}(III)$ eine $G_q(III)$ in einer durch Transformation unzerstörbaren Weise zugeordnet ist. Jede $G_q(I)$ ist in der ihr zugeordneten $G'_{q^2}(I)$ enthalten, dagegen liegt eine $G_q(II)$ oder $G_q(III)$ ausserhalb der ihr entsprechenden Gruppe $G'_{q^2}(II)$ oder $G'_{q^2}(III)$.

Beweis. Sei $S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ irgend eine Substitution von G, sei ferner $U = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$, so findet man

(1) $$\begin{aligned} U_1 = SUS^{-1} &= \varphi(\mu_1, \nu_1, \varrho_1)_\tau \\ &= \varphi([\alpha\delta + \beta\gamma]\mu - \alpha\gamma\nu + \beta\delta\varrho,\ \alpha^2\nu - 2\alpha\beta\mu - \beta^2\varrho, \\ &\qquad -\gamma^2\nu + 2\gamma\delta\mu + \delta^2\varrho)_\tau. \end{aligned}$$

Die Substitution S führt nun die Gruppe (U, U'), wo jetzt $\tau = n - 1$ angenommen ist, dann und nur dann in sich über, wenn die Substitutionen

(2) $U_1 = SUS^{-1} = \psi(\mu_1, \nu_1, \varrho_1)$ und $U_2 = S'U'S'^{-1} = \psi(\mu_2, \nu_2, \varrho_2)$ selbst der Gruppe angehören, d. h. wenn sie beide die Form

$$\psi(x\mu + y\mu', x\nu + y\nu', x\varrho + y\varrho')$$

haben. Dies liefert die Bedingungen:

$$(3) \qquad D_1 = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu & \mu' \\ \nu_1 & \nu & \nu' \\ \varrho_1 & \varrho & \varrho' \end{vmatrix} \equiv 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \mu_2 & \mu & \mu' \\ \nu_2 & \nu & \nu' \\ \varrho_2 & \varrho & \varrho' \end{vmatrix} \equiv 0 \text{ mod. } q,$$

oder

$$\frac{\nu_1\varrho_2 - \nu_2\varrho_1}{2} : (\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1) : (\varrho_1\mu_2 - \varrho_2\mu_1)$$
$$= \frac{\nu\varrho' - \nu'\varrho}{2} : (\mu\nu' - \mu'\nu) : (\varrho\mu' - \varrho'\mu).$$

Setzt man nun die Werthe für $\mu_1, \nu_1, \varrho_1, \mu_2, \nu_2, \varrho_2$ aus (2) und (1) ein, so erhält man, wenn man

$$(4) \qquad \frac{\nu\varrho' - \nu'\varrho}{2} = \mu'', \quad \mu\nu' - \mu'\nu = \nu'', \quad \varrho\mu' - \varrho'\mu = \varrho''$$

setzt:

$$\frac{\nu_1\varrho_2 - \nu_2\varrho_1}{2} = (\alpha\delta + \beta\gamma)\mu'' - \alpha\gamma\nu'' + \beta\delta\varrho'' = \mu_3,$$
$$\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1 = \alpha^2\nu'' - 2\alpha\beta\mu'' - \beta^2\varrho'' \qquad = \nu_3,$$
$$\varrho_1\mu_2 - \varrho_2\mu_1 = -\gamma^2\nu'' + 2\gamma\delta\mu'' + \delta^2\varrho'' \qquad = \varrho_3$$

und es ist

$$SU''S^{-1} = \psi(\mu_3, \nu_3, \varrho_3).$$

Man erhält daher die Relation:

$$(5) \qquad \mu_3 : \nu_3 : \varrho_3 \equiv \mu'' : \nu'' : \varrho'' \text{*)},$$

welche mit der Bedingung übereinstimmt, dass der Cyklus (U'') durch S in sich transformirt wird. Bemerkt man ferner noch, dass dieser Cyklus (U'') von der Wahl der erzeugenden Substitutionen U und U' von (U, U') unabhängig ist, da er ungeändert bleibt, wenn man μ, ν, ϱ durch $x\mu + y\mu', x\nu + y\nu', x\varrho + y\varrho'$ ersetzt, so erkennt man, dass alle Substitutionen S, welche (U, U') festlassen, auch (U'') in sich transformiren.

Umgekehrt sieht man, dass, wenn μ'', ν'', ϱ'' sich in den Formen (4) anschreiben lassen, man aus dem Bestehen der Relation (5), welche ausdrückt, dass die Substitution S den Cyklus (U'') in sich transformirt, auch auf das Erfülltsein der Bedingungen (3) schliessen kann, so dass also S auch die Gruppe (U, U') festlässt.

*) Die Werthe μ'', ν'', ϱ'' werden nur dann sämmtlich $\equiv 0$ mod. q, wenn $\mu : \nu : \varrho \equiv \mu' : \nu' : \varrho'$ mod. q ist, was ausgeschlossen ist.

Was die genannten Darstellungen von μ'', ν'', ϱ'' anbelangt, so ist klar, dass es sich nur um die Verhältnisse dieser Grössen handelt. Nun bemerke man, dass aus den Congruenzen (4) die folgenden Relationen sich ergeben:

$$2\mu\mu'' + \nu\varrho'' + \varrho\nu'' \equiv 0; \quad 2\mu'\mu'' + \nu'\varrho'' + \varrho'\nu'' \equiv 0 \text{ mod. } q.$$

Stellt man also 2 Lösungen $\mu : \nu : \varrho$ und $\mu' : \nu' : \varrho'$ der Congruenz $2\mu''x + \varrho''y + \nu''z \equiv$ mod. q auf von der Art, dass nicht

$$\mu : \nu : \varrho \equiv \mu' : \nu' : \varrho' \text{ mod. } q$$

wird, so erhält man

$$\mu'' : \nu'' : \varrho'' \equiv \frac{\nu\varrho' - \nu'\varrho}{2} : (\mu\nu' - \mu'\nu) : (\varrho\mu' - \varrho'\mu) \text{ mod. } q.$$

Jede weitere Lösung $x : y : z$ der aufgestellten Congruenz hat aber nothwendig die Form

$$x : y : z \equiv (\varepsilon\mu + \zeta\mu') : (\varepsilon\nu + \zeta\nu') : (\varepsilon\varrho + \zeta\varrho') \text{ mod. } q,$$

so dass die Substitution $V = \psi(x, y, z)$ in der Gruppe (U, U') enthalten ist. Es entspricht daher jeder G_q eine und nur eine G'_{q^2} von E_{n-1}.

Soll (U'') in der Gruppe (U, U') selbst enthalten sein, so müssen die Grössen μ'', ν'', ϱ'' die Formen $\mu'' = x\mu + y\mu'$, $\nu'' = x\nu + y\nu'$, $\varrho'' = x\varrho + y\varrho'$ haben; dies ist aber nur der Fall, wenn

$$S = \mu''^2 + \nu''\varrho'' \equiv 0 \text{ mod. } q,$$

also (U'') eine $G_q(I)$ ist.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt jetzt:

Es giebt $q + 1$ *gleichberechtigte Gruppen* $G'_{q^2}(I)$, $\frac{q(q+1)}{2}$ *gleichberechtigte* $G'_{q^2}(II)$, $\frac{q(q-1)}{2}$ *gleichberechtigte* $G'_{q^2}(III)$.

Ich füge noch Sätze an, welche die Reciprocität zwischen den Cyklen G_q und den Gruppen G'_{q^2} noch mehr hervortreten lassen: *Je* 2. G'_{q^2} *haben* 1 G_q *gemeinsam. Jede* G_q *ist in* $q + 1$ *Gruppen* G'_{q^2} *enthalten und zwar gehört eine* $G_q(I)$ *zu* 1 $G'_{q^2}(I)$ *und* q $G'_{q^2}(II)$, 1 G_q (II) *zu* 2 $G'_{q^2}(I)$, *zu* $\frac{q-1}{2}$ $G'_{q^2}(II)$ *und* $\frac{q-1}{2}$ $G'_{q^2}(III)$, 1 $G_q(III)$ *zu* $\frac{q+1}{2}$ $G'_{q^2}(II)$ *und* $\frac{q+1}{2}$ $G'_{q^2}(III)$.

§ 6.

Hilfssätze zur Bestimmung der nicht-cyklischen Untergruppen von E.

I. Für uns sind nur solche Untergruppen von E von Interesse, welche nicht die ganze Gruppe E_{n-1} enthalten, welche also entweder eine G_q oder eine G'_{q^2} mit der letztgenannten Gruppe gemein haben.

a) *Die Untergruppen von* E, *welche nur* 1 G_q *von* E_{n-1} *enthalten, sind Cyklen.*

Beweis. Eine Gruppe, welche mit der E_{n-1} nur einen Cyklus (U) gemeinsam hat, kann auch mit der E_{n-2} nur eine cyklische Gruppe G_{q^2} gemeinsam haben. Denn enthielte sie 2 verschiedene Cyklen G_{q^2} von E_{n-2}, etwa (U_1) und (U_2) mod. q^n, so müssten die Cyklen $(U_1{}^q)$ und $(U_2{}^q)$, welche nach § 2, III der Gruppe E_{n-1} angehören, mit (U) identisch sein. Dann müssten aber auch (U_1) und (U_2) mod. q^{n-1} zusammenfallen. Wäre etwa $U_1 = U_2{}^s$ mod. q^{n-1}, so würde $U_1 U_2{}^{-s} \equiv \omega$ mod. q^{n-1} sein, d. h. $U_1 U_2{}^{-s}$ wäre eine Substitution der Gruppe E_{n-1} und mithin eine Potenz von U. Wäre etwa $U_1 U_2{}^{-s} = U^x$, so käme $U_1 = U^x U_2{}^s$ oder da $U^x = U_2{}^{qy}$ ist, $U_1 = U_2{}^{s+qy}$ und die Cyklen (U_1) und (U_2) wären gegen die gemachte Annahme identisch. Die Gruppe enthält also nur einen Cyklus G_{q^2} von E_{n-2}. Ebenso zeigt man, dass eine Gruppe, welche nur 1 G_{q^2} von E_{n-2} enthält, auch nur 1 G_{q^3} von E_{n-3} enthalten kann etc. Daraus folgt schliesslich die aufgestellte Behauptung.

b) *Die Untergruppen von E, welche nur eine G'_{q^2} von E_{n-1} enthalten, können sämmtlich durch 2 Substitutionen $U = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$ und $U' = \varphi(\mu', \nu', \varrho')_{\tau'}$ erzeugt werden, für welche* nicht *die Bedingung $\mu : \nu : \varrho \equiv \mu' : \nu' : \varrho'$ mod. q existirt. Die Substitutionen*

$$U^x U'^y (x = 0, 1, \ldots, q^{n-\tau} - 1;\ y = 0, 1, \ldots, q^{n-\tau'} - 1)$$

sind dann sämmtlich von einander verschieden und liefern alle Substitutionen der erzeugten Gruppe. Letztere hat also die Ordnung $q^{2n-\tau-\tau'}$. Es sollen diese Gruppen kurz durch (σ, σ') bezeichnet werden, wo $\sigma = n - \tau$, $\sigma' = n - \tau'$ gesetzt ist.

Beweis. 1) Zunächst erkennt man, dass die erzeugenden Substitutionen einer Gruppe (U, U'), für welche *zwei* Erzeugende

$$U = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau \quad \text{und} \quad U' = \varphi(\mu', \nu', \varrho')_{\tau'}$$

ausreichen, so gewählt werden können, dass die Bedingung

$$\mu : \nu : \varrho \equiv \mu' : \nu' : \varrho' \text{ mod. } q$$

nicht besteht. Denn wäre $\mu' \equiv \mu x$, $\nu' \equiv \nu x$, $\varrho' \equiv \varrho x$ mod. q, so käme nach § 2, III, $\tau \leqq \tau'$ vorausgesetzt: $U^{xq^{\tau'-\tau}} \equiv U'$ mod. $q^{\tau'+1}$, also $U'' = U' U^{-xq^{\tau'-\tau}} \equiv \omega$ mod. $q^{\tau'+1}$. Nun würde einerseits diese Substitution U'' nicht mehr der Gruppe $E_{\tau'}$, sondern einer tieferen Gruppe $E_{\tau'+1}, E_{\tau'+2}, \ldots$ etwa $E_{\tau'+s}$ angehören $(U'' = \varphi(\mu'', \ldots)_{\tau'+s})$, so dass sie nicht mehr die Periode $q^{n-\tau'}$ von U', sondern die kleinere Periode $q^{n-\tau'-s}$ hätte. Andrerseits würden die Gruppen (U, U'') und (U, U') identisch sein wegen der Relationen:

$$U' = U'' U^{xq^{\tau'-\tau}}, \quad U'' = U' U^{-xq^{\tau'-\tau}}.$$

Es wäre also (U, U') auf (U, U'') zurückgeführt.

Wäre nun wieder die Bedingung $\mu : \nu : \varrho \equiv \mu'' : \nu'' : \varrho''$ mod. q erfüllt, so könnte man auf demselben Wege eine weitere Reduction von (U, U'') auf (U, U''') vornehmen, wo U''' wieder eine kleinere

Periode als U'' hätte etc. Man muss so schliesslich auf eine Darstellung $(U, U^{(s)})$ der betrachteten Gruppe kommen, für welche die Bedingung $\mu : \nu : \varrho \equiv \mu^{(s)} : \nu^{(s)} : \varrho^{(s)}$ mod. q nicht mehr existirt.

2) Sind die erzeugenden Substitutionen U und U' von (U, U') in der in (1) angegebenen Weise gewählt, so sind die sämmtlichen Substitutionen $U^x U'^y (x=0, 1, \ldots, q^{n-\tau}-1,\ y=0, 1, \ldots, q^{n-\tau'}-1)$ von einander verschieden, da dann nach § 2, III die Cyklen (U) und (U') keine Substitution gemeinsam haben.

Wir nehmen jetzt an, es sei ausser den Substitutionen $U^x U'^y$ noch eine weitere von diesen verschiedene Substitution U'' vorhanden, so ist klar, dass wenigstens mod. $q^{\tau'+1}$ die Bedingung $U'' \equiv U^x U'^y$ erfüllt ist*), wobei $\tau' \geqq \tau$ angenommen wird, da ja (§ 5, I) mod. $q^{\tau'+1}$ die Bedingung $U^x U'^y \equiv U'^y U^x$ besteht. Es sei jetzt $q^{\tau'+s}$ der erste Modul, für welchen U'' keiner Substitution $U^x U'^y$ mehr congruent ist, während mod. $q^{\tau'+s-1}$ noch $U'' \equiv U^x U'^y$ ist, dann wird

$$U''' = U'' U'^{-y} U^{-x}$$

eine Substitution der Form $\varphi(\mu''', \nu''', \varrho''')_{\tau'+s-1}$, welche offenbar mit keiner der in (U, U') enthaltenen Substitutionen

$$U^{z \cdot q^{\tau'+s-\tau-1}}\, U'^{w \cdot q^{s-1}} = \varphi(z\mu + w\mu',\ z\nu + w\nu',\ z\varrho + w\varrho')_{\tau'+s-1} \text{ mod. } q^{\tau'+s}$$

zusammenfallen kann, da sonst wieder nach § 5, I gegen die Annahme $U'' = U^{x'} U'^{y'}$ mod. $q^{\tau'+s}$ sein müsste $(x' = x + z q^{\tau'+s-\tau-1},\ y' = y + w q^{s-1})$. Nach § 2, III und § 5 würden aber dann die Substitionen $U^{q^{n-\tau-1}}$, $U'^{q^{n-\tau'-1}}$, $U'''^{q^{n-\tau'-s}}$ die ganze Gruppe E_{n-1} erzeugen. Soll also (U, U') mit der E_{n-1} nur 1 G'_{q^2} gemeinsam haben, so sind mit den Substitutionen $U^x U'^y$ alle Substitutionen der Gruppe erschöpft.

3) Durch 3 erzeugende Substitutionen

$$U = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau,\quad U' = \varphi(\mu', \nu', \varrho')_{\tau'},\quad U'' = \varphi(\mu'', \nu'', \varrho'')_{\tau''}$$

können keine neuen Gruppen mehr erzeugt werden. In der That kann man zunächst nach (1) die 3 Substitutionen so annehmen, dass keine der Relationen $\mu'' : \nu'' : \varrho'' \equiv \mu : \nu : \varrho$, $\mu' : \nu' : \varrho' \equiv \mu : \nu : \varrho$ mod. q besteht. Ist ferner $\tau \leqq \tau' \leqq \tau''$ und nimmt man an, dass μ'', ν'', ϱ'' die Form $\mu'' \equiv x\mu + y\mu'$, $\nu'' \equiv x\nu + y\nu'$, $\varrho'' \equiv x\varrho + y\varrho'$ mod. q hat, so wird nach § 2, III $U'' = U^{x q^{\tau''-\tau}}\, U'^{y q^{\tau''-\tau'}}$ mod. $q^{\tau''+1}$. Demnach wird

$$U''' = U''\, U'^{-y q^{\tau''-\tau'}}\, U^{-x q^{\tau''-\tau}}$$

---

*) Ist $\tau = 0$, $\mu \equiv \varrho \equiv 0$ mod. q, $\nu = \nu_0$, so bemerke man, dass nothwendig auch $\varrho_1 \equiv 0$ mod. q sein muss. Denn sonst würden, wie man sich leicht überzeugt, die 3 Substitutionen $U' U U'^{-1} U^{-1}$, $U^{q^{\tau'}}$, U' die ganze Gruppe $E_{\tau'}$ mod. $q^{\tau'+1}$ und damit auch mod. q^n erzeugen. Wenn aber $\varrho_1 \equiv 0$ mod. q ist, so kommt die Relation $U'^y U^x U'^{-y} = U^{x_1}$ mod. $q^{\tau'+1}$, so dass also auch in diesem Falle die hier verwendete Bedingung für U'' erfüllt ist.

eine Substitution, welche $\equiv \omega$ mod. $q^{\tau'+1}$ ist, die also wieder eine kleinere Periode als U'' hat und die Gruppe (U, U', U'') ist mit (U, U', U''') identisch. Behandelt man jetzt U''' geradeso wie U'' etc., so kommt man entweder schliesslich auf die Gruppe (U, U'), oder man erhält eine Darstellung $(U, U', U^{(s)})$ der von uns betrachteten Gruppe, für welche die Congruenzen

$$\mu^{(s)} \equiv x\mu + y\mu', \ \nu^{(s)} \equiv x\nu + y\nu', \ \varrho^{(s)} \equiv x\varrho + y\varrho' \text{ mod. } q$$

nicht lösbar sind. Dann enthält aber die Gruppe nach § 5 und § 2, III die ganze Gruppe E_{n-1}, was ausgeschlossen ist.

II. Nach den eben gemachten Betrachtungen ist zur völligen Bestimmung der Untergruppen von E nur noch die Frage zu entscheiden, unter welchen Bedingungen 2 Substitutionen

$$U = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau, \quad U' = \varphi(\mu', \nu', \varrho')_{\tau'},$$

für welche nicht $\mu : \nu : \varrho \equiv \mu' : \nu' : \varrho'$ mod. q ist, eine Gruppe (σ, σ') erzeugen. Dies geschieht durch folgende Sätze:

a) *Ist* $\tau + \tau' \geqq n$, *so bilden* U *und* U' *immer eine Gruppe* (σ, σ');

b) *Ist hingegen* $\tau + \tau' < n$, *also* $n - \tau - \tau' = \lambda$ *eine positive ganze Zahl, so ist dies dann und nur dann der Fall, wenn*

$$S = T^2 - \Pi\,\Pi' = \mu''^2 + \nu''\varrho'' \equiv 0 \text{ mod. } q^\lambda$$

ist. Hiebei) hat man:*

$$(1) \qquad \begin{aligned} T &= \mu\mu' + \frac{\nu\varrho' + \nu'\varrho}{2}; \quad \Pi = \mu^2 + \nu\varrho; \quad \Pi' = \mu'^2 + \nu'\varrho'; \\ \mu'' &= \frac{\nu\varrho' - \nu'\varrho}{2}; \quad \nu'' = \mu\nu' - \mu'\nu; \quad \varrho'' = \varrho\mu' - \varrho'\mu. \end{aligned}$$

Der erste Theil dieser Behauptung ist selbstverständlich. Denn für $\tau + \tau' \geqq n$ ist stets $U\,U' = U'\,U$. Der zweite Theil wird auf folgende Weise bewiesen.

Es sind die Potenzen von U und U' durch

$$(2) \qquad U^{\nu\xi} = \varphi(\mu\xi, \nu\xi, \varrho\xi)_\tau; \quad U'^{\nu\xi'} = \varphi(\mu'\xi', \nu'\xi', \varrho'\xi')_{\tau'}$$

dargestellt, wobei die zugehörigen Werthe u, u' aus den Congruenzen

$$(2\text{a}) \qquad u^2 \equiv 1 + \Pi\xi^2 q^{2\tau}, \qquad u'^2 \equiv 1 + \Pi'\xi'^2 q^{2\tau'} \text{ mod. } q^n$$

zu entnehmen sind. Wenn jetzt U und U' eine Gruppe der verlangten

---

*) Π und Π' sind bez. die Discriminanten der quadratischen Formen

$$\varrho\omega^2 - 2\mu\omega - \nu \text{ mod. } q^\sigma; \quad \varrho'\omega^2 - 2\mu'\omega - \nu' \text{ mod. } q^{\sigma'}.$$

$2T$ ist die simultane Invariante der beiden Formen. Daher bleiben diese 3 Grössen erhalten, wenn man die U, U' in Bezug auf die Substitutionen von G transformirt

Art erzeugen, so sind, $\tau' \leq \tau$ angenommen, die sämmtlichen Substitutionen derselben durch

$$(3) \qquad V_{\xi,\xi'} = U^{\nu\xi}\, U'^{\nu\xi'} = \varphi(\mathsf{M}, \mathsf{N}, \mathsf{P})_{\tau'}$$

gegeben, wo $\mathsf{M}, \mathsf{N}, \mathsf{P}$ folgende Bedeutungen haben:

$$(4) \qquad \left.\begin{aligned} \mathsf{M} &= \mu u'\xi q^{\tau-\tau'} + \mu' u \xi' + \mu''\xi\xi' q^{\tau} \\ \mathsf{N} &= \nu u'\xi q^{\tau-\tau'} + \nu' u \xi' + \nu''\xi\xi' q^{\tau} \\ \mathsf{P} &= \varrho u'\xi q^{\tau-\tau'} + \varrho' u \xi' + \varrho''\xi\xi' q^{\tau} \end{aligned}\right\} \text{mod. } q^{n-\tau'}.$$

Diese Substitutionen müssen nun eine Gruppe bilden. Dies ist der Fall, wenn für jeden Werth von ξ und ξ' (oder η und η') eine Relation

$$(5) \qquad U^{\nu\xi}\, U'^{\nu\xi'} = U'^{\nu\eta'}\, U^{\nu\eta}$$

besteht. Daraus erhält man die folgenden Bedingungen:

$$(6) \qquad \left.\begin{aligned} \mu q^{\tau}(v'\eta - u'\xi) + \mu' q^{\tau'}(v\eta' - u\xi') - \mu'' q^{\tau+\tau'}(\eta\eta' + \xi\xi') &\equiv 0 \\ \nu q^{\tau}(v'\eta - u'\xi) + \nu' q^{\tau'}(v\eta' - u\xi') - \nu'' q^{\tau+\tau'}(\eta\eta' + \xi\xi') &\equiv 0 \\ \varrho q^{\tau}(v'\eta - u'\xi) + \varrho' q^{\tau'}(v\eta' - u\xi') - \varrho'' q^{\tau+\tau'}(\eta\eta' + \xi\xi') &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{mod. } q^n,$$

wo

$$v^2 \equiv 1 + \Pi \eta^2 q^{2\tau}, \quad v'^2 \equiv 1 + \Pi' \eta'^2 q^{2\tau'} \text{ mod. } q^n \text{ ist.}$$

Da nach Voraussetzung die Congruenz

$$(7) \qquad \mu : \nu : \varrho \equiv \mu' : \nu' : \varrho' \text{ mod. } q$$

nicht stattfindet, so erkennt man die Zulässigkeit der Substitutionen:

$$\begin{aligned} v'\eta - u'\xi &= X q^{\tau'}, \\ v\eta' - u\xi' &= Y q^{\tau}, \\ \eta\eta' + \xi\xi' &= Z. \end{aligned}$$

Dadurch erhält man die Congruenzen:

$$(8) \qquad \left.\begin{aligned} \mu X + \mu' Y - \mu'' Z &\equiv 0 \\ \nu X + \nu' Y - \nu'' Z &\equiv 0 \\ \varrho X + \varrho' Y - \varrho'' Z &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{mod. } q^{n-\tau-\tau'}.$$

Diese sollen nun Lösungen $X : Y : Z$ haben, welches auch die Werthe ξ, ξ' sein mögen. Dazu ist aber nothwendig, dass ist:

$$(9) \qquad \frac{1}{2}\cdot \begin{vmatrix} \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \\ \varrho & \varrho' & \varrho'' \end{vmatrix} = S = \mu''^2 + \nu''\varrho'' \equiv 0 \text{ mod. } q^{n-\tau-\tau'}.$$

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Ist sie nämlich erfüllt, so giebt es Zahlen *) ξ_0, ξ_0', für welche

*) Wegen des Nichtbestehens der Congruenz (7) muss jedenfalls eine der Grössen μ'', ν'', ϱ'' zu q relativ prim sein.

$$\left.\begin{aligned} \mu'' &\equiv \mu\xi_0 + \mu'\xi_0' \\ \nu'' &\equiv \nu\xi_0 + \nu'\xi_0' \\ \varrho'' &\equiv \varrho\xi_0 + \varrho'\xi_0' \end{aligned}\right\} \text{mod. } q^{n-\tau-\tau'}$$

ist. Also kann man für jeden Werth von ξ, ξ' die Substitution

$$V_{\xi,\xi'} = \varphi(\mathsf{M}, \mathsf{N}, \mathsf{P})_{\tau'}$$

(Gln. 3 und 4) in der Gestalt anschreiben

(10) $$\varphi(x\mu' + y\mu q^{\tau-\tau'},\ x\nu' + y\nu q^{\tau-\tau'},\ x\varrho' + y\varrho q^{\tau-\tau'})_{\tau'},$$

wo x einen Rest mod. $q^{n-\tau'}$, y einen solchen mod. $q^{n-\tau}$ bedeutet.

Umgekehrt muss jede Substitution (10) einer Substitution $U^{\nu\xi}\, U'^{\nu\xi'}$ gleich sein. Denn die Zahl der ersten Substitutionen ist der Zahl der letzteren genau gleich. Aber auch jede Substitution $U'^{\nu\eta'}\, U^{\nu\eta}$ lässt sich in der Form (10) darstellen. Also hat man für jeden Werth von η und η' oder von ξ und ξ' eine Relation (5), was zu beweisen war.

Hieraus folgt zugleich der Satz:

c) *Erzeugen* $U = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$ *und* $U' = \varphi(\mu', \nu', \varrho')_{\tau'}$ *eine Gruppe* (σ, σ'), *wobei* $\sigma' \geqq \sigma$ *und* $\sigma' - \sigma = \eta$ *gesetzt sein soll, so sind alle Substitutionen dieser* (σ, σ') *durch*

$$\varphi(x\mu' + y\mu q^{\eta},\ x\nu' + y\nu q^{\eta},\ x\varrho' + y\varrho q^{\eta})_{\tau'}$$

gegeben, wo x alle Reste mod. $q^{\sigma'}$, y alle Reste mod. q^{σ} beschreibt.

III. *Die im Vorausgehenden für die Gruppe E abgeleiteten Resultate lassen sich auf die Gruppe*

$$F^{*}) = (E, R \equiv \omega + 1)$$

übertragen, welche aus E durch Hinzufügung der Substitution $\omega' \equiv \omega + 1$ mod. q^n von der Periode q^n abgeleitet ist und welche daher aus allen Substitutionen $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ von G besteht, für welche $\alpha \equiv \delta \equiv 1$ mod. q, $\gamma \equiv 0$ mod. q ist. Es sind zu diesem Zwecke nur kleine Modificationen in den Schlüssen anzuwenden (siehe die Anmerkungen). Man darf aber hiebei nicht ausser Acht lassen, dass die angewendeten Schlüsse wesentlich auf der Voraussetzung beruhen, dass *alle in der betrachteten Gruppe (E) überhaupt vorkommenden Cyklen der Periode q in E_{n-1}, alle Cyklen der Periode q^2 in E_{n-2} etc.* enthalten sind, dass also ausser den Cyklen von E_{n-1} keine weiteren cyklischen Gruppen der Periode q etc. auftreten. Diese Voraussetzung ist für F nur erfüllt, wenn $q > 3$ ist. Ist aber $q = 3$, so hat man ausser den G_3, G_{3^2}, ... von E_{n-1}, E_{n-2} noch andere Cyklen der Perioden 3, 3^2, ... nämlich Γ_3, Γ_{3^2}, ...

---

*) Es giebt $q + 1$ zu F gleichberechtigte Gruppen.

Ist also $q > 3$, so gelten die in I und II angeführten Sätze ausnahmslos auch für die Gruppe F. Ist hingegen $q = 3$, so haben diese Sätze nur Gültigkeit für diejenigen Untergruppen, welche keinen Cyklus Γ_3 oder Γ_3' enthalten.

§ 7.

Classification der Untergruppen (σ, σ) von E.

I. Es seien $U = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$ und $U' = \varphi(\mu', \nu', \varrho')_{\tau'}$ Erzeugende einer Gruppe (σ, σ'), dann ist die Gruppe G_{q^2}', welche die (σ, σ') mit der E_{n-1} gemeinsam hat, durch

$$\left(U^{q^{\sigma-1}} = \psi(\mu, \nu, \varrho), \quad U'^{q^{\sigma'-1}} = \psi(\mu', \nu', \varrho')\right)$$

dargestellt. In Rücksicht auf § 5 und § 6, II hat man daher sogleich die folgenden Sätze:

a) Es ist $S \equiv 0$ mod. q oder quadratischer Rest oder Nichtrest von q, je nachdem die Gruppe (σ, σ') eine $G_{q^2}'(I)$ oder (II) oder (III) von E_{n-1} enthält.

b) Gruppen G_{q^2}' (II) oder (III) von E_{n-1} können nur in solchen Gruppen (σ, σ') enthalten sein, für welche $\tau + \tau' \geqq n$ ist, deren sämmtliche Substitutionen also mit einander vertauschbar sind.

II. Von besonderem Interesse sind die Gruppen (σ, σ) der Ordnung $q^{2\sigma}$), für welche die erzeugenden Substitutionen U, U' dieselbe Periode q^σ haben. Für sie gilt der folgende Satz:

Die sämmtlichen Substitutionen $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ von G, welche die Gruppe $(U = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau,\ \ U' = \varphi(\mu', \nu', \varrho')_\tau)$ in sich transformiren, transformiren zugleich auch den Cyklus $U'' = \varphi(\mu'', \nu'', \varrho'')_\tau$ in sich und umgekehrt. Hierbei haben die Grössen μ'', ν'', ϱ'' wieder die Bedeutung des § 6.

In der That lässt sich mit Hülfe des Satzes II, c von § 6 der Beweis von § 5, II sofort auf die Gruppen (σ, σ) übertragen. Man braucht nur statt mod. q überall mod. q^σ zu setzen.

Durch diesen Satz ist eine eindeutige Zuordnung der Gruppen (σ, σ) und der Cyklen σ von der Art erzielt, dass gleichberechtigten Gruppen (σ, σ) auch gleichberechtigte Cyklen σ entsprechen und umgekehrt. Dadurch lassen sich die Resultate des § 4 sogleich auf die Gruppen (σ, σ) übertragen, insofern solche existiren. Man hat daher die folgende

Γ. Tabelle der Gruppen (σ, σ).

I. $\tau \geqq \frac{n}{2}$, *also* $\sigma = n - \tau \leqq \frac{n}{2}$.

1) $(q + 1)\, q^{\sigma-1}$ gl. $(\sigma, \sigma)\, (I)$, $S \equiv$ mod. q^σ;

1') $2j$ Gattungen von $\frac{q^2-1}{2j}\, q^{\sigma+\varepsilon-2}$ gl. $(\sigma,\sigma)(I',\varepsilon)$ für $\varepsilon=1,2,3,\ldots,\sigma-1$;

$S \equiv s_0 q^{\sigma-\varepsilon}$ mod. q^σ, $s_0 \gtrless 0$ mod. q;

2) $\frac{q+1}{2}\, q^{2\sigma-1}$ gl. $(\sigma,\sigma)\,(II)$, $\left(\frac{S}{q}\right) = 1$;

3) $\frac{q-1}{2}\, q^{2\sigma-1}$ gl. $(\sigma,\sigma)\,(III)$, $\left(\frac{S}{q}\right) = -1$.

II. $\tau < \frac{n}{2}$, *also* $\sigma > \frac{n}{2}$.

1) $(q+1)\, q^{\sigma-1}$ gl. $(\sigma,\sigma)\,(I)$, $S \equiv 0$ mod. q^σ;

1') $2j$ Gattungen von $\frac{q^2-1}{2j}\, q^{\sigma+\varepsilon-2}$ gl. $(\sigma,\sigma)\,(I',\varepsilon)$ für $\varepsilon=1,2,\ldots,\tau$;

$S \equiv s_0 q^{\sigma-\varepsilon}$ mod. q^σ, $s_0 \gtrless 0$ mod. q.

Hierbei ist wieder $j = 1$ oder $= 2$ zu setzen, je nachdem $q \equiv 3$ oder $\equiv 1$ mod. 4 ist. Die Bedeutung der Grösse S siehe in § 6, II. Nach dem Satze II dieses Paragraphen ist dieselbe identisch mit der charakteristischen Grösse Π'', welche zur cyklischen Gruppe

$$(\sigma = U'' = \varphi(\mu'', \nu'', \varrho''))$$

gehört, die der Gruppe (σ, σ) entspricht.

III. Aus § 6, II, c folgt sogleich noch der folgende einfache Satz: *Der Cyklus $\sigma = (U'')$ ist ganz in der entsprechenden (σ, σ) enthalten, wenn $S \equiv 0$ mod. q^σ ist; er hat einen Cyklus $G_{q^\varkappa} = (U''^{q^{\sigma-\varkappa}})$ der Periode $q^\varkappa$ mit derselben gemein, wenn $S \equiv m_0 q^\varkappa$ mod. q^σ, $m_0 \gtrless 0$ mod. q, $\sigma > \varkappa > 0$ ist; er hat keine Substitution (ausser der Identität) mit ihr gemein, wenn $S \gtrless 0$ mod. q ist.*

§ 8.

Classification der Gruppen (σ, σ') von E und F.

1. Jede Gruppe (σ, σ') enthält eine (σ, σ) als ausgezeichnete Untergruppe, wenn $\sigma' > \sigma$ angenommen wird. Man erhält daher alle Gruppen (σ, σ'), wenn man zu jeder (σ, σ) die passenden Cyklen $\sigma' = (U)$ hinzunimmt. Die Cyklen (U) sind so zu wählen, dass $(U^{q^{\sigma'-\sigma}})$ in der ausgezeichneten (σ, σ) enthalten ist und dass ferner die Zahlen σ und σ' der Bedingung (a) oder (b) von § 6, II genügen. Was die erste Bedingung anbelangt, so bemerke man, dass zu jedem Cyklus σ von (σ, σ) gerade $q^{2\eta}$ $(\eta = \sigma' - \sigma)$ Cyklen σ' gehören, so dass sie σ gemeinsam haben. Ist $\sigma = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau$ und etwa $\nu \gtrless 0$ mod. q, so sind diese Cyklen σ' durch $\varphi(\mu + aq^\sigma, \nu, \varrho + cq^\sigma)_{\tau'}$ dargestellt, wo a und c jeden Rest

mod. q^η annehmen können. Auch die zweite Bedingung ist leicht zu erfüllen. Es bezeichne S die charakteristische Grösse der Gruppe $(\sigma, \sigma) = (\varphi(\mu', \nu', \varrho')_\tau, \; \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\tau)$. Ebenso gehöre S' zur Gruppe $(\sigma, \sigma') = ((\varphi\mu', \nu', \varrho')_\tau, \; \varphi(\mu + aq^\sigma, \; \nu, \; \varrho + aq^\sigma)_{\tau'})$. Dann hat man nach § 6, II:

$$S' = S + q^\sigma A, \quad \text{also} \quad S' \equiv S \text{ mod. } q^{n-\tau-\tau'}.$$

Es muss nun $S' \equiv 0 \text{ mod. } q^{n-\tau-\tau'}$ sein. Dieses ist, wenn $S \equiv 0 \text{ mod. } q^\sigma$ ist, d. h., wenn eine (σ, σ) (I) zu Grunde liegt, für jeden Werth von $\tau' \geqq 0$*) oder $\sigma' \leqq n$ der Fall. Ist hingegen $S \equiv s_0 q^{\sigma - \varkappa}$ mod. q^σ, $\sigma > \varkappa > 0$, so dass man von einer (σ, σ) $(I', \varkappa)$ ausgeht, so ist die Existenz der Gruppe (σ, σ') an die Bedingung $\sigma - \varkappa \geqq n - \tau - \tau'$ d. h. $\tau' \geqq \varkappa$ oder $\sigma' \leqq n - \varkappa$ geknüpft. Ist endlich $S \gtrless 0$ mod. q, d. h. hat man eine (σ, σ) (II) oder (III), so wird $\tau + \tau' \geqq n$ oder $\sigma + \sigma' \leqq n$.

Zur Classification der Gruppen (σ, σ') kann man folgenden Weg einschlagen. Man betrachte zunächst die Gruppe W von allen jenen Substitutionen, welche die Ausgangsgruppe (σ, σ) in sich transformiren. Dann studire man die *relative Gleichberechtigung* der Cyklen σ von (σ, σ) bez. der zu ihnen gehörigen Cyklen σ', wobei 2 Cyklen dann relativ gleichberechtigt heissen sollen, wenn der eine aus dem anderen durch Transformation in Bezug auf eine Substitution der Gruppe W hergeleitet werden kann. Zu letzterem Zwecke betrachte man die Gruppe W' von allen jenen Substitutionen, welche den Cyklus σ bez. σ' in sich transformiren und suche „den grössten Theiler von W und W'" d. h. die grösste Gruppe T, welche zugleich in W und W' als Untergruppe enthalten ist. Haben dann W und T bez. die Ordnungen o und o', so ist σ bez. σ' genau zu $r = o : o'$ Cyklen relativ gleichberechtigt, da es bei Transformation in Bezug auf o' Substitutionen von W ungeändert bleibt.

So ordnen sich die hier betrachteten Cyklen σ und σ' zu Gattungen von relativ gleichberechtigten Cyklen zusammen, wobei eine Gattung aus allen Cyklen besteht, welche zu einer unter ihnen relativ gleichberechtigt sind.

Es liegt ein wesentlicher Nachtheil der eben angegebenen Methode darin, dass sie keine Merkmale für die Cyklen derselben Gattung liefert. Um solche zu erlangen, schlage man das folgende directe Verfahren ein. Man transformire den zu untersuchenden Cyklus σ oder $\sigma' = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_{\tau \text{ oder } \tau'}$ in Bezug auf alle Substitutionen $S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ von W (§ 4, IV und § 5, II, 1) und suche dann solche Functionen

---

*) Gruppen von F kommen also nur in Betracht, wenn eine (σ, σ) (I) zu Grunde liegt.

$\lambda_1(\mu, \nu, \varrho)$, $\lambda_2(\mu, \nu, \varrho)$, ... der Grössen μ, ν, ϱ, welche bei diesen Transformationen ungeändert bleiben. Diese Functionen mögen „*Charaktere*" heissen. Sollen dann 2 Cyklen $\varphi(\mu, \nu, \varrho)_{\tau'}$ und $\varphi(\mu', \nu', \varrho')_{\tau'}$ relativ gleichberechtigt sein, so müssen offenbar die einzelnen Charaktere für beide Cyklen gleiche Werthe annehmen. Ein volles System von Charakteren hat man, wenn man aus der Gleichheit der Werthe der Charaktere auf die relative Gleichberechtigung der betreffenden Cyklen schliessen kann.

Es ist nun klar, dass man gleichberechtigte (σ, σ') mit gemeinsamer (σ, σ) erhält, wenn man zur (σ, σ) relativ gleichberechtigte σ' hinzunimmt und dass umgekehrt zwei gleichberechtigte (σ, σ') mit gemeinsamer (σ, σ) nothwendig relativ gleichberechtigte σ' enthalten müssen. Ist daher z_1 die Zahl der Cyklen σ' einer Gattung von rel. gl. Cyklen, z_2 die Zahl der Cyklen dieser Gattung, welche derselben (σ, σ') angehören, so ist diese (σ, σ') genau zu $z = z_1 : z_2$ Gruppen (σ, σ') mit gemeinsamer (σ, σ) gleichberechtigt. Die Zahl aller zu der gegebenen (σ, σ') gleichberechtigten Gruppen ist daher $Z = z \cdot t$, wenn t die Zahl der zur (σ, σ) gleichberechtigten Gruppen ist.

II. Als Beispiel sollen in Kürze die Cyklen

$$\sigma'(I', \eta - \sigma + 2\varkappa + 2\varepsilon) = \varphi(x_0 q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon}, 1, -m_0 q^{\sigma-\varkappa} + y q^{\sigma})_{\tau'},$$
$$\varepsilon > \frac{\sigma - \varkappa}{2}$$

behandelt werden, welche zur Gruppe (σ, σ) $(I', \varkappa)$ des § 9 gehören. Zunächst transformire man $\sigma' = \varphi(\vartheta\mu, \vartheta\nu, \vartheta\varrho)_{\tau'} = \varphi(\vartheta x_0 q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon}, \ldots)_{\tau'}$ in Bezug auf die allgemeine Substitution S von W, für welche (§ 4, IV) $\delta \equiv \pm \alpha$ mod. $q^{\varkappa}$; $\gamma \equiv \pm \beta m_0 q^{\sigma-\varkappa}$ mod. q^{σ} ist*), wobei die oberen und unteren Vorzeichen zusammengehören. Dann erhält man nach § 5, II, 1:

$$(a)\left.\begin{aligned} \mu_1 &\equiv x_0 \vartheta q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon} \mp 2\alpha\beta m_0 \vartheta q^{\sigma-\varkappa} + \cdots (\text{höhere Potenzen von } q), \\ \nu_1 &\equiv \alpha^2\vartheta - 2\alpha\beta x_0 \vartheta q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon} + \beta^2(m_0 q^{\sigma-\varkappa} - y q^{\sigma}), \\ \varrho_1 &\equiv - \nu_1 m_0 q^{\sigma-\varkappa} \text{ mod. } q^{\sigma}. \end{aligned}\right\} \text{mod. } q^{\sigma'}.$$

Soll jetzt Cyklus

$$\sigma_1' = \varphi(M, N, R)_{\tau'} = \varphi(X_0 q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon}, 1, -m_0 q^{\sigma-\varkappa} + Y q^{\sigma})_{\tau'}$$

mit Cyklus $\sigma' = \varphi(\mu, \nu, \varrho)$ relativ gleichberechtigt sein, so muss es eine Substitution S von W geben, welche die Substitution $\varphi(\vartheta\mu, \vartheta\nu, \vartheta\varrho)_{\tau}$ des ersteren Cyklus in eine Substitution $\varphi(\Theta M, \Theta N, \Theta R)_{\tau'}$ des letzteren überführt. Dann müssen ϑ und Θ zuerst (§ 2, II, Zusatz) so be-

*) Die Gruppe enthält die Substitution $T = f(\lambda, 0, 0, \lambda^{-1})$, wo $\lambda^{2j} \equiv 1$ mod. $q^{\varkappa}$ ist. Ist $q \equiv 3$ mod. 4, so wird $\lambda \equiv \pm 1$ mod. $q^{\varkappa}$; ist $q \equiv 1$ mod. 4, so kommt $\lambda^2 \equiv \pm 1$ mod. $q^{\varkappa}$.

stimmt sein, dass die beiden letzten Substitutionen gleiche charakteristische Grössen Π haben, dass also ist

$$(b)\qquad \vartheta^2(\mu^2+\nu\varrho)\equiv\Theta^2(M^2+NR)\ \text{etwa}\ \equiv q^{2\sigma-2\varkappa-2\varepsilon}\ \text{mod.}\ q^{\sigma'}.$$

Hieraus kommt:

$$(c)\qquad \left.\begin{aligned}\vartheta^2&\equiv(x_0^2-m_0q^{\varkappa+2\varepsilon-\sigma}+q^{2\varkappa+2\varepsilon-\sigma})^{-1}\\ \Theta^2&\equiv(X_0^2-m_0q^{\varkappa+2\varepsilon-\sigma}+q^{2\varkappa+2\varepsilon-\sigma})^{-1}\end{aligned}\right\}\ \text{mod.}\ q^{\eta-\sigma+2\varkappa+2\varepsilon}.$$

Aus dem Werthe von μ_1 (Gln. (a)) sieht man jetzt, dass es dann und nur dann durch passende Wahl von β möglich ist, μ_1 mit ΘM zu identificiren, wenn ist

$$\vartheta\mu\equiv\Theta M\ \text{mod.}\ q^{\sigma-\varkappa}\quad\text{oder}\quad x_0\vartheta\equiv X_0\Theta\ \text{mod.}\ q^{\varepsilon}.$$

Erhebt man nunmehr die beiden Seiten der letzteren Congruenz in das Quadrat und setzt die Werthe von ϑ^2 und Θ^2 ein, so erhält man nach einfachen Reductionen:

$$(d)\qquad \frac{x_0^2}{-m_0+yq^{\varkappa}}\equiv\frac{X_0^2}{-m_0+Yq^{\varkappa}}+Zq^{\eta+\varkappa}\ \text{mod.}\ q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon},$$

wo Z eine beliebig zu wählende Zahl ist. Man hat also 2 Fälle zu unterscheiden, nämlich:

1) $\eta+\varkappa\geqq\sigma-\varkappa-\varepsilon;\quad \dfrac{x_0^2}{-m_0+yq^{\varkappa}}\equiv\dfrac{X_0^2}{-m_0+Yq^{\varkappa}}\ \text{mod.}\ q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon},$

2) $\eta+\varkappa\leqq\sigma-\varkappa-\varepsilon;\quad \dfrac{x_0^2}{-m_0+yq^{\varkappa}}\equiv\dfrac{X_0^2}{-m_0+Yq^{\varkappa}}\ \text{mod.}\ q^{\eta+\varkappa}.$

Ist jetzt die Bedingung (d) erfüllt, so kann man durch passende Wahl von β $\mu_1=\Theta M$ machen. Dann folgt aber aus den Congruenzen (a, 3) und (b), dass nothwendig $\nu_1\equiv\pm\Theta N$ mod. $q^{\varkappa}$ sein muss. Ist jetzt $q\equiv 1$ mod. 4, so kann man $\lambda^2\equiv\pm1+zq^{\varkappa}$ in $T=f(\lambda,o,o,\lambda^{-1})$ so wählen, dass durch eine zweite Transformation von σ in Bezug auf T die Grösse ν_1 in ΘN und damit (wegen (b)) auch ϱ_1 in ΘR übergeht*). Die beiden Cyklen σ' und σ_1' sind also dann in der That relativ gleichberechtigt. Ist aber $q\equiv 3$ mod. 4, so kann man $\lambda^2\equiv 1+zq^{\varkappa}$ nur so bestimmen, dass entweder $\nu_1=\Theta N$ oder $=-\Theta N$ wird. Zur relativen Gleichberechtigung von σ' und σ_1' gehört also dann noch die weitere Bedingung $\Theta\equiv\vartheta$ oder $X_0\equiv x_0$ mod. q. Diese Resultate zusammenfassend erhält man die Charaktere:

$$\left(\frac{x_0}{q}\right)^j\ \text{und}\ \frac{x_0^2}{-m_0+yq^{\varkappa}}\ \text{mod.}\ q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon}\ \text{bez. mod.}\ q^{\eta+\varkappa}.$$

Hier bedeutet $\left(\frac{x_0}{q}\right)$ das Legendre'sche Zeichen und j ist wieder $=1$ oder 2 zu setzen, je nachdem $q\equiv 3$ oder $\equiv 1$ mod. 4 ist. Aus

*) Es ist $T\varphi(\mu,\nu,\varrho)\,T^{-1}=\varphi(\mu,\nu\lambda^2,\varrho\lambda^{-2})$.

der Zahl der Werthe der Charaktere und der Zahl der betrachteten Cyklen σ' folgt jetzt sogleich das folgende Resultat: Es giebt zur $(\sigma,\sigma)(I',\varkappa)$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{q-1}{j}\, q^{\eta+\varkappa-1} \text{ Gatt. von } j\,q^{\eta+\varepsilon} \text{ rel. gl. } \sigma'(I',\ \eta-\sigma+2\varkappa+2\varepsilon), \\ \qquad\qquad \text{wenn } \varepsilon \leqq \sigma-2\varkappa-\eta; \\ \frac{q-1}{j}\, q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon-1} \text{ Gatt. von } j\,q^{2\eta-\sigma+2\varkappa+2\varepsilon} \text{ rel. gl. } \sigma'(I',\ \eta-\sigma+2\varkappa+2\varepsilon), \\ \qquad\qquad \text{wenn } \varepsilon > \sigma-2\varkappa-\eta. \end{array}\right.$$

III. Wenn $q \equiv 3 \text{ mod. } 4$ ist, so gehören zu einer $(\sigma,\sigma)\,(III)$ 2 Gattungen von relativ gleichberechtigten $\sigma(III)$ oder $\sigma'(III)$. Man würde aber bei Aufstellung des allgemeinen Charakters dieser Gattungen ohne Hereinziehung der Galois'schen Imaginären auf Schwierigkeiten stossen. Es liegt eben hier ein Fall vor, in welchem diese Imaginären dem Wesen der Sache nach sich *nicht* vermeiden lassen.

Es sei

$$(\sigma,\sigma)\,(III) = [\varphi(o,\ v+w\sqrt{N},\ v-w\sqrt{N})_\tau]; \quad \left(\frac{N}{q}\right) = -1 \text{ (s. § 9).}$$

Dann ist $U'' = \varphi(\sqrt{N},\ o,\ o)$ und nach § 4, IV

$$W = \left(E_\sigma,\ T = \frac{l\omega}{l^{-1}},\ \Theta = \frac{B}{C\omega}\right),$$

wo l eine Primitivwurzel von

(1) $$e^{q+1} \equiv 1 \text{ mod. } q^n$$

ist und $B = b + c\sqrt{N}$, $C = b - c\sqrt{N}$ irgend zwei conjugirt imaginäre Zahlen sind, welche der Bedingung genügen

(2) $$BC \equiv -1 \text{ mod. } q^n.$$

Die charakteristische Grösse $\Pi = \nu\varrho = v^2 - Nw^2$ der allgemeinen Substitution $\varphi(0,\ v+w\sqrt{N},\ v-w\sqrt{N})_\tau$ von (σ,σ) ist für alle Werthe von v und w von 0 mod. q verschieden. Daher enthält (σ,σ) nur Cyklen $\sigma\,(II)$ und $\sigma\,(III)$ und zwar von jeder Art $\frac{q+1}{2}\, q^{\sigma-1}$. Für die erste ist Π quadratischer Rest von q, für die zweite quadratischer Nichtrest und zwar nehmen wir für die erzeugenden Substitutionen solcher Cyklen bez. die Werthe an

(3) $$\alpha)\ \Pi = 1, \quad \beta)\ \Pi = N.$$

Dieses vorausgesetzt untersuchen wir für den Fall $q \equiv 3$ mod. 4 die relative Gleichberechtigung zweier Cyklen

$$\left.\begin{array}{l} \sigma = \varphi(0,\ \pm\nu,\ \pm\varrho)_\tau = \varphi(0,\ v+w\sqrt{N},\ v-w\sqrt{N})_\tau \\ \sigma_1 = \varphi(0,\ \nu_1,\ \varrho_1)_\tau \ = \varphi(0,\ v_1+w_1\sqrt{N},\ v_1-w_1\sqrt{N})_\tau \end{array}\right\}$$

$$\Pi \equiv \nu\varrho \equiv \nu_1\varrho_1 \equiv \left\{\begin{array}{l} 1 \\ N \end{array}\right. \text{mod. } q^\sigma.$$

Aus den Relationen

$$T\sigma T^{-1} = \varphi(0,\ l^2\nu,\ l^{-2}\varrho)_\tau;\quad \Theta\sigma\Theta^{-1} = \varphi(0,\ -B^2\varrho,\ -C^2\nu)_\tau$$

ersieht man, dass eine der Congruenzen lösbar sein muss:

$$(4)\qquad \alpha)\ \pm\nu_1 \equiv l^2\nu;\quad \beta)\ \pm\nu_1 \equiv -B^2\varrho \mod. q^\sigma.$$

Nun ist

$$\nu^q \equiv (v + w\sqrt{N})^q \equiv v^q + w^q N^{\frac{q-1}{2}}\sqrt{N} \equiv v - w\sqrt{N} \equiv \varrho \mod. q$$

und mithin

$$(5)\quad \nu^{q+1} \equiv \nu\varrho \equiv \Pi;\ \text{ebenso}\ B^q \equiv C;\ B^{q+1} \equiv BC \equiv -1 \mod. q.$$

Daher liefern die Congruenzen (4), da $\frac{q+1}{2}$ gerade ist, die Bedingungen

$$(6)\quad \alpha)\ \nu_1^{\frac{q+1}{2}} \equiv \nu^{\frac{q+1}{2}};$$

$$\beta)\ \nu_1^{\frac{q+1}{2}} \equiv -\varrho^{\frac{q+1}{2}}\quad \text{oder}\quad \nu_1^{\frac{q+1}{2}}\cdot\nu^{\frac{q+1}{2}} \equiv -\Pi^{\frac{q+1}{2}} \mod. q.$$

Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass diese Bedingungen zur Lösbarkeit der entsprechenden Congruenzen auch hinreichend sind.

Wir trennen jetzt die Fälle $\Pi = 1$ und $\Pi = N$. Im ersten Falle heisst die Bedingung (6 β) einfach $\nu^{\frac{q+1}{2}}\cdot\nu_1^{\frac{q+1}{2}} \equiv -1 \mod. q$ und da nach (5) $\nu^{\frac{q+1}{2}}$, $\nu_1^{\frac{q+1}{2}}$ nur die Werthe $+1$ und -1 annehmen können, so ist jedenfalls immer eine der beiden Bedingungen (6) erfüllt. Es sind mithin dann alle $\sigma\ (II)$ relativ gleichberechtigt.

Im Falle $\Pi = N$ wird $\Pi^{\frac{q+1}{2}} \equiv N^{\frac{q-1}{2}} N \equiv -N \mod. q$, also geht (6 β) in $\nu^{\frac{q+1}{2}}\cdot\nu_1^{\frac{q+1}{2}} \equiv N \mod. q$ über. Da nach (5) die Grössen $\nu^{\frac{q+1}{2}}$, $\nu_1^{\frac{q+1}{2}}$ nur die Werthe $+\sqrt{N}$, $-\sqrt{N}$ annehmen können, so fallen die beiden Bedingungen in eine zusammen. Damit also dann σ und σ_1 gleichberechtigt sind, ist nothwendig und hinreichend, dass ist

$$(7)\quad (v + w\sqrt{N})^{\frac{q+1}{2}} \equiv (v_1 + w_1\sqrt{N})^{\frac{q+1}{2}}\ (\equiv \pm\sqrt{N}) \mod. q.$$

Wie lässt sich dieser Charakter auf die Gruppen in reeller Gestalt übertragen?

Sei der Einfachheit halber $N = -1$, $\sqrt{N} = i$ gesetzt, so transformire man die reelle Gruppe $\left[\varphi\left(\frac{\alpha-\delta}{2},\ \beta,\ \gamma\right)\right]$ in Bezug auf die imaginäre Substitution

$$\zeta = f\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,i,\ \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,i\right),$$

so geht sie in die imaginäre Gestalt $\left[\varphi\left(\frac{A-D}{2}, B, C\right)\right]$, $\frac{A-D}{2} = di$, $B = b + ci$, $C = b - ci$ über und zwar entspricht der reellen Substitution $\varphi\left(\frac{\alpha-\delta}{2}, \beta, \gamma\right)$ die imaginäre Substitution

$$\varphi\left(\frac{\beta-\gamma}{2} i, \; -\frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\alpha-\delta}{2} i, \; -\frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\alpha-\delta}{2} i\right).$$

Speziell geht $\varphi(v, w, w)_\tau$ in $\varphi(0, -w - vi, -w + vi)_\tau$ über. Der gesuchte Charakter ist also

$$(w + vi)^{\frac{q+1}{2}} \text{ mod. } q.$$

§ 9.

Tabelle Δ der Gruppen (σ, σ'), welche einer gegebenen (σ, σ) entsprechen.

$$\text{I.} \quad (\sigma, \sigma)(I) = [\varphi(v, w, 0)_\tau]; \quad t = (q+1)\, q^{\sigma-1}.$$
$$S \equiv 0 \text{ mod. } q^\sigma; \quad U'' = \varphi(0, 1, 0)_\tau.$$

Erster Fall: $\eta \geqq \sigma$.

1) $q^{\eta-\sigma}$ gl. $(\sigma, \sigma')(I, I)_0 = [\varphi(x\xi q^\sigma + z q^\eta, \xi, -x^2 \xi q^{2\sigma})_{\tau'}]$;

2) $2j$ Gatt. von $\frac{q-1}{2j} q^{\eta-\sigma+\varepsilon-1}$ gl. $(\sigma, \sigma')(I, I', \varepsilon)_0$, $\varepsilon = 1, 2, \cdots, \eta$.

$[\varphi(x\xi q^\sigma + z q^\eta, \xi, r_0 \xi q^{\sigma'-\varepsilon} - x^2 \xi q^{2\sigma})_{\tau'}]$; Ch.: $r_0^{\frac{q-1}{2j}}$ mod. q.

$$\left.\begin{array}{l}
3)\ 2 \text{ Gatt. v. } \frac{q-1}{2} q^{\eta-\sigma+2\pi-1} (\sigma, \sigma')(I, I)_\pi. \\
\quad [\varphi(\xi x_0 q^{\sigma-\pi} + z q^\eta, \xi, -x_0^2 \xi q^{2\sigma-2\pi})_{\tau'}], \text{ Ch.: } \left(\frac{x_0}{q}\right). \\
4) \left\{\begin{array}{l}
a)\ 2(q-1)\, q^{\varepsilon-\pi-1} \text{ Gatt. v. } \frac{q-1}{2} q^{\eta-\sigma+2\pi-1} (\sigma, \sigma')(I, I', \varepsilon)_\pi. \\
\qquad \varepsilon = \pi+1, \pi+2, \ldots, 2\pi-1. \\
b)\ 2(q-1)\, q^{\pi-1} \text{ Gatt. v. } \frac{q-1}{2} q^{\eta-\sigma+\varepsilon-1} (\sigma, \sigma')(I, I', \varepsilon)_\pi. \\
\qquad \varepsilon = 2\pi, 2\pi+1, \ldots, \eta. \\
\quad [\varphi(\xi x_0 q^{\sigma-\pi} + z q^\eta, \xi, \xi r_0 q^{\sigma'-\varepsilon} - \xi x_0^2 q^{2\sigma-2\pi})_{\tau'}]. \\
\quad \text{Ch.: } \left(\frac{x_0}{q}\right), \; \frac{r_0}{x_0^2} \text{ mod. } q^{\varepsilon-\pi} \text{ bez. mod. } q^\pi.
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \pi = 1, 2, \cdots, \left|\frac{\sigma}{2}\right|. \text{*)}$$

*) Wenn zwischen den für die einzelnen Gruppen aufgestellten Grenzen keine ganze Zahl liegt, so sind selbstverständlich die fraglichen (σ, σ') nicht vorhanden. Dabei ist die untere Grenze als solche festzuhalten und ebenso die obere.

5) $2q^{\sigma-\pi}$ Gatt. v. $\frac{q-1}{2}\, q^{2\eta-2\sigma+2\pi-1}\, (\sigma, \sigma')\, (I, I', \eta-\sigma+2\pi)$.

$$\pi = \left|\frac{\sigma}{2}\right| + 1,\ \left|\frac{\sigma}{2}\right| + 2, \cdots, \sigma - 1.$$

$[\varphi(\xi x_0 q^{\sigma-\pi} + z q^{\eta}, \xi, \xi r q^{\sigma})_{\nu'}]$; Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)$, $\frac{r}{x_0^2}$ mod. $q^{\sigma-\pi}$.

---

6) $q^{2\eta}$ gl. $(\sigma, \sigma')\, (I, II)$.
$[\varphi(\xi, z q^{\eta}, 0)_{\nu'}]$.

Zweiter Fall: $\left|\frac{\sigma+1}{2}\right| < \eta < \sigma$.

1) $1\, (\sigma, \sigma')\, (I, I)_0$.

---

2) $2j$ Gatt. v. $\frac{q-1}{2j}\, q^{\varepsilon-1} (\sigma, \sigma')\, (I, I', \varepsilon)_0$.

$$\varepsilon = 1, 2, \ldots, \eta.$$

---

3) 2 Gatt. v. $\frac{q-1}{2}\, q^{\eta-\sigma+2\pi-1}\, (\sigma, \sigma')\, (I, I)_{\pi}$.

---

4) a) $2(q-1)\, q^{\varepsilon-\pi-1}$ Gatt. v. $\frac{q-1}{2}\, q^{\eta-\sigma+2\pi-1}\, (\sigma, \sigma')\, (I, I', \varepsilon)_{\pi}$.

$$\varepsilon = \pi + 1,\ \pi + 2, \cdots, \eta - \sigma + 2\pi - 1.$$

---

b) α) $2(q-2)\, q^{\eta-\sigma+\pi-1}$ Gatt. v. $\frac{q-1}{2}\, q^{\varepsilon-1} (\sigma, \sigma')(I, I', \varepsilon)_{\pi}$.

Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)$; $\frac{r_0}{x_0^2}$ mod. $q^{\eta-\sigma+\pi}$, wobei $\frac{r_0}{x_0^2} \gtrless 1$ mod. q ist.

β) $2q^{\eta-\sigma+\pi}$ Gatt. v. $\frac{q-1}{2}\, q^{\eta-\sigma+\varepsilon-1}\, (\sigma, \sigma')\, (I, I', \varepsilon)_{\pi}^{0}$.

Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)$; $\frac{r_0}{x_0^2}$ mod. q^{π}, wobei $\frac{r_0}{x_0^2} \equiv 1$ mod. $q^{\sigma-\eta}$ ist.

γ) $2(q-1)\, q^{\eta-\sigma+\pi-1}$ Gatt. v. $\frac{q-1}{2}\, q^{\varepsilon-\vartheta-1} (\sigma, \sigma')\, (I, I', \varepsilon)_{\pi}^{\vartheta}$.

$$\vartheta = 1, 2, \cdots, \sigma - \eta - 1.$$

Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)$; $\frac{r_0}{x_0^2} \equiv 1 + \frac{m_0 q^{\vartheta}}{x_0^2}$ mod. $q^{\eta-\sigma+\pi+\vartheta}$.

$$\varepsilon = \eta - \sigma + 2\pi.$$

---

c) $2(q-1)\, q^{\eta-\sigma+\pi-1}$ Gatt. v. $\frac{q-1}{2}\, q^{\varepsilon-1}\, (\sigma, \sigma')\, (I, I', \varepsilon)_{\pi}$.

$$\varepsilon = \eta - \sigma + 2\pi + 1,\ \eta - \sigma + 2\pi + 2, \cdots, \eta.$$

Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)$, $\frac{r_0}{x_0^2}$ mod. $q^{\eta-\sigma+\pi}$.

$$\pi = \sigma - \eta + 1,\ \sigma - \eta + 2, \cdots, \left|\frac{\sigma}{2}\right|.$$

$$5)\begin{cases}
\text{a) } 2\,q^{\eta-\sigma+\pi}\ \text{Gatt. v. } \frac{q-1}{2}\, q^{2\eta-2\sigma+2\pi-1}(\sigma,\sigma')\,(I,I',\ \eta-\sigma+2\pi)_{\pi}^{\sigma-\pi}. \\
\quad r = m\,q^{2\sigma-2\pi-\eta};\quad \text{Ch.: } \left(\frac{x_0}{q}\right);\quad \frac{r}{x_0^{\,2}}\ \text{mod. } q^{\sigma-\pi}. \\
\text{b) } 2(q-1)\,q^{\eta-\sigma+\pi-1}\ \text{Gatt. v. } \frac{q-1}{2}\, q^{\eta-\vartheta-1}(\sigma,\sigma')(I,I',\ \eta-\sigma+2\pi)_{\pi}^{\vartheta}. \\
\quad r = m_0\,q^{\vartheta};\quad \text{Ch.: } \left(\frac{x_0}{q}\right);\quad \frac{r_0}{x_0^{\,2}}\ \text{mod.}\, q^{\eta-\sigma+\pi+\vartheta}. \\
\qquad \vartheta = 0,1,2,\cdots,2\sigma-2\pi-\eta-1. \\
\quad \pi = \left|\frac{\sigma}{2}\right|+1,\ \left|\frac{\sigma}{2}\right|+2,\cdots,\sigma-\left|\frac{\eta}{2}\right|-1.
\end{cases}$$

---

6) $2\,q^{\sigma-\pi}$ Gatt. v. $\frac{q-1}{2}\, q^{2\eta-2\sigma+2\pi-1}\,(\sigma,\sigma')\,(I,I',\ \eta-\sigma+2\pi)$.

$$\pi = \sigma-\left|\frac{\eta}{2}\right|,\ \sigma-\left|\frac{\eta}{2}\right|+1,\cdots,\sigma-1.$$

---

7) $q^{2\eta}$ gl. $(\sigma,\sigma')\,(I,II)$.

Dritter Fall: $\eta \leqq \left|\frac{\sigma+1}{2}\right|$.

1) $1(\sigma,\sigma')\,(I,I)_0$.

---

2) $2j$ Gatt. v. $\frac{q-1}{2j}\, q^{\varepsilon-1}\,(\sigma,\sigma')\,(I,I',\varepsilon)_0$.

$$\varepsilon = 1,2,\cdots,\eta.$$

$$3)\begin{cases}
\text{a) } 2\,q^{\eta-\sigma+\pi}\ \text{Gatt. v. } \frac{q-1}{2}\, q^{2\eta-2\sigma+2\pi-1}(\sigma,\sigma')(I,I',\ \eta-\sigma+2\pi)_{\pi}^{\sigma-\pi}. \\
\quad r = m\,q^{2\sigma-2\pi-\eta};\quad \text{Ch.: } \left(\frac{x_0}{q}\right),\quad \frac{r_0}{x_0^{\,2}}\ \text{mod. } q^{\sigma-\pi}. \\
\text{b) } 2(q-1)\,q^{\eta-\sigma+\pi-1}\ \text{Gatt. v. } \frac{q-1}{2}\, q^{\eta-\vartheta-1}(\sigma,\sigma')(I,I',\ \eta-\sigma+2\pi)_{\pi}^{\vartheta}. \\
\quad r = m_0\,q^{\vartheta};\quad \vartheta = 0,1,\cdots,2\sigma-2\pi-\eta-1. \\
\quad \text{Ch.: } \left(\frac{x_0}{q}\right),\quad \frac{r}{x_0^{\,2}}\ \text{mod. } q^{\eta-\sigma+\pi+\vartheta}. \\
\quad \pi = \sigma-\eta+1,\ \sigma-\eta+2,\cdots,\sigma-\left|\frac{\eta}{2}\right|-1.
\end{cases}$$

---

4) $2\,q^{\sigma-\pi}$ Gatt. v. $\frac{q-1}{2}\, q^{2\eta-2\sigma+2\pi-1}\,(\sigma,\sigma')\,(I,I',\ \eta-\sigma+2\pi)$.

$$\pi = \sigma-\left|\frac{\eta}{2}\right|,\ \sigma-\left|\frac{\eta}{2}\right|+1,\cdots,\sigma-1.$$

---

5) $q^{2\eta}$ gl. $(\sigma,\sigma')\,(I,II)$.

In dieser Tabelle für $(\sigma,\sigma)\,(I)$ kann η (für ein gegebenes $\sigma < n$) bei Ausschluss der Gruppen $(\sigma,\sigma')\,(I,II)$ die Werthe $\eta = 1,2,3,\cdots,n-\sigma$

beschreiben. Für die Gruppen (σ, σ') (I, II) ist der Werth $\eta = n - \sigma$, also $\sigma' = n$ unbrauchbar.

Ferner sind für den Fall $q = 3$ (§ 6, III) die der Werthcombination $\sigma = 1$, $\sigma' = n$ entsprechenden $(1, n)$ $(I, I', n-1)$, $\left(\frac{r_0}{3}\right) = -1$ wegzulassen. Für sie wäre die zum Cyklus (σ') gehörige charakteristische Grösse $\Pi' \equiv -3 \bmod. 9$, oder, was dasselbe aussagt, es wäre die zugehörige Grösse $S \equiv -3 \bmod. 9$.

II. $(\sigma, \sigma)(I', \varkappa) = [\varphi(v, w, -m_0 w q^{\sigma-\varkappa})_\tau]$; $t = \frac{q^2-1}{2j} q^{\sigma+\varkappa-2}$.

$S \equiv m_0 q^{\sigma-\varkappa} \bmod. q^\sigma$; $U'' = \varphi(0, 1, m_0 q^{\sigma-\varkappa})_\tau$.

Erster Fall: $\eta \geqq \sigma - \varkappa$.

a) 1 Gatt. v. $q^{2\eta-\sigma+\varkappa}$ (σ, σ') $(I', \varkappa, I', \eta + \varkappa)_0$.

Beispiel (A): $[\varphi(\xi x q^{\sigma-\varkappa} + z q^\eta, \xi, -m_0 \xi q^{\sigma-\varkappa} + y \xi q^\sigma)_{\tau'}]$.

---

b) $\frac{q-1}{j} q^{\varepsilon-1}$ Gatt. v. $j q^{2\eta-\sigma+\varkappa}$ (σ, σ') $(I', \varkappa, I', \eta + \varkappa)_\varepsilon$.

$$\varepsilon = 1, 2, \cdots, < \frac{\sigma - \varkappa}{2}.$$

Beispiel (B): $[\varphi(\xi x_0 q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon} + z q^\eta, \xi, -m_0 \xi q^{\sigma-\varkappa} + y \xi q^\sigma)_{\tau'}]$.

Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)^j$, $\frac{x_0^2}{-m_0 + y q^\varkappa} \bmod. q^\varepsilon$.

---

c) $\frac{q-1}{j} q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon-1}$ Gatt. v. $j q^{2\eta-2\sigma+2\varkappa+2\varepsilon}(\sigma,\sigma')(I', \varkappa, I', \eta - \sigma + 2\varkappa + 2\varepsilon)$.

ε alle ganzen Zahlen $> \frac{\sigma - \varkappa}{2}$ und $< \sigma - \varkappa$.

Beispiel (B); Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)^j$, $\frac{x_0^2}{-m_0 + y q^\varkappa} \bmod. q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon}$.

---

d) 1 Gattung v. $q^{2\eta}(\sigma, \sigma')$ $(I', \varkappa, II)$.

Beispiel (C): $[\varphi(\xi, z q^\eta, -m_0 z q^{\sigma-\varkappa})_{\tau'}]$.

---

e) Voraussetzung: $\sigma - \varkappa \equiv 0 \bmod. 2$.

$\frac{1}{j}\left(q-2-\left(\frac{m_0}{q}\right)\right) q^{\frac{\sigma-\varkappa}{2}-1}$ Gatt. v. $j q^{2\eta-\sigma+\varkappa}(\sigma,\sigma')$ $(I', \varkappa, I', \eta+\varkappa)_{\frac{\sigma-\varkappa}{2}}$.

Beispiel (B); $\varepsilon = \frac{\sigma - \varkappa}{2}$; Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)^j$, $\frac{x_0^2}{-m_0 + y q^\varkappa} \bmod. q^{\frac{\sigma-\varkappa}{2}}$.

Ausgeschlossen sind hier die Werthe $x_0 \equiv \pm \sqrt{m_0} \bmod. q$.

---

f) Voraussetzung: $\sigma - \varkappa \equiv 0 \bmod 2$; $\left(\frac{m_0}{q}\right) = 1$.

α) $\frac{2}{j}$ Gatt. v. $jq^\eta(\sigma, \sigma')(I', \varkappa, I)_{\frac{\sigma-\varkappa}{2}}$.

Beispiel (B); $\varepsilon = \frac{\sigma - \varkappa}{2}$; $x_0^2 \equiv m_0 - yq^\varkappa \bmod. q^{\eta+\varkappa}$;

Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)^j$.

β)
1) $\frac{2}{j}(q-1)q^{\zeta - \frac{\sigma+\varkappa}{2} - 1}$ Gatt. v. $jq^\eta(\sigma, \sigma')(I', \varkappa, I', \zeta)_{\frac{\sigma-\varkappa}{2}}$.

$$\zeta = \frac{\sigma + \varkappa}{2} + 1, \quad \frac{\sigma + \varkappa}{2} + 2, \cdots, \sigma - 1.$$

2) $\frac{2}{j}(q-1)q^{\frac{\sigma-\varkappa}{2} - 1}$ Gatt. v. $jq^{\eta-\sigma+\zeta}(\sigma, \sigma')(I', \varkappa, I', \zeta)_{\frac{\sigma-\varkappa}{2}}$.

$$\zeta = \sigma, \ \sigma + 1, \cdots, \eta + \varkappa - 1.$$

Beispiel (B); $\varepsilon = \frac{\sigma - \varkappa}{2}$;

$$x_0^2 \equiv m_0 - yq^\varkappa + s_0 q^{\eta+\varkappa-\zeta} \bmod. q^{\eta+\varkappa}.$$

Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)^j$, $\frac{s_0}{x_0^2} \bmod. q^{\zeta - \frac{\sigma+\varkappa}{2}}$ bez. mod. $q^{\frac{\sigma-\varkappa}{2}}$.

Zweiter Fall: $\frac{\sigma - \varkappa}{2} < \eta < \sigma - \varkappa$.

a) 1 Gatt. v. $q^\eta(\sigma, \sigma')(I', \varkappa, I', \eta + \varkappa)_0$.
Beispiele wie beim ersten Fall.

---

b) $\frac{q-1}{j} q^{\eta-\sigma+\varkappa+\varepsilon-1}$ Gatt. v. $jq^\eta(\sigma, \sigma')(I', \varkappa, I', \eta + \varkappa)_\varepsilon$.

$\varepsilon = \sigma - \varkappa - \eta + 1, \ \sigma - \varkappa - \eta + 2, \cdots, < \frac{\sigma - \varkappa}{2}$.

Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)^j$, $\frac{x_0^2}{-m_0 + yq^\varkappa} \bmod. q^{\eta-\sigma+\varkappa+\varepsilon}$.

---

c)
1) $\frac{q-1}{j} q^{\eta-\sigma+\varkappa+\varepsilon-1}$ Gatt. v. $jq^\eta(\sigma, \sigma')(I', \varkappa, I', \eta - \sigma + 2\varkappa + 2\varepsilon)$.

$$\frac{\sigma - \varkappa}{2} < \varepsilon < \sigma - \varkappa - \frac{\eta}{2}.$$

2) $\frac{q-1}{j} q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon-1}$ Gatt. v. $jq^{2\eta-2\sigma+2\varkappa+2\varepsilon}(\sigma, \sigma')(I', \varkappa, I', \eta - \sigma + 2\varkappa + 2\varepsilon)$.

$$\sigma - \varkappa - \frac{\eta}{2} \gtreqless \varepsilon < \sigma - \varkappa.$$

Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)^j$, $\frac{x_0^2}{-m_0 + yq^\varkappa} \bmod. q^{\eta-\sigma+\varkappa+\varepsilon}$ bez. mod. $q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon}$.

---

d) 1 Gatt. v. $q^{2\eta}(\sigma,\sigma')(I',\varkappa,II)$.

---

e) **Voraussetzung:** $\sigma-\varkappa$ gerade.

$\frac{1}{j}\left(q-2-\left(\frac{m_0}{q}\right)\right)q^{\eta-\frac{\sigma-\varkappa}{2}-1}$ Gatt. v. $jq^{\eta}(\sigma,\sigma')(I',\varkappa,I',\eta+\varkappa)_{\frac{\sigma-\varkappa}{2}}$.

Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)^j$, $\frac{x_0^2}{-m_0+yq^{\varkappa}}$ mod. $q^{\eta-\frac{\sigma-\varkappa}{2}}$.

Ausgeschlossen sind hier wieder die Werthe $x_0\equiv\pm\sqrt{m_0}$ mod. q.

---

f) **Voraussetzung:** $\sigma-\varkappa\equiv 0$ mod. 2 und $\left(\frac{m_0}{q}\right)=1$.

α) $\frac{2}{j}$ Gatt. v. $jq^{\eta}(\sigma,\sigma')(I',\varkappa,I)_{\frac{\sigma-\varkappa}{2}}$.

Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)^j$; x_0 wie beim ersten Falle.

β) $\frac{2}{j}(q-1)q^{\zeta-\frac{\sigma+\varkappa}{2}-1}$ Gatt. v. $jq^{\eta}(\sigma,\sigma')(I',\varkappa,I',\zeta)_{\frac{\sigma-\varkappa}{2}}$.

$\zeta=\frac{\sigma+\varkappa}{2}+1,\ \frac{\sigma+\varkappa}{2}+2,\cdots,\eta+\varkappa-1.$

Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)^j$, $\frac{s_0}{x_0^2}$ mod. $q^{\zeta-\frac{\sigma+\varkappa}{2}}$.

Dritter Fall: $\eta\leq\frac{\sigma-\varkappa}{2}$.

1) 1 Gatt. v. $q^{\eta}(\sigma,\sigma')(I',\varkappa,I',\eta+\varkappa)_0$.

---

2) α) $\frac{q-1}{j}q^{\eta-\sigma+\varkappa+\varepsilon-1}$ Gatt. v. $jq^{\eta}(\sigma,\sigma')(I',\varkappa,I',\eta-\sigma+2\varkappa+2\varepsilon)$.

$\varepsilon=\sigma-\varkappa-\eta+1,\ \sigma-\varkappa-\eta+2,\cdots,\sigma-\varkappa-\left|\frac{\eta}{2}\right|-1.$

β) $\frac{q-1}{j}q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon-1}$ Gatt. v. $jq^{2\eta-2\sigma+2\varkappa+2\varepsilon}(\sigma,\sigma')(I',\varkappa,I',\eta-\sigma+2\varkappa+2\varepsilon)$.

$\varepsilon=\sigma-\varkappa-\left|\frac{\eta}{2}\right|,\ \sigma-\varkappa-\left|\frac{\eta}{2}\right|+1,\cdots,\sigma-\varkappa-1.$

Ch.: $\left(\frac{x_0}{q}\right)^j$, $\frac{x_0^2}{-m_0+yq^{\varkappa}}$ mod. $q^{\eta-\sigma+\varkappa+\varepsilon}$ bez. mod. $q^{\sigma-\varkappa-\varepsilon}$.

---

3) 1 Gatt. v. $q^{2\eta}(\sigma,\sigma')(I',\varkappa,II)$.

Für diese Gruppen (σ, σ') ist die Zahl σ' den Bedingungen

$$\sigma' > \sigma; \quad \sigma' \leqq n - \varkappa$$

unterworfen, so dass η nur die Werthe $\eta = 1, 2, \cdots, n - \varkappa - \sigma$ beschreiben kann.

III. $(\sigma, \sigma)(II) = [\varphi(0, v, w)_\tau]; \quad t = \frac{q+1}{2} q^{2\sigma-1}.$

$$\left(\frac{S}{q}\right) = 1; \quad U'' = \varphi(1, 0, 0)_\tau.$$

1) a) 1 Gatt. v. $2q^\eta (\sigma, \sigma')(II, I)$.

Beispiel: $[\varphi(0, \xi, z q^\eta)_\tau]$.

b) $2j$ Gatt. v. $\frac{q-1}{j} q^{\eta-\sigma+\zeta-1} (\sigma, \sigma')(II, I', \zeta)$.

$$\zeta = \sigma + 1, \; \sigma + 2, \cdots, \sigma + \eta - 1.$$

Beispiel: $[\varphi(0, \xi x_0 q^{\sigma'-\zeta} + z q^\eta, \xi)_{\tau'}]$; Ch.: $x_0^{\frac{q-1}{2j}}$.

---

2) j Gatt. v. $\frac{q-1}{2j} q^{2\eta-1} (\sigma, \sigma')(II, II)$.

Beispiel: $[\varphi(0, x_0 \xi + z q^\eta, \xi)_{\tau'}]$, $\left(\frac{x_0}{q}\right) = +1$; Ch.: $x_0^{\frac{q-1}{2j}}$.

---

3) 1 Gatt. v. $\frac{q-1}{2} q^{2\eta-1} (\sigma, \sigma')(II, III)$.

Beispiel: $[\varphi(0, x_0 \xi + z q^\eta, \xi)_{\tau'}]$, $\left(\frac{x_0}{q}\right) = -1$.

Hier ist $\sigma' > \sigma$, $\sigma' + \sigma \leq n$ anzunehmen, so dass η nur die Werthe $\eta = 1, 2, \cdots, n - 2\sigma$ beschreibt.

IV. $(\sigma, \sigma)(III); \quad t = \frac{q-1}{2} q^{2\sigma-1}; \quad S \equiv N \text{ mod. } q^\sigma; \quad \left(\frac{N}{q}\right) = -1.$

a) reelle Gestalt: $[\varphi(v, w, -Nw)_\tau]$, $U'' = \varphi(0, 1, N)_\tau$.

b) imaginäre Gestalt: $[\varphi(0, v + w\sqrt{N}, v - w\sqrt{N})_\tau]$,

$$U'' = \varphi(\sqrt{N}, 0, 0)_\tau.$$

1) 1 Gatt. v. $\frac{q+1}{2} q^{2\eta-1} (\sigma, \sigma')(III, II)$.

Beispiele:
- a) $[\varphi(\xi, z q^\eta, -N z q^\eta)_{\tau'}]$ (reelle Gestalt der G).
- b) $[\varphi(0, \xi + z q^\eta \sqrt{N}, \xi - z q^\eta \sqrt{N})_{\tau'}]$ (imaginäre Gestalt der G).

---

2) $\frac{2}{j}$ Gatt. v. $\frac{j(q+1)}{4}\, q^{2\eta-1}\, (\sigma, \sigma')\, (III, III)$.

a) Beispiele für die reelle Gestalt der Gruppe:

1) wenn $q \equiv 1$ mod. 4 ist: $[\varphi(zq^\eta, \xi, -N\xi)_{\sigma'}]$;

2) wenn $q \equiv 3$ mod. 4 ist ($N = -1$): $[\varphi(v\xi + zq^\eta, w\xi, w\xi)_{\sigma'}]$;

$$v^2 + w^2 \equiv -1 \bmod. q^\sigma\,; \quad \text{Ch.: } (w + vi)^{\frac{q+1}{2}} \bmod. q, \quad i^2 = -1.$$

b) Beispiel für die imaginäre Gestalt der Gruppe:

$$[\varphi(0, (v + w\sqrt{N})\,\xi + zq^\eta, (v - w\sqrt{N})\,\xi + zq^\eta)_{\sigma'}];$$

Ch.: $(v + w\sqrt{N})^{\frac{q+1}{2}}$ mod. q (wenn ein solcher vorhanden ist).

Die Bedingungen für σ', σ, η sind wie bei III.

In dieser Tabelle beschreiben v und w alle Werthe mod. q^σ, m_0 ist ein fester von 0 mod. q verschiedener Werth, die Grössen x, y, r, s können beliebige Werthe bedeuten mit der Bemerkung, dass der Werth 0 mod. q ausgeschlossen ist, wenn dieselben den Index 0 haben. Es ist ferner $j = 1$ oder 2, je nachdem $q \equiv 3$ oder $\equiv 1$ mod. 4 ist, $\left(\frac{a}{q}\right)$ bedeutet das Legendre'sche Zeichen und $|a|$ die grösste in a enthaltene ganze Zahl. Ferner beschreibt z alle Werthe mod. q^σ, ξ alle Werthe mod. $q^{\sigma'}$ · $[\varphi(\xi, zq^\eta, 0)_{\sigma'}]$ bedeutet die Gruppe (σ, σ'), welche aus allen Substitutionen φ besteht, die den eben angegebenen Werthen von ξ und z entsprechen. Was ferner die den Gruppen (σ, σ') in Klammern angefügten Unterscheidungen anbelangt, so bedeutet z. B. $(\sigma, \sigma')\,(I', \varkappa, I', \zeta)_{\frac{\sigma-\varkappa}{2}}$ eine (σ, σ'), welche durch eine $(\sigma, \sigma)\,(I', \varkappa)$ und eine zu ihr passende $\sigma'(I', \zeta)_{\frac{\sigma-\varkappa}{2}}$, dem Werthe $z = 0$ entsprechend, erzeugt werden kann. Unter Umständen kann aber diese (σ, σ') auch durch Hinzufügung eines Cyklus σ' von anderer Art erlangt werden. Indess findet man die q^σ in einer (σ, σ') enthaltenen Cyklen σ' leicht dadurch, dass man $\xi = 1$ und für z alle mod. q^σ verschiedenen Werthe setzt.

§ 10.

Die nicht-cyklischen Untergruppen von G, welche nicht in E oder F enthalten sind.

Bei Aufstellung der Untergruppen von G, welche weder in E noch in einer der $q + 1$ Gruppen F enthalten sind, unterscheide ich *Gruppen, welche mit E oder F*

1) *keine Substitution* (ausser der Identität),

2) *einen Cyklus* (σ),

3) *eine* (σ, σ) *oder* (σ, σ') *gemeinsam haben.*

Nicht betrachtet werden jene Gruppen, welche die ganze Gruppe E_{n-1} enthalten.

Für die Gruppen der 2. und 3. Art ist nothwendig die enthaltene (σ) oder (σ, σ) oder (σ, σ') ausgezeichnete Untergruppe. Sind die Substitutionen dieser letzteren Gruppe durch $1, R_2, R_3, \cdots, R_{q^\nu}$ dargestellt, so kann man für eine hier behandelte Gruppe der Ordnung $g = \mu q^\nu$ das nachfolgende Schema aufstellen, welches die bekannten Eigenschaften hat:

$$\begin{array}{lllll} 1, & R_2, & R_3, & \cdots, & R_{q^\nu}, \\ S_2, & S_2R_2, & S_2R_3, & \cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_\mu, & S_\mu R_2, & & \cdots, & S_\mu R_{q^\nu}. \end{array}$$

Hier sind die Substitutionen derselben Horizontalreihe mod. q congruent, während diess bei Substitutionen von verschiedenen Reihen nicht stattfindet. Ferner bilden die Substitutionen $S_1 = 1, S_2, S_3, \cdots, S_\mu$ mod. q eine Gruppe, welche in der Gruppe der Modulargln. für den Transformationsgrad q enthalten ist.

I. Für die Gruppen des ersten Falles ist $g = \mu$. Eine solche Gruppe besteht also dann aus den Substitutionen $1, S_2, \cdots, S_\mu$. Für $q > 3$ kann ferner μ nicht durch q theilbar sein, weil dann alle Substitutionen der Periode q in E_{n-1} enthalten sind. Es können also für $q > 3$ ausser Cyklen nur Doppelpyramiden-, Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaedergruppen auftreten. Diese letzteren 2 Gruppenarten werden natürlich nur dann vorhanden sein, wenn sie mod. q existiren.

Man kann auch leicht beweisen, dass eine Gruppe der 2 letztgenannten Arten nur durch ihre eigenen Substitutionen in sich transformirt wird, wodurch man auch ihre Gleichberechtigung ermitteln kann. Würde etwa eine Ikosaedergruppe $G''_{60} = J$ durch eine ausserhalb derselben liegende Substitution S von G in sich transformirt, so müsste sie jedenfalls mod. q zu einer Ikosaedersubstitution σ*) congruent sein. Also gäbe es eine Substitution $S\sigma^{-1}$ von E und damit auch eine Substitution R der Periode q, welche J in sich transformiren würde. Dann hätte man aber eine Gruppe (J, R) von der Ordnung $60q$, welche höchstens 60 Cyklen G_q enthalten könnte. Da man hier $q \geqq 11$ voraussetzen kann, so müsste sie also eine G_q oder G'_{q^2} mit E_{n-1} gemeinsam haben. Diese G_q bez. G'_{q^2} wäre aber aus-

*) Math. Annalen Bd. XVIII, pag. 354.

gezeichnete Untergruppe und desshalb müsste (J, R) in der zugehörigen Gruppe W (§ 4, IV) enthalten sein. Damit müsste sie aber mod. q einen Cyklus oder eine Doppelpyramidengruppe bilden, was unmöglich ist. Also geht eine G_{60}'' durch 60 Transformationen in sich über, ist somit mit $\frac{q^2-1}{120}\, q^{3n-2}\, G_{60}''$ gleichberechtigt.

Eine zum Cyklus $(T) = f(\varrho, 0, 0, \varrho^{-1})$ von der Ordnung 5 gehörige G_{60}'' ist dargestellt durch

$$[T = f(\varrho, 0, 0, \varrho^{-1}), \quad \Theta = f((\varrho - \varrho^{-1})^{-1}, B, C, -(\varrho - \varrho^{-1})^{-1})].$$

Hier ist ϱ eine reelle oder imaginäre primitive Wurzel der Congruenz $\varrho^5 \equiv 1$ mod. q^n, je nachdem $q \equiv 1$ oder -1 mod. 5 ist. B und C sind beide reell oder conjugirt imaginär. Da B immer $(q \mp 1)\, q^{n-1}$ Werthe haben kann, nämlich $B\lambda^x (x = 0, 1, \cdots, (q \mp 1)\, q^{n-1} - 1)$, wo λ eine primitive Wurzel von $x^{(q \mp 1) \cdot q^{n-1}} \equiv 1$ mod. q^n ist, da ferner immer 5 der zugehörigen Substitutionen Θ in einer G_{60}'' enthalten sind $(B\varrho^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4)$, so giebt es $\frac{q \mp 1}{5}\, q^{n-1}$ zum Cyklus (T) gehörige G_{60}''. Nun hat man aber $\frac{q \pm 1}{2}\, q^{2n-1}$ gl. Cyklen der Ordnung 5, während eine G_{60}'' zu je $6\, G_5$ gehört; man erhält mithin $\frac{q^2-1}{60}\, q^{3n-2}\, G_{60}''$. Diese bilden nach dem obigen Resultate 2 Gattungen.

Da die Cyklen G_5 gleichberechtigt sind, so bilden auch die zu (T) gehörigen G_{60}'' 2 Gattungen. Transformirt man eine solche G_{60}'' in Bezug auf die Substitutionen $T = f(\lambda^x, 0, 0, \lambda^{-x})$, so geht (T) in sich über: während in der Substitution Θ an Stelle von B $B\lambda^{2x}$ tritt. Zwei Gruppen (B) und (B') sind daher immer gleichberechtigt, wenn $B'^{\frac{q \mp 1}{2}} \equiv B^{\frac{q \mp 1}{2}}$ mod. q ist. Also heisst der Charakter für diese Gruppen: $B^{\frac{q \mp 1}{2}}$ mod. q.

Ganz ebenso kann man bei den Oktaedergruppen etc. verfahren.

Ist $q = 3$, so kann $\mu = 2, 3, 4, 6, 12$ sein. Die beiden ersten Werthe geben Cyklen G_2 und Γ_3. Ferner liefert $\mu = 4$ Doppelpyramidengruppen G_4'. Für die imaginäre Gestalt der Gruppe

$$(N = -1, \quad \sqrt{N} = i)$$

wird eine solche G_4' durch

$$\left(\Theta_1 = \frac{i\omega}{-i}, \quad \Theta_2 = \frac{B}{C\omega}\right)$$

erzeugt und zwar gehören zum Cyklus (Θ_1) genau $3^{n-1}\, G_4'$, da $\pm B$ $2 \cdot 3^{n-1}$ verschiedene Werthe hat. Diese sind ferner gleichberechtigt, denn sie gehen durch Transformation in Bezug auf die Substitutionen $T = f(\lambda^x, 0, 0, \lambda^{-x})$, $\lambda^{2 \cdot 3^{n-1}} \equiv 1$ mod. 3^n aus einer unter ihnen hervor.

Da ferner 3^{2n-1} gleichberechtigte G_2 vorhanden sind und jede G_4' zu $3\,G_2$ gehört, so erhält man 3^{3n-3} gl. G_4'.

Der Werth $\mu = 6$ ist unbrauchbar, da mod. 3 keine Untergruppe der Ordnung 6 vorhanden ist. *Dagegen liefert $\mu = 12$ besondere Gruppen, nämlich Tetraedergruppen G_{12}''.* Dies zeige ich, indem ich Beispiele solcher Gruppen hinschreibe.

a) Beispiel für die imaginäre Gestalt ($i^2 \equiv -1$ mod. 3^n):

$$\left(\Theta_1 \equiv \frac{i\omega}{-i},\ \Theta_2 \equiv \frac{B}{C\omega},\ S = f\left(\frac{-1+i}{2},\ B\frac{1-i}{2},\ C\cdot\frac{1+i}{2},\ \frac{-1-i}{2}\right)\right).$$

b) Beispiel für die reelle Gestalt:

$$\left(\Theta_1 \equiv -\frac{1}{\omega},\ \Theta_2 = f(1, \sqrt{-2}, \sqrt{-2}, -1),\right.$$

$$\left. S = f\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{-2},\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{-2},\ 1-\tfrac{1}{2}\sqrt{-2},\ 1+\tfrac{1}{2}\sqrt{-2}\right)\right).$$

Da jede G_{12}'' *eine* G_4' enthält und umgekehrt jede G_4' *eine* G_{12}'' liefert, indem nämlich eine G_4' nur durch $4 \cdot 3^{3n-2} : 3^{3n-3} = 12$ Substitutionen in sich transformirt wird, so bekommt man 3^{3n-3} gl. Tetraedergruppen. Also hat man folgende auch für $q = 3$ gültige.

E. Tabelle der Gruppen des 1. Falles.

1) $\frac{q^2-1}{4\tau}\, q^{3n-2}\, G_{2\tau}'$ (Doppelpyramidengruppen), wo τ irgend ein von 1 und 2 verschiedener Theiler von $\frac{q \mp 1}{2}$;*) sie bilden 1 oder 2 Gattungen, je nachdem $\frac{q\mp 1}{2\tau} \equiv 1$ oder $\equiv 0$ mod. 2 ist.

2) $\frac{q^2-1}{24}\, q^{3n-2}\, G_4'$ (Doppelp.), welche 1 oder 2 Gattungen bilden, je nachdem $\left(\frac{2}{q}\right) = -1$ oder $+1$ ist.

3) $\frac{q^2-1}{24}\, q^{3n-2}\, G_{12}''$ (Tetraedergruppen), welche etc. (wie bei 2).

4) Wenn $\left(\frac{2}{q}\right) = 1$ ist, 2 Gattungen von $\frac{q^2-1}{48}\, q^{3n-2}$ gl. G_{24}'' (Oktaedergruppen).

5) Wenn $\left(\frac{q}{5}\right) = 1$ ist, 2 Gattungen von $\frac{q^2-1}{120}\, q^{3n-2}$ gl. G_{60}'' (Ikosaedergruppen).

Beispiele für diese Gruppen, wobei λ eine Primitivwurzel von $x^{(q\mp1)q^{n-1}} \equiv 1$ mod. q^n ist und die Substitutionen reell oder imaginär aufzufassen sind, je nachdem die oberen oder unteren Vorzeichen gelten.

---

*) Beide Vorzeichen gelten, jedoch gehören die oberen Zeichen zusammen und ebenso die unteren.

1) $\left(T = f(\varrho, 0, 0, \varrho^{-1}),\ \Theta = f(0, B, C, 0)\right);\ \varrho = \lambda^{\frac{q\mp1}{2\tau}q^{n-1}}$,

2) $(T = f(i, 0, 0, -i),\ \Theta$ wie bei 1),

3) $(q > 3)\left(S = f(\varrho, 0, 0, \varrho^{-1}),\ T = f((\varrho-\varrho^{-1})^{-1}, B, C, -(\varrho-\varrho^{-1})^{-1})\right)$,

$\varrho = \lambda^{\frac{q\mp1}{3}q^{n-1}}$.

Beispiele für $q = 3$ siehe oben.

4) u. 5) B. wie bei (3), nur ist $\varrho = \lambda^{\frac{q\mp1}{8}q^{n-1}}$ bez. $= \lambda^{\frac{q\mp1}{5}q^{n-1}}$.

Sind hiebei 2 Gattungen vorhanden, so ist der entsprechende Charakter: $B^{\frac{q\mp1}{2}}$ mod. q.

II. Bei den Gruppen des 2. und 3. Falles ist, wie schon bemerkt wurde, die enthaltene (σ) etc. ausgezeichnete Untergruppe. Also sind die Gruppen dieser Fälle in den zugehörigen Gruppen W enthalten. Man kann daher wieder denselben Weg einschlagen, der in § 8 für die Aufstellung der (σ, σ') angegeben wurde. Die Durchführung selbst ist in jedem Falle sehr einfach. Ferner sind von den (σ, σ') die meisten hier wegzulassen, indem die Ordnungen der zugehörigen Gruppen W, die der Tabelle von § 9 zu entnehmen sind, reine Potenzen von q werden, so dass sie nur Substitutionen von E und F enthalten, welche hier nicht in Betracht kommen.

Man findet die folgenden Resultate.

Z. I. Gruppen der 2. Art.

1) $(q+1)\,q^{2n-\sigma-1}$ gl. $G'_{\vartheta q^\sigma}(I)$ — (enthaltend) $\begin{cases} 1 & \sigma(I) \\ q^\sigma & G_\vartheta, \end{cases}$

Beispiel: $\left\{\sigma = \varphi(0,1,0)_\tau;\ T = f(\lambda_1, 0, 0, \lambda_1^{-1}),\ \lambda_1 = \lambda^{\frac{q-1}{2\vartheta}q^{n-1}}\right\}$

$\sigma = 1, 2, \ldots, n$; ϑ ein Theiler > 1 von $\frac{q-1}{2}$.

---

2) *Unter der Voraussetzung* $q \equiv 1$ *mod.* 4

4 Gatt. v. $\frac{q^2-1}{4}\,q^{2n-\sigma+\varkappa-2}\,G'_{2q^\sigma}(I', \varkappa)$ — $\begin{cases} 1 & \sigma(I', \varkappa) \\ q^\sigma & G_2 \end{cases}$

$\left\{\sigma = \varphi(0, 1, m_0 q^{\sigma-\varkappa})_\tau,\ \Theta_1 = f(\sqrt{-1}, 0, 0, -\sqrt{-1})\right\}$

$\sigma = 2, 3, \ldots, n$; Ch. $m_0^{\frac{q-1}{4}}$ mod. q.

$$3)\ \alpha)\ \frac{q^2-1}{4}\, q^{2n-2}\, G'_{2q^\sigma} \begin{Bmatrix}(II)\\(III)\end{Bmatrix} - \begin{cases} 1\ \sigma \begin{Bmatrix}(II)\\(III)\end{Bmatrix} \\ q^\sigma\ G_2 \end{cases}$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Sie bilden 1 *oder* 2 *Gattungen, je nachdem* $q \equiv \mp 1$ *oder* ± 1 *mod.* 4 *ist.*

$$\left\{\sigma \begin{Bmatrix}(II)\\(III)\end{Bmatrix} = \varphi(\mu, 0, 0)_\tau, \quad \Theta = f(0, B, C, 0)\right\}$$

$$\beta)\ \frac{q^2-1}{4\vartheta}\, q^{3n-\sigma-2}\, G'_{2\vartheta q^\sigma} \begin{Bmatrix}(II)\\(III)\end{Bmatrix} - \begin{cases} 1\ G_\vartheta q^\sigma \begin{Bmatrix}(II)\\(III)\end{Bmatrix} \text{ (Cyklus)} \\ \vartheta\, q^\sigma\, G_2 \end{cases}$$

$$\left\{G_{\vartheta q^\sigma} = f(\lambda_1, 0, 0, \lambda_1^{-1}), \ \lambda_1 = \lambda^{\frac{q\mp 1}{2\vartheta} q^{n-\sigma-1}}, \ \Theta(3, \alpha)\right\}.$$

Hier ist ϑ irgend ein Theiler > 1 von $\frac{q\mp 1}{2}$. Die Gruppen bilden 1 oder 2 Gattungen, je nachdem $\frac{q\mp 1}{2\vartheta}$ ungerade oder gerade ist. Ferner gehören die oberen Vorzeichen zu $\sigma(II)$, die unteren zu $\sigma(III)$. Im ersteren Falle ist das angegebene Beispiel jedesmal in der reellen Gestalt, im letzteren in der imaginären Gestalt gemeint.

II. Gruppen der 3. Art.

$$\text{a. } 1)\ (q+1)\, q^{2n-\sigma-1} \text{ gl. } G''_{\vartheta q^{2\sigma}}(I) - \begin{cases} 1\ (\sigma, \sigma)\ (I) \\ q^\sigma\, G_{\vartheta q^\sigma} \end{cases}$$

$\left(\vartheta \text{ ein Theiler} > 1 \text{ von } \frac{q-1}{2}\right)$

$$\left\{(\sigma, \sigma)(I) = [\varphi(v, w, 0)_\tau], \ T = f(\lambda_1, 0, 0, \lambda_1^{-1}), \ \lambda_1 = \lambda^{\frac{q-1}{2\vartheta} q^{n-1}}\right\}$$

$$2)\ (q+1)\, q^{2n-\sigma'-1} \text{ gl. } G''_{\vartheta q^{\sigma+\sigma'}}(I, I)_0 - \begin{cases} 1(\sigma, \sigma')\ (I, I)_0 \\ q^{\sigma'}\, G_{\vartheta q^\sigma} \end{cases}$$

(ϑ wie bei 1)

$$\left\{[\varphi(z q^\eta, \xi, 0)_{\tau'}], \ T(a, 1)\right\}.$$

3) *Wenn* $q \equiv 1$ *mod.* 4 *ist, hat man ausserdem*

$$4 \text{ Gatt. v. } \frac{q^2-1}{4}\, q^{2n-\sigma'+\varepsilon-2}\, G''_{2q^{\sigma+\sigma'}}(I, I', \varepsilon)_0 \begin{cases} 1\,(\sigma, \sigma')\,(I, I', \varepsilon)_0 \\ q^{\sigma'}\, G_{2 q^\sigma} \end{cases}$$

$$\left\{[\varphi(z q^\eta, \xi, r_0 \xi q^{\sigma'-\varepsilon})_{\tau'}], \ \Theta_1 = f(\sqrt{-1}, 0, 0, -\sqrt{-1})\right\};$$

$$\text{Ch.: } r_0^{\frac{q-1}{4}} \text{ mod. } q.$$

4) $(q+1)\,q^{2n-\sigma-1}$ gl. $G''_{\vartheta q^{\sigma+\sigma'}}(I, II) - \begin{cases} 1\,(\sigma,\sigma')\,(I, II)\\ q^{\sigma}\, G_{\vartheta q^{\sigma}}\end{cases}$

(ϑ wie bei 1)

$\left\{[\varphi(\xi, z q^{\eta}, 0)_{\tau'}],\ T(a, 1)\right\}$.

b. *Diese Gruppen existiren nur, wenn $q \equiv 1$ mod. 4 ist.*

1) 4 Gatt. v. $\frac{q^2-1}{4}\, q^{2n-\sigma+\varkappa-2}\, G''_{2q^{2\sigma}}(I', \varkappa) - \begin{cases} 1\,(\sigma, \sigma)\,(I', \varkappa)\\ q^{\sigma}\, G_{2q^{\sigma}}\end{cases}$

$\left\{[\varphi(v, w, -m_0 w q^{\sigma-\varkappa})_{\tau}],\ \Theta_1(a, 3)\right\}$; Ch.: $m_0^{\frac{q-1}{4}}$ mod. q.

2) 4 Gatt. v. $\frac{q^2-1}{4}\, q^{2n-\sigma'+\varkappa-2}\, G''_{2q^{\sigma+\sigma'}}(I', \varkappa, I', \eta+\varkappa)$

$$- \begin{cases} 1\,(\sigma, \sigma')\,(I', \varkappa, I', \eta+\varkappa)_0\\ q^{\sigma'}\, G_{2q^{\sigma}}\end{cases}$$

$\left\{[\varphi(z q^{\eta}, \xi, -m_0 \xi q^{\sigma-\varkappa})_{\tau'}],\ \Theta_1(a, 3)\right\}$.

3) 4 Gatt. v. $\frac{q^2-1}{4}\, q^{2n-\sigma+\varkappa-2}\, G''_{2q^{\sigma+\sigma'}}(I', \varkappa, II) - \begin{cases} 1\,(\sigma, \sigma')(I', \varkappa, II)\\ q^{\sigma}\, G_{2q^{\sigma'}}\end{cases}$

$\left\{[\varphi(\xi, z q^{\eta}, -m_0 z q^{\sigma'-\varkappa})_{\tau'}],\ \Theta_1(a, 3)\right\}$.

---

c. 1) $\frac{q\pm1}{2}\, q^{2n-2\sigma-1}$ gl. $G''_{\vartheta q^{2\sigma}}\begin{Bmatrix}(II, a)\\ (III, a)\end{Bmatrix} - \begin{cases} 1\,(\sigma, \sigma)\begin{Bmatrix}(II)\\ (III)\end{Bmatrix}\\ q^{2\sigma}\, G_{\vartheta}\end{cases}$

(ϑ ein Theiler > 1 von $\frac{q\mp1}{2}$)

$\left\{[\varphi(0, v, w)_{\tau}],\ T(a, 1)\right\}$

2) $\frac{q^2-1}{4}\, q^{2n-2}\, G''_{2q^{2\sigma}}\begin{Bmatrix}(II, b)\\ (III, b)\end{Bmatrix} - \begin{cases} 1\,(\sigma, \sigma)\begin{Bmatrix}(II)\\ (III)\end{Bmatrix}\\ q^{\sigma}\, G_{2q^{\sigma}}\end{cases}$

$\left\{(\sigma, \sigma) \text{ wie } (c, 1),\ \Theta = f(0, B, C, 0)\right\}$.

Diese Gruppen bilden 1 *Gattung, wenn* $\frac{q\mp1}{2}$ *ungerade ist, sie bilden* 2 *Gattungen, wenn* $\frac{q\mp1}{2}$ *gerade ist. Ch.:* $B^{\frac{q\mp1}{2}}$ *mod.* q.

3) $\frac{q^2-1}{4\vartheta}\, q^{2n-2\sigma-2}\, G''_{2\vartheta q^{2\sigma}}\begin{Bmatrix}(II, c)\\ (III, c)\end{Bmatrix} - \begin{cases} 1\, G''_{\vartheta q^{2\sigma}}\begin{Bmatrix}(II, a)\\ (III, a)\end{Bmatrix}\\ \vartheta_{q^{\sigma}}\, G_{2q^{\sigma}}\end{cases}$

(ϑ wie c, 1).

Sie bilden 1 *oder* 2 *Gattungen, je nachdem* $\frac{q\mp 1}{2\vartheta}$ *ungerade oder gerade ist.*

$$\left\{G''_{\vartheta q^{2\sigma}}\begin{Bmatrix}(II,a)\\(III,a)\end{Bmatrix},\ \Theta(c,2)\right\}$$

---

d. 1) $(q+1)\,q^{2n-\sigma-\sigma'-1}$ gl. $G''_{\vartheta q^{\sigma+\sigma'}}(II,I)-\begin{cases}1\,(\sigma,\sigma')\,(II,I)\\ q^{\sigma+\sigma'}\,G_\vartheta\end{cases}$

$\left(\vartheta\right.$ ein Theiler >1 von $\left.\frac{q-1}{2}\right)$

$\{\varphi(0,\xi,z\,q^\eta)_{\varepsilon'},\ T(a,1\}$.

2) *Wenn* $q\equiv 1$ *mod.* 4 *ist*

4 Gatt. v. $\frac{q^2-1}{4}\,q^{2n-2\sigma-\sigma'+\zeta-2}\,G''_{2q^{\sigma+\sigma'}}(II,I',\zeta)-\begin{cases}1(\sigma,\sigma')(II,I',\zeta)\\ q^{\sigma+\sigma'}\,G_2\end{cases}$

$\{[\varphi(0,\xi x_0 q^{\sigma'-\zeta}+z q^\eta,\xi)_{\varepsilon'}],\ \Theta_1(a,3)\}$; Ch.: $x_0^{\frac{q-1}{4}}$

3) $\frac{q^2-1}{4}\,q^{2n-2}\ G''_{2q^{\sigma+\sigma'}}\begin{Bmatrix}(II,\ II,\ a)\\(III,III,a)\end{Bmatrix}-\begin{cases}1\,(\sigma,\sigma')\begin{Bmatrix}(II,\ II\ )\\(III,III)\end{Bmatrix}\\ q^{\sigma'}\,G_{2q^\sigma}\end{cases}$

$\{[\varphi(0,v_1\xi+v z q^\eta,\ w_1\xi+w z q^\eta)_{\varepsilon'}],\ \Theta_2=f\left(0,\frac{\sqrt{\Pi}}{w_1},\frac{-\sqrt{\Pi}}{v_1},0\right)$

$\Pi=v_1w_1=\begin{cases}\text{quadratischer Rest von } q^{*)}\\ \text{quadratischer Nichtrest von } q.\end{cases}$

Diese Gruppen bilden 1 *oder* 2 *Gattungen, je nachdem* $\frac{q\mp 1}{2}$ *ungerade oder gerade ist.*

4) *Die folgenden, unter* 4, 5, 6 *angeführten Gruppen existiren nur, wenn* $\frac{q\mp 1}{2}$ *gerade ist.*

2 Gatt. v. $\frac{q^2-1}{8}\,q^{2n-2}\,G''_{2q^{\sigma+\sigma'}}\begin{Bmatrix}(II,\ II,\ b)\\(III,III,b)\end{Bmatrix}-\begin{cases}1\,(\sigma,\sigma')\begin{Bmatrix}(II,\ II\ )\\(III,III)\end{Bmatrix}\\ q^{\sigma}\,G_{2q^{\sigma'}}\end{cases}$

$\left\{(\sigma,\sigma')\text{ wie }(3),\ \Theta_3=f\left(0,\frac{\sqrt{-\Pi}}{w_1},\frac{\sqrt{-\Pi}}{v_1},0\right)\right\}$

---

*) Die erstgenannte Eigenschaft von Π gehört zu den oberen Vorzeichen, die zweitgenannte zu den unteren.

5) 2 Gatt. v. $\frac{q^2-1}{8} q^{2n-2\sigma-2} G''_{2q^{\sigma+\sigma'}} \begin{Bmatrix} (II, & II, & c) \\ (III, & III, & c) \end{Bmatrix}$

$$- \begin{cases} 1\ (\sigma, \sigma') \begin{Bmatrix} (II, & II) \\ (III, & III) \end{Bmatrix} \\ q^{\sigma+\sigma'}\, G_2 \end{cases}$$

$\{(\sigma, \sigma')$ wie (3), $\Theta_1(a, 3)\}$

6) 2 Gatt. v. $\frac{q^2-1}{8} q^{3n-\sigma-\sigma'-2} G''_{4q^{\sigma+\sigma'}} \begin{Bmatrix} (II, & II, & d) \\ (III, & III, & d) \end{Bmatrix}$

$$- \begin{cases} 1\ (\sigma, \sigma') \begin{Bmatrix} (II, & II) \\ (III, & III) \end{Bmatrix} \\ q^{\sigma+\sigma'}\, G_2\, (\Theta_1) \\ q^{\sigma'}\, G_{2q^{\sigma}}\, (\Theta_2) \\ q^{\sigma}\, G_{2q^{\sigma'}}\, (\Theta_3) \end{cases}$$

$\{(\sigma, \sigma')$ wie (3), $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3\}$.

---

e. 1) *Wenn* $\frac{q \mp 1}{2}$ *ungerade ist*

$$\frac{q^2-1}{4} q^{2n-2} \text{ gl. } G''_{2q^{\sigma+\sigma'}} \begin{Bmatrix} (II, & III, & a) \\ (III, & II, & a) \end{Bmatrix} - \begin{cases} 1\ (\sigma, \sigma') \begin{Bmatrix} (II, & III) \\ (III, & II) \end{Bmatrix} \\ q^{\sigma}\, G_{2q^{\sigma'}} \end{cases}$$

$$\left\{[\varphi(0, v_1 \xi + v z q^{\eta}, w_1 \xi + w z q^{\eta})_{\tau'}],\ \Theta_3 = f\left(0, \frac{\sqrt{-\Pi}}{w_1}, \frac{\sqrt{-\Pi}}{v_1}, 0\right)\right\}.$$

$$v_1 w_1 = \Pi = \begin{cases} \text{quadratischer Nichtrest} \\ \text{quadratischer Rest.} \end{cases}$$

2) *Wenn* $\frac{q \mp 1}{2}$ *gerade ist*

$$\frac{q^2-1}{4} q^{2n-2\sigma-2} \text{ gl. } G''_{2q^{\sigma+\sigma'}} \begin{Bmatrix} (II, & III, & b) \\ (III, & II, & b) \end{Bmatrix} - \begin{cases} 1\, (\sigma, \sigma') \begin{Bmatrix} (II, & III) \\ (III, & II) \end{Bmatrix} \\ q^{\sigma+\sigma'}\, G_2 \end{cases}$$

$\{(\sigma, \sigma')$ wie $(e, 1)$, $\Theta_1(a, 3)\}$.

In allen diesen Angaben gehören die oberen Bezeichnungen zusammen und ebenso die unteren. Für die oberen Zeichen sind die beigesetzten Beispiele in der reellen Gestalt gegeben, für die unteren in der imaginären. Betreffs der Gruppen (σ, σ') schliessen sich die Angaben genau an die Tabellen von § 9 an.

§ 11.

Besondere Gruppen für $q = 3$.

Es sind noch diejenigen Gruppen des Falles $q = 3$ zu untersuchen, welche in § 6, III von der Betrachtung ausgeschlossen wurden. Diese Gruppen enthalten Cyklen Γ_3 oder Γ_{3^ε} (Tabelle A) und bilden mod. 3 cyklische Gruppen der Ordnung 3. Sie haben ferner mit der Gruppe E bez. Gruppen (σ), (σ, σ) oder (σ, σ') gemeinsam. Da letztere Gruppen wieder in ausgezeichneter Weise in den gesuchten Gruppen enthalten sind, so muss eine zugehörige Γ_3 oder Γ_{3^ε} unter allen Umständen eine cyklische Gruppe $\sigma = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\pi$ in sich transformiren (§ 7). Wie muss eine solche beschaffen sein?

Soll $S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $\alpha + \delta = -1 + t_0 . 3^{n-\varepsilon+1}$, wo ε die Werthe $1, 2, 3, \ldots, n-1$ annehmen kann, den Cyklus $\sigma = \varphi(\mu, \nu, \varrho)_\pi$ in sich transformiren, so muss

$$(1) \qquad S\sigma S^{-1} = \sigma^{\nu_\xi} = \varphi(\mu\xi, \nu\xi, \varrho\xi)_\pi$$

sein. Dies giebt in Rücksicht auf die Gleichungen § 5, II, 1 für ξ die Congruenz

$$(2) \qquad (\xi - 1)[\xi^2 - 2\xi(2\Delta + 1) + 1] \equiv 0 \text{ mod. } 3^\sigma,$$

wo

$$\Delta = \left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4} + t_0' . 3^{n-\varepsilon+1}$$

ist. Nun kann, wie man sich leicht überzeugt, der Factor

$$\xi^2 - 2\xi(2\Delta + 1) + 1$$

durch keine höhere Potenz von 3 als die erste theilbar sein, daher bekommt man wenn $\varepsilon = 1$ d. h. $(S) = \Gamma_3$ ist, den Werth $\xi = 1$ und für $\varepsilon > 1$, $(S) = \Gamma_{3^\varepsilon}$, die Werthe $\xi = 1$, $1 + 2^{\sigma-1}$, $1 - 2^{\sigma-1}$.

Setzt man diese Werthe von ξ in die durch (1) bedingten Congruenzen ein und nimmt, was wegen der Gleichberechtigung der Γ_3 erlaubt ist, $\alpha - \delta \gtrless 0$ mod. q, so kommt:

1) für $\xi = 1$, $\mu : \nu : \varrho \equiv \frac{\alpha - \delta}{2} : \beta : \gamma$ mod. q^σ

2) für $\xi = 1 \pm 2^{\sigma-1}$ $\left\{\begin{array}{l} \mu : \nu \equiv \left(\frac{\alpha - \delta}{2} \pm \delta . 3^{\sigma-1}\right) : \beta(1 \mp 3^{\sigma-1}), \\ \mu : \varrho \equiv \left(\frac{\alpha - \delta}{2} \mp \alpha . 3^{\sigma-1}\right) : \gamma(1 \mp 3^{\sigma-1}). \end{array}\right.$

Ist also $\sigma = 1$, so wird $\Pi = \mu^2 + \nu\varrho \equiv 0$ mod. 3, für $\sigma > 1$ aber kommt jedesmal $\Pi \equiv -3$ mod. 9. Man hat also nur Gruppen

1) $\sigma(I) = 1(I)$, $(\sigma, \sigma)(I) = (1, 1)(I)$,

2) $\sigma(I', \sigma - 1)$, $(\sigma, \sigma)(I', \sigma - 1)$, $\left(\frac{s_0}{3}\right) = -1$, $\sigma > 1$

und solche Gruppen (σ, σ') zu betrachten, welche die bezeichneten (σ, σ) enthalten.

Nach der alten Methode erhält man die nachstehenden Angaben:

I. Die Fälle $\sigma = 1$.

1) Zu den 5 Gruppengattungen $(\sigma = 1, \sigma' = 1, 2)$

$$1(I) = \varphi(0, 1, 0)_{n-1}; \quad (1, 1)(I) = [\varphi(v, w, 0)_{n-1}]$$

$$(1, 2)(I, I) = [\varphi(3v, w, 0)_{n-2}];$$

$$(1, 2)(I, I', 1) = [\varphi(3v, w, 3r_0\, w)_{n-2}], \left(\frac{r_0}{3}\right) = \pm 1$$

gehört die gleiche Gruppe W*) $= (E, R = \omega + 1)$ von der Ordnung 3^{3n-2}. Dieses W enthält

α) 1 Gattung von 3^{2n-2} rel. gl. Γ_3.

Beisp.: $S_0 = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

(β) 2 Gattungen von 3^{2n-3} rel. gl. $\Gamma_{3^\varepsilon} (\varepsilon = 2, 3, \ldots, n-1)$

$$\text{Beisp.: } S_0^{(\varepsilon)} = f\Big(-\frac{1}{2} + \frac{t_0}{2} \cdot 3^{n-\varepsilon+1}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} - t_0'.3^{n-\varepsilon+1}, -\frac{1}{2} + \frac{t_0}{2} \cdot 3^{n-\varepsilon+1}\Big); \quad \text{Ch.: } \left(\frac{t_0}{3}\right).$$

2) Der Gruppe $(1, \sigma')$**) $(I, I', \sigma' - 1) = [\varphi(v.3^{\sigma'-1}, w, -3w)_{\sigma'}]$, $\sigma' > 2$ entspricht

$$W = \left(E_{\sigma'-1}, R = \varphi(0, 1, -3)_1, S_0 = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right),$$

welche Gruppe die Ordnung $3^{3n-2\sigma'+2}$ hat. Die Substitution

$$S = f(A, B, C, D)$$

gehört der Gruppe W an, wenn $A - D \equiv 0 \text{ mod. } 3^{\sigma'-1}$ und

$$3B + C = y \cdot 3^{\sigma'-1} \text{ mod. } 3^{\sigma'}$$

ist und man überzeugt sich leicht, *dass die Grösse* $3B + C$ *mod.* $3^{\sigma'}$ *bei den Transformationen von* S *in Bezug auf die Substitutionen von* W *erhalten bleibt. Man erhält daher* 3 *Arten von Cyklen* Γ_3 *und* Γ_{3^ε}, *welche durch* $y = 0, 1, -1$ *unterschieden sind.* Genauer erhält man

$$\left.\begin{array}{l}\alpha)\ 3^{2n-2\sigma'+2} \text{ rel. gleichb. } \Gamma_3 \\ \beta)\ 2 \text{ Gatt. v. } 3^{2n-2\sigma'+1}\,\Gamma_{3^\varepsilon}(\varepsilon = 2, 3, \ldots, n-1)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{von jeder der 3 Arten} \\ y = 0, 1, -1.\end{array}$$

$$\text{Beisp.: } \Gamma_3 = S_y = f\left(-\frac{1}{2}, \nu, -3\nu + y.3^{\sigma'-1}, -\frac{1}{2}\right) \text{für } y = 0, 1, -1;$$

$$\nu^2 - \nu y.3^{\sigma'-2} \equiv \frac{1}{4} \text{ mod. } 3^{n-1}, \ \nu \equiv \frac{1}{2} \text{ mod. } 3.$$

*) Diese Gruppen sind wieder sehr leicht aufzustellen, da man die Ordnungen derselben aus den Tabellen von § 9 von vorneherein kennt (vgl. § 4, IV).

**) Von der Art $\left(\frac{r_0}{3}\right) = -1$ des § 9.

$$\Gamma_{3^\varepsilon} = S_y^{(\varepsilon)} = f\Big(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{t_0}{2} \cdot 3^{n-\varepsilon+1},\ v,\ -3v + y \cdot 3^{\sigma'-1},$$
$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{t_0}{2} \cdot 3^{n-\varepsilon+1}\Big),\ y = 0, 1, -1;$$
$$v^2 - vy \,.\, 3^{\sigma'-2} \equiv \tfrac{1}{4} + \tfrac{t_0}{2} 3^{n-\varepsilon} - \tfrac{t_0^2}{4} 3^{2n-2\varepsilon+1} \text{ mod. } 3^{n-1};$$
$$v \equiv \tfrac{1}{2} \text{ mod. } 3.$$

Charakter für jede der Arten $y = 0, 1, -1$: $\left(\frac{t_0}{3}\right)$, d. h. $t_0 \equiv 1$ mod. 3 entspricht der einen Gattung, $t_0 \equiv -1$ der anderen.

II. Die Fälle $\sigma > 1$.

3) Liegt eine $\sigma(I', \sigma-1) = \varphi(0, 1, -3)_\tau$ oder eine $(\sigma, \sigma)(I', \sigma-1) = \varphi(v, w, 3w)_\tau$ $\Big\}$ der Gattung $(m_0 = -1)$ $\left.\begin{matrix}\Pi \\ S\end{matrix}\right\} \equiv -3$ mod. 9

vor, so hat man eine Gruppe W der Ordnung $3^{3n-2\sigma+1}$, nämlich

$$W = \Big(E_\sigma,\ T = \varphi(1,0,0)_{\sigma-1},\ R = \varphi(0,1,-3)_1,\ S_0 = f\big(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\big)\Big).$$

Aehnlich wie oben enthält W 3 *Arten von Substitutionen* $S = f(A, B, C, D)$, *welche durch* $\frac{A-D}{2} = x \cdot 3^{\sigma-1}$ *mod.* 3^σ, $x = 0, 1, -1$ *unterschieden sind*. Für jede dieser Arten hat man 1 Gattung von $3^{2n-2\sigma-1}\,\Gamma_3$ und 2 Gattungen von $3^{2n-2\sigma}\,\Gamma_{3^\varepsilon}(\varepsilon = 2, 3, \ldots, n-1)$. Für die Substitutionen der Art x ist

$$S\sigma S^{-1} = \sigma^{1-x.3^{\sigma-1}}.$$

Beisp.: $\Gamma_3 = S_x = f\big(-\tfrac{1}{2} + x \cdot 3^{\sigma-1},\ \tfrac{1}{2},\ -\tfrac{3}{2} - 2x^2 \cdot 3^{2\sigma-2},\ -\tfrac{1}{2} - x \cdot 3^{\sigma-1}\big)$

$$x = 0, 1, -1,$$

$$\Gamma_{3^\varepsilon} = S_x^{(\varepsilon)} = f\Big(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{t_0}{2} 3^{n-\varepsilon+1} + x \cdot 3^{\sigma-1},\ v,\ -3v,\ -\tfrac{1}{2}$$
$$+ \tfrac{t_0}{2} 3^{n-\varepsilon+1} - x \cdot 3^{\sigma-1}\Big),$$

$x = 0, 1, -1$; $v \equiv \frac{1}{2}$ mod. 3; die Gattungen jeder Art $(x = 0, 1, -1)$ sind durch $t_0 \equiv 1$, $t_0 \equiv -1$ (mod. 3) unterschieden.

4) Von den Gruppen (σ, σ'), $\sigma > 1$ kommt nur $\sigma' = \sigma + 1$ in Betracht. Denn mod. $3^{n-\sigma} = 3^\tau$ wird (σ, σ') eine cyklische Gruppe (η) der Ordnung 3^η und diese muss offenbar durch Γ_3 bez. Γ_{3^ε} in sich transformirt werden. Dann muss aber nach den obigen Entwicklungen entweder $(\eta) = 1(I)$, also $\sigma' = \sigma + 1$ sein, oder $(\eta) = \eta(I', \eta - 1)$, $s_0 \equiv -1$ mod. 3. Aber zu einer (σ, σ) der hier betrachteten Art (3) gehören keine Cyklen der letzten Art.

Ist

$$(\sigma, \sigma') = (\sigma, \sigma + 1) = \varphi(3v, w, 3w)_{\tau-1},$$

so wird

$$W = \left(E_e,\ R = \varphi(0, 1, -3)_1,\ S_0 = f\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)\right),$$

welche Gruppe mit der in Nr. 2 betrachteten identisch ist. Nach diesen Angaben leitet man leicht die Resultate ab, welche in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt sind. Beispiele für die aufgestellten Gruppen kann man den eben gemachten Angaben mit Hilfe der jedesmal bezeichneten Cyklen, aus denen diese Gruppen zusammgesetzt sind, leicht entnehmen.

H. Tabelle von besonderen Gruppen für $q = 3$.

I. Die Fälle $\sigma = 1$.

1) $4 \cdot 3^{2n-3}$ gl. $\Gamma_9'(I) - \begin{cases} 1\ \sigma(I) = 1(I) \\ 3\ \Gamma_3 \end{cases}$

2) a) $4 \cdot 3^{2n-4}$ gl. $\Gamma_{27}''(I, a) - \begin{cases} 1\ (\sigma, \sigma)(I) = (1,1)(I) \\ 9\ \Gamma_3 \end{cases}$

b) 2 Gatt. v. $4 \cdot 3^{2n-4}\Gamma_{27}''(I, b) - \begin{cases} 1\ (1,1)(I) \\ 3\Gamma_{3^2} \text{ derselben Gattung } t_0. \end{cases}$

$(n > 2)$

3) $4 \cdot 3^{2n-4}$ gl. $\Gamma_{81}''(I, I) - \begin{cases} 1\ (1,2)(I, I) \\ 2 \cdot 3\Gamma_{3^2} \text{ (2 Gattungen } t_0 = 1, t_0 = -1) \\ 9\Gamma_3 \end{cases}$

$(n > 2)$

4) a) $4 \cdot 3^{2n-5}$ gl. $\Gamma_{81}''(I, I', 1, a) - \begin{cases} 1\ (1,2)(I, I', 1),\ r_0 = 1 \\ 27\Gamma_3 \end{cases}$

$n > 2$

b) 2 Gatt. v. $4 \cdot 3^{2n-5}\Gamma_{81}''(I, I', 1, b) - \begin{cases} 1\ (1,2)(I, I', 1), r_0 = 1 \\ 9\Gamma_{3^2} \text{ derselben Gattung } t_0 \end{cases}$

$n > 2$

c) $4 \cdot 3^{2n-4}$ gl. $\Gamma_{81}''(I, I', 1, c) - \begin{cases} 1(1,2)(I, I', 1),\ r_0 = -1 \\ 9\Gamma_3 \\ 2 \cdot 3\Gamma_{3^2}(t_0 = 1 \text{ und } t_0 = -1) \end{cases}$

$n > 2$

d) 2 Gatt. v. $4 \cdot 3^{2n-4}\Gamma_{81}''(I, I', 1, d) - \begin{cases} 1(1,2)(I, I', 1),\ r_0 = -1 \\ 3\Gamma_{3^2} \text{ derselben Art } t_0 \end{cases}$

$(n > 3)$

5) a) $3\,\text{G.v.}\,4 . 3^{2n-4}\Gamma_{3^{\sigma'+2}}''(I, I', \sigma' - 1, a) - \begin{cases} 1(1, \sigma')(I, I', \sigma' - 1), r_0 = -1 \\ 9\Gamma_3 \text{ der Art } y \\ 2 . 3\Gamma_{3^\varepsilon}(\varepsilon = 2, 3, \ldots, \sigma') \\ \text{derselben Art } y \end{cases}$

$(n > \sigma' > 2)$

Die 3 Gattungen werden durch $y = 0, 1, -1$ unterschieden.

$$\text{b)}\ 2\,\text{Gatt. v. } 4 \cdot 3^{2n-4}\,\Gamma''_{3^{\sigma'+2}}(I, I', \sigma'-1, b) - \begin{cases} 1\,(1, \sigma') \text{ wie bei } (5, a) \\ 3\,\Gamma_{3^{\sigma'+1}} \text{ der Art } y = 0 \\ \text{und derselben Gatt. } t_0. \end{cases}$$

$n > \sigma' + 1 > 3.$

II. Die Fälle $\sigma > 1$.

$$1)\ 3\,\text{Gatt. v. } 4 \cdot 3^{2n-3}\,\Gamma'_{3^{\sigma+1}}(I', \sigma-1) - \begin{cases} 1\,\sigma(I', \sigma-1),\ \left(\frac{s_0}{3}\right) = -1 \\ 3\,\Gamma_3 \text{ der Art } x \\ 2\,\Gamma_{3^\varepsilon}\,(\varepsilon = 2, 3, \ldots, \sigma) \\ \text{der Art } x, \text{ verschiedener Gatt. } t_0. \end{cases}$$

Für die erste Gattung ist $x = 0$, für die zweite 1, für die dritte -1.

---

2) *Für* $2\sigma \leqq n$.

$$\text{a)}\ 4 \cdot 3^{2n-2\sigma-2} \text{ gl. } \Gamma''_{3^{2\sigma+1}}\,(I', \sigma-1, a) - \begin{cases} 1(\sigma, \sigma)\,(I', \sigma-1), \\ m_0 \equiv -1 \bmod. 3 \\ 3^{2\sigma}\,\Gamma_3 \text{ der Art } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{b)}\ 2\,\text{Gatt. v. } 4 \cdot 3^{2n-2\sigma-2}\,\Gamma''_{3^{2\sigma+1}}(I', \sigma-1, b) - \begin{cases} 1(\sigma, \sigma) \text{ (wie bei } a) \\ 3^{2\sigma-1}\,\Gamma_{3^2}(x = 0,\ t_0) \end{cases}$$

$$\text{c)}\ 2\,\text{Gatt. v. } 4 \cdot 3^{2n-2\sigma-1}\,\Gamma''_{3^{2\sigma+1}}(I', \sigma-1, c) - \begin{cases} 1(\sigma, \sigma) \text{ wie bei } a \\ 3^{2\sigma-1}\,\Gamma_3(x = +1 \\ \qquad \text{oder } -1) \\ 2 \text{ Gatt. v. } 3^{2\sigma-2}\,\Gamma_{3^2} \\ \qquad \text{derselben Art } x. \end{cases}$$

(Für die eine Gattung ist $x = 1$, für die andere -1).

---

3) Für n ungerade und $\sigma = \frac{n+1}{2}$.

$$\text{a)}\ 4 \cdot 3^{n-2} \text{ gl. } \Gamma''_{3^{n+2}}(a) - \begin{cases} 1\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)\left(I', \frac{n-1}{2}\right),\ \left(\frac{s_0}{3}\right) = -1 \\ 3^n\,\Gamma_3 \text{ der Art } x = 0 \\ 3^{n-1}\,\Gamma_{3^2}(x = 1,\ t_0 = 1) \\ 3^{n-1}\,\Gamma_{3^2}(x = -1,\ t_0 = 1) \end{cases}$$

$$\text{b)}\ 4 \cdot 3^{n-2} \text{ gl. } \Gamma''_{3^{n+2}}\,(b) - \begin{cases} 1\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \text{ (wie bei } a) \\ 3^{n-1}\,\Gamma_{3^2}(x = 0,\ t_0 = 1) \\ 3^{n-1}\,\Gamma_{3^2}(x = 1,\ t_0 = -1) \\ 3^{n-1}\,\Gamma_{3^2}(x = -1,\ t_0 = -1) \end{cases}$$

$$\text{c) } 4\cdot 3^{n-2} \text{ gl. } \Gamma''_{3^n+2}(c) - \begin{cases} 1\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{n+1}{2}\right) \text{ wie bei } a \\ 3^{n-1}\Gamma_{3^2}(x=0,\ t_0=-1) \\ 3^n\,\Gamma_3\,(x=1) \\ 3^n\,\Gamma_3\,(x=-1) \end{cases}$$

---

4) Für $2\sigma < n$.

$$\text{a) } 4\cdot 3^{2n-2\sigma-3} \text{ gl. } \Gamma''_{3^{2\sigma+2}}(\Gamma', \sigma-1, a) - \begin{cases} 1\,(\sigma, \sigma+1)\,(\Gamma', \sigma-1) \\ \quad \text{s. Angabe 4} \\ 3^{2\sigma+1}\,\Gamma_3\,(y=0) \end{cases}$$

$$\text{b) } 2 \text{ Gatt. v. } 4\cdot 3^{2n-2\sigma-3}\,\Gamma''_{3^{2\sigma+2}}(\Gamma', \sigma-1, b) - \begin{cases} 1\,(\sigma, \sigma+1) \text{ wie bei } a \\ 3^{2\sigma}\,\Gamma_{3^2}(y=0,\ t_0) \end{cases}$$

Die beiden Gattungen sind durch $t_0 = +1,\ -1$ unterschieden.

$$\text{c) } 2 \text{ Gatt. v. } 4\cdot 3^{2n-2\sigma-2}\,\Gamma''_{3^{2\sigma+2}}(\Gamma', \sigma-1, c) - \begin{cases} 1\,(\sigma, \sigma+1) \text{ wie bei } a \\ 3^{2\sigma}\,\Gamma_3\,(y=\pm 1) \\ 3^{2\sigma-1}\,\Gamma_{3^2}(y=\pm 1, \\ \qquad t_0=1) \\ 3^{2\sigma-1}\,\Gamma_{3^2}(y=\pm 1, \\ \qquad t_0=-1) \end{cases}$$

Unterscheidung $y = +1,\ y = -1$.

---

5) Für n gerade, $\sigma = \frac{n}{2}$.

$$\text{a) } 4\cdot 3^{n-2} \text{ gl. } \Gamma''_{3^n+2}(a) - \begin{cases} 1\left(\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}+1\right) \text{ etc. Angabe.} \\ 3^n\,\Gamma_3\,(y=0) \\ 3^{n-1}\,\Gamma_{3^2}\,(y=1,\ t_0=1) \\ 3^{n-1}\,\Gamma_{3^2}\,(y=-1,\ t_0=1) \end{cases}$$

$$\text{b) } 4\cdot 3^{n-2} \text{ gl. } \Gamma''_{3^n+2}(b) - \begin{cases} 1\left(\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}+1\right) \text{ etc.} \\ 3^{n-1}\,\Gamma_{3^2}\,(y=0,\ t_0=1) \\ 3^{n-1}\,\Gamma_{3^2}\,(y=1,\ t_0=-1) \\ 3^{n-1}\,\Gamma_{3^2}\,(y=-1,\ t_0=-1) \end{cases}$$

$$\text{c) } 4\cdot 3^{n-2} \text{ gl. } \Gamma''_{3^n+2}(c) - \begin{cases} 1\left(\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}+1\right) \text{ etc.} \\ 3^{n-1}\,\Gamma_{3^2}\,(y=0,\ t_0=-1) \\ 3^n\,\Gamma_3\,(y=1) \\ 3^n\,\Gamma_3\,(y=-1) \end{cases}$$

---

§ 12.

Die homogenen linearen Substitutionen.

Es sei eine kurze Bemerkung hier angefügt, welche die Uebertragung der für die gebrochenen linearen Substitutionen gewonnenen Resultate auf die homogenen Substitutionen zum Zwecke hat. Hiebei sei die Substitution

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_2' &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \end{aligned} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

bezeichnet durch

$$\sum = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Jeder gebrochenen linearen Substitution $S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ mod. q^n entsprechen (unter q wieder eine Primzahl > 2 verstanden) die 2 homogenen Substitutionen

$$\sum\nolimits_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ und } \sum\nolimits_2 = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix} \text{ mod. } q^n;$$

insbesondere sind der identischen Substitution $f(1, 0, 0, 1)$ die beiden Substitutionen zugeordnet

$$(1) \qquad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{(Identität)} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist

$$\sum = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \sum' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$

so kommt

$$(2) \qquad \sum\sum' = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix},$$

$$\sum\nolimits^2 = \begin{pmatrix} -1 + \alpha(\alpha+\delta) & \beta(\alpha+\delta) \\ \gamma(\alpha+\delta) & -1 + \delta(\alpha+\delta) \end{pmatrix}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass die Bedingung $\sum^2 \equiv 1$ mod. q^n nur erfüllt ist, wenn $\beta \equiv \gamma \equiv 0$, $\alpha \equiv \delta \equiv \pm 1$ mod. q^n ist. *Folglich ist ε die einzige Substitution der Gruppe G' der homogenen linearen Substitutionen mod. q^n, welche die Periode 2 hat. Die Gruppe (ε) der Ordnung 2 ist also ausgezeichnete Untergruppe von G'.*

Hieraus folgt sogleich noch, dass jeder Substitution $S = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ von G, welche eine *gerade* Periode π hat, eine Substitution Σ von G' entspricht mit der Periode 2π. Umgekehrt entspricht einer Σ mit gerader Periode π eine S der Periode $\frac{\pi}{2}$. Ist ferner die Ordnung irgend einer Gruppe von G eine *gerade* Zahl g, so hat die entsprechende Gruppe von G' die Ordnung $2g$, während umgekehrt eine Gruppe von

G' mit gerader Ordnung g eine Gruppe der Ordnung $\frac{g}{2}$ von G liefert. Insbesondere folgt hieraus, *dass G' keine Untergruppe enthält, welche zu G holoedrisch isomorph ist. Ebenso enthält sie keine zur Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaeder- oder zu einer Doppelpyramidengruppe holoedrisch isomorphe Gruppe.*

Anders ist die Sache, wenn Gruppen von G vorliegen, welche *ungerade* Ordnung g haben. *Einer solchen Gruppe entspricht sowohl eine Gruppe von G' der Ordnung g als auch eine solche der Ordnung $2g$.* Hat man z. B. eine Gruppe (σ, σ') von G (welche in E oder F enthalten ist), so ist $\gamma \equiv \gamma' \equiv 0 \bmod. q$ und man kann

$$\alpha \equiv \alpha' \equiv \delta \equiv \delta' \equiv 1 \bmod. q$$

wählen. Die so entstehenden Substitutionen Σ und Σ' geben aber irgend wie combinirt nach Gleichung 2 wieder Substitutionen Σ'', für welche $\alpha'' \equiv \delta'' \equiv 1 \bmod. q$ ist. Also kann (Σ, Σ') die Substitution ε nicht enthalten und hat mithin dieselbe Ordnung $q^{\sigma+\sigma'}$ wie (σ, σ') selbst. Dagegen liefert $(\Sigma, \Sigma', \varepsilon)$ eine Gruppe der Ordnung $2q^{\sigma+\sigma'}$.

Bamberg, den 11. April 1885.

Ueber Theilung und Transformation der elliptischen Functionen.

Von

L. Kiepert in Hannover.

Mit den Untersuchungen über Theilung und Transformation der elliptischen Functionen ist ein fruchtbares Feld erschlossen, auf welchem ohne Zweifel noch eine reiche Ernte zu erwarten ist, zumal wenn es gelingt, die Modulargleichungen durch wesentlich einfachere zu ersetzen und den Zusammenhang dieser Gleichungen mit der Theorie der elliptischen Functionen noch weiter zu erforschen.

Zu diesem Zweck führte ich in meinen früheren Arbeiten über die Transformation der elliptischen Functionen*) eine Hülfsgrösse f ein, welche die Eigenschaft besitzt, dass sich alle übrigen bei der Transformation auftretenden Grössen durch sie und die Invarianten g_2, g_3 rational ausdrücken lassen. Zwischen f, g_2 und g_3 besteht immer eine algebraische Gleichung, welche die „*f-Gleichung*" genannt werden soll. Ist der Transformationsgrad n gleich $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ eine Zahl von der Form $6l \pm 1$, so wird f^2 die Wurzel einer Gleichung vom Grade

$$T(n) = n\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\cdots$$

Hat aber n die Form $6l \pm 2$, oder $6l+3$, oder $6l$, so wird erst eine höhere Potenz von f die Wurzel der f-Gleichung, während der Grad wieder $T(n)$ ist, so dass (wenn man von den Fällen $n = 2, 3, 4, 9, 25$ absieht) die Grösse f nicht mehr die geeignetste Hülfsgrösse ist.

---

*) Vergl. Journal für Mathematik, Bd. 87, S. 199—216, Bd. 88, S. 205—212 und Bd. 95, S. 218—231. Diese drei Abhandlungen sollen in dem Folgenden der Kürze wegen durch Abh. 1, Abh. 2, Abh. 3 citirt werden. — Vergl. ferner die neuerdings in den Göttinger Nachrichten veröffentlichte Note (Sitzung vom 6. Juni 1885): „*Ueber eine Resolvente derjenigen algebraischen Gleichung, von welcher in der Theorie der elliptischen Functionen die Theilung der Perioden abhängt.*"

Dieser Umstand hielt mich mehrere Jahre hindurch davon zurück, weitere Untersuchungen auf diesem Gebiete zu veröffentlichen, bis es mir durch das Studium einer Arbeit: „*Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad*“ von J. Gierster (Math. Annalen, Bd. 14, S. 537—544) gelang, die angedeutete Schwierigkeit zu überwinden.

Herr F. Klein hatte nämlich in seiner Abhandlung: „*Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades*“ (Math. Annalen, Bd. 14, S. 111—172) statt der Modulargleichungen diejenigen Gleichungen untersucht, welche zwischen der absoluten Invariante

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = \frac{g_2^3}{\Delta}$$

und der entsprechenden Grösse J' der transformirten Function bestehen. Dabei machte er die allerdings sehr wesentliche, dafür aber auch sehr nützliche Einschränkung, dass das Geschlecht dieser J-*Gleichung* gleich Null sei, was nur bei den Primzahlen

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 13$$

und bei den zusammengesetzten Zahlen

$$4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 16,\ 18,\ 25$$

der Fall ist. Man braucht nun bei dieser Einschränkung die J-Gleichung nicht selbst zu bilden, sondern J und J' werden *rationale* Functionen $T(n)^{\text{ten}}$ Grades einer Hülfsgrösse τ, welche sich durch functionentheoretische Betrachtungen leicht bilden lassen. Natürlich kann man diese Hülfsgrösse τ noch durch eine lineare Function von τ, nämlich durch $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ ersetzen, dies ist aber die einzige Willkür, welcher τ unterworfen ist. Vertauscht man in der τ-*Gleichung*, d. h. in der Gleichung zwischen J und τ, die Grössen J und τ mit J' und τ', so ist τ' eine lineare Function von τ, so dass damit auch schon J' als rationale Function von τ dargestellt ist.

Herr Klein bildete nun die τ-Gleichung für diejenigen Werthe von n, welche *Primzahlen* sind (ausserdem für $n = 4$) und fand, dass in allen diesen Fällen durch passende Verfügung über die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\tau^{n-1} = \Delta^{n-1} f^{24}$$

gemacht werden kann, ein Umstand, welcher für die Verwendung meiner Hülfsgrösse f sehr günstig erschien*).

---

*) In der That hat Herr Klein von hier ausgehend seinerseits eine allgemeine Theorie der f-Gleichungen (die er Multiplicatorgleichungen erster Stufe nennt) in Untersuchung gezogen [vergl. die Mittheilung im 15. Bande der mathem. Annalen, Seite 86—88]. Ich nenne hier auch sogleich die Abhandlung im 18. Bande

Im Anschluss an die Klein'sche Arbeit behandelte Herr Gierster noch die oben genannten Fälle, in denen n eine *zusammengesetzte* Zahl ist, und stellte die τ-Gleichungen auf. Auch hier kann für $n = 4, 9, 25$ diese Grösse τ noch so bestimmt werden, dass

$$\tau^{n-1} = \Delta^{n-1} f^{24}$$

wird. Dagegen ist Herr Gierster im Irrthum (wahrscheinlich durch Induction verleitet), wenn er behauptet, dass diese Relation auch noch für die anderen Werthe von n gilt. Es ist vielmehr für

$$n = 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 16,\ 18$$

die Grösse τ^{n-1} nur ein Factor von $\Delta^{n-1} f^{24}$.

Diese Erkenntniss, welche sich mir allerdings erst bei wiederholter Durchsicht und Prüfung der Gierster'schen Notiz ergab, eröffnete mir eine vielversprechende Aussicht auf dem Gebiete der Transformation. Dabei ist die von Herrn Klein inaugurirte Berücksichtigung des Geschlechtes der J-Gleichung wesentlich, die Untersuchung aber nicht auf den Fall beschränkt, wo dieses Geschlecht gleich Null ist.

Die von mir eingeführte Hülfsgrösse f ist somit gewissermassen der vornehmste Repräsentant einer ganzen Gattung von Hülfsgrössen, die nicht nur für die Transformation, sondern auch für die Algebra von besonderer Wichtigkeit sind, und die zu einander in inniger Beziehung stehen. Desshalb ist es nothwendig, dass ich in dieser Abhandlung zunächst die *Theorie der f-Gleichung* in ihrem Zusammenhange mit der Theilung und mit der Transformation der elliptischen Functionen gebe. Der Inhalt meiner früheren Abhandlungen über Transformation, deren Kenntniss ich hier übrigens nicht unbedingt voraussetze, wird dadurch wesentlich ergänzt, erweitert und zu einem fertigen Ganzen abgeschlossen. Dabei sind die einzelnen Sätze hier bereits so gefasst, dass sie auch sogleich für die späteren Untersuchungen verwendbar sind.

Im Gegensatz zu meinen früheren Arbeiten gehe ich jetzt, einem gütigen Rathe von Herrn Kronecker folgend, von der Theilung der elliptischen Functionen aus, indem ich die Theilwerthe von $\wp$, d. h. diejenigen Werthe von $\wp u$ untersuche, bei denen u der n^{te} Theil einer Periode ist. Die von einander verschiedenen Theilwerthe sind Wurzeln

---

der mathematischen Annalen („Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe"), in welcher Herr Hurwitz, soweit es sich um die f-Gleichung handelt, die von Herrn Klein gegebenen Ideen weiter verfolgt und eine grosse Anzahl neuer Resultate hinzugefügt hat. Neuerdings ist auch Herr Weber auf die Theorie der f-Gleichung eingegangen (Acta Mathematica, Bd. VI, pag. 329 ff.: „Zur Theorie der elliptischen Functionen"), wobei er seinen Ausgangspunkt in der Theilungsgleichung für sin am u nimmt.

der *„speciellen Theilungsgleichung“*, deren Coefficienten *ganze rationale* Functionen der Invarianten g_2, g_3 sind. Ist n eine zusammengesetzte Zahl, so lassen sich alle Theilwerthe $\wp\left(\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right)$, bei denen die drei Zahlen λ, μ, n einen gemeinsamen Factor haben, absondern, wodurch eine Reduction der Theilungsgleichung eintritt.

Indem man die genannten Theilwerthe in Gruppen ordnet und cyklische Functionen $C_{\lambda,\mu}$ der Theilwerthe einer solchen Gruppe bildet, erhält man algebraische Gleichungen zwischen $C_{\lambda,\mu}$ und g_2, g_3, welche *Resolventen* der reducirten Theilungsgleichung heissen sollen. Unter ihnen nehmen diejenigen eine hervorragende Stelle ein, welche zur Transformation der elliptischen Functionen führen.

Die Aufgabe der Transformation n^{ten} Grades besteht nun hauptsächlich darin, $\bar{\wp} u = \wp\left(u \mid \frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)$ als rationale Function von

$$\wp(u \mid \varpi, \varpi') = \wp(u \mid \omega, \omega') = \wp u$$

darzustellen, wobei das Periodenpaar

$$2\varpi = 2p\omega + 2q\omega', \quad 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega', \quad (pq' - p'q = +1)$$

dem primitiven Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ äquivalent ist.

Die Form dieser rationalen Function ist leicht anzugeben, es handelt sich nur darum, die Coefficienten, welche sie enthält, als *algebraische* Functionen von g_2, g_3 möglichst einfach darzustellen. Diess kann geschehen durch Einführung der Hülfsgrösse f, welche durch die f-Gleichung von g_2, g_3 abhängt, und welche man durch die Gleichung

$$f^2 = (-1)^{n-1}\prod_{\alpha=1}^{n-1} \sigma_{\alpha p, \alpha q} = \prod_{\alpha=1}^{n-1}\left[e^{-2\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 \bar{\eta}\bar{\omega}}\,\sigma\left(\frac{2\alpha\bar{\omega}}{n}\right)\right]$$

definiren kann. Ausserdem giebt es aber noch eine ganze Reihe charakteristischer Darstellungen von f, von denen hier in der Einleitung nur zwei hervorgehoben werden mögen.

1) Ist

$$h = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}, \quad Q(\omega, \omega') = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - h^{2\nu}),$$

so wird

$$Q^{24}(\varpi, \varpi') = \Delta(\varpi, \varpi') = g_2^3 - 27 g_3^2 \quad \text{und} \quad f = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}{Q^n(\varpi, \varpi')}.$$

2) Ist n *ungerade*, so ist bei der Darstellung von $\bar{\wp} u$ als rationale Function von $\wp u = s$ der Nenner das Quadrat einer ganzen Function $P(s)$. Für die Gleichung

$$P(s) = 0$$

wird $\pm f^{-n+3}$ die *Discriminante.*

Um nun die oben erwähnten Coefficienten darzustellen, bildet man eine partielle Differentialgleichung, welcher die Function $f^3 P(s)$ genügt. (Ist n *gerade*, so tritt an die Stelle von $f^3 P(s)$ der Nenner in der Darstellung von $\bar{\wp} u$, multiplicirt mit f^6). Aus dieser Differentialgleichung findet man durch Entwickelung nach Potenzen von s die einzelnen Coefficienten von $P(s)$ unmittelbar als Functionen von f und den partiellen Ableitungen von f nach g_2 und g_3. Sobald also die f-Gleichung gebildet ist, kann man die Coefficienten von $P(s)$ als rationale Functionen von f, g_2 und g_3 darstellen.

Hat man den Nenner von $\bar{\wp} u$, so ergiebt sich daraus der Zähler sehr leicht, und ebenso ist auch die Darstellung von $\bar{\sigma} u = \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)$, wie sich zeigen wird, dadurch schon gegeben. Die Invarianten $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ der transformirten Function $\bar{\wp} u$ findet man gleichfalls aus dieser partiellen Differentialgleichung.

Es kommt daher Alles auf die f-Gleichung und deren Wurzeln an. Zu ihrer Bildung ist es zunächst nothwendig, das Verhalten der Grösse $Q(\omega, \omega')$ zu untersuchen, wenn man die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten 2ϖ, $2\varpi'$ vertauscht. Es wird nämlich

$$Q(\varpi, \varpi') = \varrho \begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} Q(\omega, \omega'),$$

wo $\varrho \begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix}$ eine 24^{te} Wurzel der Einheit ist, welche man durch Zurückführung auf Gauss'sche Summen bestimmen kann. Ich habe für diese Grösse ϱ auch sogleich eine Tabelle aufgestellt, welche die Fälle $q = 1$ bis $q = 7$ umfasst.

Jetzt bietet, abgesehen von numerischen Rechnungen, die Herstellung der f-Gleichung und die Untersuchung ihrer Wurzeln keine Schwierigkeit mehr, namentlich, wenn n eine *Primzahl* von der Form $6l \pm 1$ ist; denn man kennt die Form der Gleichung und kann die Zahlencoefficienten durch Entwickelung nach Potenzen von $h\left(= e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}\right)$ ausrechnen. Nach dieser Methode habe ich für die Zahlen

$$n = 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29$$

die f-Gleichungen wirklich gebildet; für $n = 5$ und für $n = 7$ sind auch die übrigen Grössen, welche bei der Transformation auftreten, als rationale Functionen von f, g_2, g_3 dargestellt.

Zwischen den $n+1$ Wurzeln der f-Gleichung gelten $\frac{n+1}{2}$ Relationen, welche denen für den Jacobi'schen Multiplicator analog sind.

Ist n eine *zusammengesetzte* Zahl von der Form $6l \pm 1$, so kann man die f-Gleichung am leichtesten durch *wiederholte Transformation* finden. Ist z. B. $n = ab$, so bilde man

$$f=\frac{Q\left(\frac{\varpi}{a},\varpi'\right)}{Q\,(\varpi,\varpi')},\quad \bar{f}=\frac{Q\left(\frac{\varpi}{ab},\varpi'\right)}{Q^b\left(\frac{\varpi}{a},\varpi'\right)}$$

und die beiden f-Gleichungen, deren Wurzeln f und $\bar{f}$ sind. Diese f-Gleichungen gehören bez. zur Transformation a^{ten} und b^{ten} Grades. Da nun

$$f^b\bar{f}=\frac{Q\left(\frac{\varpi}{ab},\varpi'\right)}{Q^{ab}(\varpi,\varpi')}=f\left(\frac{\varpi}{ab},\varpi'\right)$$

wird, so findet man durch Elimination auch die f-Gleichung für $f\left(\frac{\varpi}{ab},\varpi'\right)$.

Eine wesentliche Reduction tritt hierbei ein, wenn $n=6l+1$ ein *Quadrat* ist, weil dann nicht nur f^2, sondern schon f selbst die Wurzel einer Gleichung vom Grade $T(n)$ wird*). Dies habe ich auch an den Beispielen $n=25$ und $n=49$ durchgeführt.

Für die Zahlen von der Form $6l\pm 2$ gelten ähnliche Schlüsse; nur ist hier im Allgemeinen erst f^8 die Wurzel der f-Gleichung; als Beispiele sind die Fälle $n=2, 4, 8$ behandelt**).

Hat n die Form $6l+3$, so ist im Allgemeinen erst f^6 die Wurzel der f-Gleichung. Eine Ausnahme davon findet statt, wenn n ein *Quadrat* ist, weil dann schon f^3 die Wurzel der f-Gleichung wird. Als Beispiele dienen die Fälle $n=3$ und $n=9$.

Hat schliesslich n die Form $6l$, so wird im Allgemeinen erst f^{24} die Wurzel der f-Gleichung sein; die Ausführung von Beispielen wäre daher in diesem Falle sehr umständlich und konnte um so eher unterlassen werden, da dieser Uebelstand durch Einführung anderer Hülfsgrössen zu heben ist.

Wie schon in meinen früheren Abhandlungen, so werde ich auch hier die Theorie der elliptischen Functionen nach den Methoden des Herrn Weierstrass zu Grunde legen. Daher werde ich mich auch möglichst der Bezeichnungen bedienen, welche Herr H. A. Schwarz in seinen „*Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Prof. Weierstrass*“ benutzt hat.

Die innigen Beziehungen, welche mit den älteren Arbeiten des Herrn Klein bestehen, wurden schon hervorgehoben. Es erübrigt nur,

---

*) Vergl. denselben Satz bei Weber, l. c. Indem ich die Beispiele $n=25$ und $n=49$ hinzufüge, folge ich einer von Herrn Weber an mich gerichteten Aufforderung.

**) Vergl. hier und bei den folgenden Angaben die vorgenannte Arbeit von Herrn Hurwitz.

dass ich auf die neuesten Publicationen von Herrn Klein verweise, in welchen sich derselbe meinem ursprünglichen Ausgangspunkte und den von mir gebrauchten Methoden sehr genähert hat (siehe insbesondere auch die nach Abschluss der hier folgenden Untersuchungen veröffentlichte Arbeit: „Ueber die elliptischen Normalcurven von der n^{ten} Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der n^{ten} Stufe", in den Abhandl. der k. sächs. Gesellschaft d. Wiss. von 1885).

Abschnitt I.

Eigenschaften der speciellen Theilungsgleichung.

§ 1.

Definition und Eigenschaften der Theilwerthe der $\wp$-Function.

Nach meiner Abhandlung: „*Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplication der elliptischen Functionen*" (Journal für Mathematik, Bd. 76, S. 21—33)*) ist für jeden beliebigen Werth von n

$$(1)\quad \psi_n(u) = \frac{\sigma(nu)}{(\sigma u)^{nn}} = \frac{(n-1)^{n-1}}{[2!\,3!\ldots(n-1)!]^2}\begin{vmatrix} \wp' u & \wp'' u & \cdots & \wp^{(n-1)} u \\ \wp'' u & \wp''' u & \cdots & \wp^{(n)} u \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \wp^{(n-1)} u & \wp^{(n)} u & \cdots & \wp^{(2n-3)} u \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt zunächst, dass für jeden beliebigen Werth von m die Grössen $\psi_{2m+1}(u)$ und $\frac{\psi_{2m+2}(u)}{\wp' u}$ *ganze rationale* Functionen von $\wp u, g_2, g_3$ sind. Andererseits ist

$$(2)\qquad \psi_n^2(u) = n^2 \prod{}' \left[\wp u - \wp\left(\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right)\right],$$

wo λ und μ alle Werthe von 0 bis $n-1$ annehmen, nur dürfen sie nicht beide gleichzeitig gleich 0 sein, was der Strich bei dem Productzeichen $\prod$ andeuten möge. Nun ist aber

$$\wp\left(\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right) = \wp\left(\frac{2\lambda'\omega + 2\mu'\omega'}{n}\right),$$

wenn

$$\lambda + \lambda' \equiv \mu + \mu' \equiv 0 \pmod{n},$$

folglich werden auf der rechten Seite von Gleichung (2) je zwei Factoren einander gleich, nur die drei Factoren

$$\wp u - \wp\omega,\quad \wp u - \wp\omega',\quad \wp u - \wp(\omega + \omega')$$

---

*) Die Resultate dieser Abhandlung sind in die oben erwähnte Formel-Sammlung von Herrn H. A. Schwarz aufgenommen worden.

treten für *gerade* Werthe von n einzeln auf. Setzt man also $\wp u = s$ und

$$(3)\begin{cases} \psi_{2m+1}(u) = (2m+1)[(\wp u)^{2m(m+1)} - K_1(\wp u)^{2m(m+1)-1} + \cdots + K_{2m(m+1)}] \\ \qquad = (2m+1)\prod_{2m+1}(s), \\ \psi_{2m+2}(u) = -(m+1)\wp' u[(\wp u)^{2m(m+2)} - K_1(\wp u)^{2m(m+2)-1} + \cdots + K_{2m(m+2)}] \\ \qquad = -(m+1)\wp' u \prod_{2m+2}(s), \end{cases}$$

so sind $K_1, K_2, \ldots$ die elementaren symmetrischen Functionen der von einander verschiedenen Grössen $\wp\left(\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right)$, wobei aber für *gerades* n die drei Grössen $\wp\omega$, $\wp\omega'$, $\wp(\omega+\omega')$ ausgeschlossen sind.

Die so definirten Grössen $\wp\left(\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right)$, welche der Kürze wegen durch $\wp_{\lambda,\mu}$ bezeichnet werden, sollen *„das vollständige System der Theilwerthe n^{ten} Grades der Function $\wp u$“* heissen*) und die Gleichung

$$(4)\qquad \prod_n(s) = 0,$$

deren Wurzeln sie sind, soll *„die specielle Theilungsgleichung“* genannt werden. Es gilt dann der Satz:

I. *Die Coefficienten der speciellen Theilungsgleichung sind ganze rationale Functionen von g_2 und g_3;* und daraus folgt weiter:

II. *Jede (ganze) symmetrische Function derjenigen Theilwerthe, welche das vollständige System bilden, ist eine (ganze) rationale Function von g_2 und g_3.*

§ 2.

Reduction der Theilwerthe n^{ten} Grades der $\wp$-Function.

Sind $a, b, c, \ldots$ die von einander verschiedenen Primfactoren der Zahl n, ist also

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

so zerfällt $\prod_n(s)$ in Factoren. Es wird nämlich nach Gleichung (2)

$$\psi_n^2(u) = n^2 \prod{}'(\wp u - \wp_{\lambda,\mu}); \quad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, 2, \cdots n-1 \\ \mu = 0, 1, 2, \cdots n-1 \end{pmatrix};$$

dabei giebt es unter den Werthen von λ und ebenso unter den Werthen von μ genau $\frac{n}{a}$ Werthe, welche durch a theilbar sind. Wenn man nun noch berücksichtigt, dass λ und μ nicht gleichzeitig 0 sein dürfen, so ergiebt sich der Satz, dass *die Anzahl der Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$, bei denen λ und μ beide durch a theilbar sind, gleich $\frac{n^2}{a^2} - 1$ ist.* Das

*) Da $\wp(u + 2\alpha\omega + 2\beta\omega') = \wp u$ ist, so wird auch $\wp_{\lambda+\alpha n, \mu+\beta n} = \wp_{\lambda,\mu}$.

Product dieser Factoren ist $\frac{a^2}{n^2} \cdot \psi^2_{\frac{n}{a}}(u)$, also eine *ganze rationale* Function von $\wp u$, g_2, g_3, durch welche $\psi_n^2(u)$ theilbar ist. Der Quotient

$$\psi_n^2(u) : \psi^2_{\frac{n}{a}}(u)$$

ist daher gleichfalls eine *ganze rationale* Function von $\wp u$, g_2, g_3 und ist das Product von

$$(n^2-1) - \left(\frac{n^2}{a^2} - 1\right) = n^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)$$

Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$. Ebenso ist die Anzahl aller Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$ in $\psi_n^2(u)$, bei denen λ und μ *beide* durch b theilbar sind, gleich $\frac{n^2}{b^2} - 1$, während die Anzahl aller Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$, bei denen λ und μ *beide* durch ab theilbar sind, gleich $\frac{n^2}{a^2 b^2} - 1$ ist. Daraus folgt, dass die Anzahl aller dieser Factoren, bei denen λ und μ *beide* durch b, aber nicht gleichzeitig *beide* durch ab theilbar sind, gleich

$$\left(\frac{n^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{n^2}{a^2 b^2} - 1\right) = \frac{n^2}{b^2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)$$

wird. Das Product dieser Factoren ist

$$\frac{b^2}{n^2}\,\psi^2_{\frac{n}{b}}(u) : \frac{a^2 b^2}{n^2}\,\psi^2_{\frac{n}{ab}}(u).$$

Ebenso, wie $\psi_n^2(u) : \psi^2_{\frac{n}{a}}(u)$ eine *ganze rationale* Function von $\wp u$, g_2, g_3 ist, so muss auch $\psi^2_{\frac{n}{b}}(u) : \psi^2_{\frac{n}{ab}}(u)$ eine *ganze rationale* Function dieser Grössen sein, durch welche $\psi_n^2(u) : \psi^2_{\frac{n}{a}}(u)$ theilbar ist. Der Ausdruck

$$\frac{\psi_n^2(u)\,\psi^2_{\frac{n}{ab}}(u)}{\psi^2_{\frac{n}{a}}(u)\,\psi^2_{\frac{n}{b}}(u)}$$

ist also eine *ganze rationale* Function von $\wp u$, g_2, g_3 und enthält nur noch

$$n^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) - \frac{n^2}{b^2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) = n^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)$$

Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$.

Vertauscht man jetzt n mit $\frac{n}{c}$, so gelten dieselben Schlüsse, so dass auch

$$\frac{\psi^2_{\frac{n}{c}}(u)\,\psi^2_{\frac{n}{abc}}(u)}{\psi^2_{\frac{n}{ac}}(u)\,\psi^2_{\frac{n}{bc}}(u)}$$

eine *ganze rationale* Function von $\wp u$, g_2, g_3 ist, welche diejenigen $\frac{n^2}{c^2}\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)$ Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$ enthält, bei denen λ und μ *beide* durch c, nicht aber beide auch durch a oder durch b theilbar sind. Dieser Ausdruck kann also wiederum abgesondert werden, so dass

$$\frac{\psi^2_n(u)\,\psi^2_{\frac{n}{ab}}(u)\,\psi^2_{\frac{n}{ac}}(u)\,\psi^2_{\frac{n}{bc}}(u)}{\psi^2_{\frac{n}{a}}(u)\,\psi^2_{\frac{n}{b}}(u)\,\psi^2_{\frac{n}{c}}(u)\,\psi^2_{\frac{n}{abc}}(u)}$$

eine *ganze rationale* Function von $\wp u$, g_2, g_3 wird, die nur noch

$$n^2\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)-\frac{n^2}{c^2}\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)$$
$$=n^2\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\left(1-\frac{1}{c^2}\right)$$

Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$ enthält.

Wenn man in dieser Weise fortfährt, bis man nur noch ein Product von solchen Factoren übrig behält, bei denen die drei Zahlen λ, μ, n keinen Factor mehr besitzen, der allen dreien gemeinsam ist, so wird dieses Product eine *ganze rationale* Function von $\wp u$, g_2, g_3 sein, deren Grad in Bezug auf $\wp u$ gleich $\varphi(n)\,T(n)$ ist, wobei $\varphi(n)$ und $T(n)$ durch die folgenden Gleichungen definirt werden:

$$(5)\quad \begin{cases} \varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots, \\ T(n) = n\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\cdots, \\ \varphi(n)\,T(n) = n^2\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\cdots. \end{cases}$$

Diese ganze rationale Function von $\wp u$ ist aber (wenn n von 2 verschieden ist) ein vollständiges *Quadrat*, weil $\wp_{\lambda,\mu} = \wp_{\lambda',\mu'}$ wird für $\lambda + \lambda' \equiv \mu + \mu' \equiv 0 \pmod{n}$, so dass je zwei von den übrig gebliebenen Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$ einander gleich werden.

Die von einander verschiedenen Grössen $\wp_{\lambda,\mu}$, bei denen λ, μ, n keinen Factor besitzen, der allen dreien gemeinsam ist, sollen daher *„das reducirte System der Theilwerthe n^{ten} Grades“* heissen, ihre Anzahl ist für $n = 2$ gleich 3 und für alle anderen Werthe von n gleich $\frac{1}{2}\varphi(n)\,T(n)$. Die Gleichung, deren Wurzeln das reducirte System der Theilwerthe n^{ten} Grades ausmachen, heisse *„die reducirte Theilungsgleichung.“*

Hieraus ergeben sich die folgenden Sätze:

III. *Die Coefficienten der reducirten Theilungsgleichung sind ganze rationale Functionen von g_2 und g_3.*

IV. *Jede (ganze) symmetrische Function derjenigen Theilwerthe n^{ten} Grades, welche das reducirte System bilden, ist eine (ganze) rationale Function von g_2 und g_3.*

§ 3.

Resolventen der reducirten Theilungsgleichung.

Sind jetzt λ und μ so gewählt, dass $\wp_{\lambda,\mu}$ zu dem reducirten System der Theilwerthe n^{ten} Grades gehört, und setzt man der Kürze wegen

$$\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n} = w_{\lambda,\mu}, \quad \text{also} \quad \wp_{\lambda,\mu} = \wp(w_{\lambda,\mu}),$$

so gehören auch die $\wp$-Theiler

$$\wp(k w_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k^2 w_{\lambda,\mu}), \cdots \wp(k^\varkappa w_{\lambda,\mu})$$

zu dem reducirten System, wenn k relativ prim ist zu n. Nun sei $\varkappa$ die *kleinste* Zahl, für welche

$$k^\varkappa \equiv \pm 1 \pmod{n}$$

ist, und es sei $C_{\lambda,\mu}$ eine cyklische Function der Grössen

$$\wp(w_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k w_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k^2 w_{\lambda,\mu}), \cdots \wp(k^{\varkappa-1} w_{\lambda,\mu}).$$

Da nun $\wp(k^\varkappa u) = \wp u$ ist, so ist $C_{\lambda,\mu}$ auch eine cyklische Function von

$$\wp(k w_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k^2 w_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k^3 w_{\lambda,\mu}), \cdots \wp(k^\varkappa w_{\lambda,\mu}),$$

oder von

$$\wp(k^2 w_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k^3 w_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k^4 w_{\lambda,\mu}), \cdots \wp(k^{\varkappa+1} w_{\lambda,\mu}),$$

u. s. w. Ferner ist $\wp(ku)$ eine rationale Function von $\wp u$, deshalb wird

$$(6) \qquad C_{\lambda,\mu} = F(\wp(w_{\lambda,\mu})) = F(\wp(k w_{\lambda,\mu})) = \cdots = F(\wp(k^{\varkappa-1} w_{\lambda,\mu})),$$

wobei $F(\wp)$ eine rationale Function von $\wp$, g_2, g_3 bedeutet.

Wenn nun $\wp(w_{\lambda',\mu'}) = \wp_{\lambda',\mu'}$ gleichfalls zu den Theilwerthen des reducirten Systems gehört, aber von den Theilwerthen $\wp(w_{\lambda,\mu})$, $\wp(k w_{\lambda,\mu})$, $\cdots$, $\wp(k^{\varkappa-1} w_{\lambda,\mu})$ verschieden ist, so kann man dieselbe cyklische Function — sie heisse jetzt $C_{\lambda',\mu'}$ — von den Grössen

$$\wp(w_{\lambda',\mu'}), \quad \wp(k w_{\lambda',\mu'}), \quad \wp(k^2 w_{\lambda',\mu'}), \cdots \wp(k^{\varkappa-1} w_{\lambda',\mu'})$$

bilden und erhält ebenso

$$(6\text{a}) \qquad C_{\lambda',\mu'} = F(\wp(w_{\lambda',\mu'})) = F(\wp(k w_{\lambda',\mu'})) = \cdots = F(\wp(k^{\varkappa-1} w_{\lambda',\mu'})).$$

So kann man fortfahren, bis das reducirte System der Theilwerthe erschöpft ist. Nach bekannten Sätzen aus der Zahlentheorie muss nämlich $\varkappa$ ein Theiler von $\varphi(n)$ sein, während unter den Theilwerthen

$$\begin{array}{l}\wp(w_{\lambda,\mu}),\quad \wp(k\,w_{\lambda,\mu}),\quad \cdots\ \wp(k^{\varkappa-1}w_{\lambda,\mu}),\\ \wp(w_{\lambda',\mu'}),\quad \wp(k\,w_{\lambda',\mu'}),\quad \cdots\ \wp(k^{\varkappa-1}w_{\lambda',\mu'}),\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\end{array}$$

keine zwei einander gleich sind. Da nun (wenn man von dem Falle $n = 2$ absieht) $\varkappa$ auch sicher ein Theiler von $\frac{1}{2}\,\varphi(n)\,T(n)$ ist, so wird

$$\frac{1}{2\varkappa}\,\varphi(n)\,T(n) = N \tag{7}$$

eine ganze Zahl, und

$$\varkappa(C_{\lambda,\mu} + C_{\lambda',\mu'} + \cdots) = \sum F(\wp_{\lambda,\mu}), \tag{8}$$

wo die Summe auf der linken Seite N Glieder enthält, während die Summe auf der rechten Seite über die sämmtlichen Theilwerthe des reducirten Systems zu erstrecken ist.

Da für jede beliebige Potenz der Grössen $C_{\lambda,\mu}, C_{\lambda',\mu'}, \ldots$ ähnliche Schlüsse gelten, so wird für jeden ganzzahligen Werth von r

$$C^r_{\lambda,\mu} + C^r_{\lambda',\mu'} + \cdots$$

eine symmetrische Function der Theilwerthe des reducirten Systems und somit nach Satz IV eine rationale Function von g_2 und g_3. Dies giebt den Satz:

V. *Ist* $C_{\lambda,\mu}$ *eine cyklische Function von* $\wp(w_{\lambda,\mu}),\ \wp(k w_{\lambda,\mu}),\ \ldots\ \wp(k^{\varkappa-1}w_{\lambda,\mu})$, *wo* $\varkappa$ *die kleinste Zahl ist, für welche* $k^\varkappa \equiv \pm 1$ (*mod.* n) *ist, so wird* $C_{\lambda,\mu}$ *die Wurzel einer Gleichung* N^{ten} *Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von* g_2 *und* g_3 *sind.* Eine solche Gleichung heisse „*Resolvente*" der reducirten Theilungsgleichung.

So ist z. B. für $n = 14$

$$\varphi(n) = 6,\quad T(n) = 24,\quad \tfrac{1}{2}\,\varphi(n)\,T(n) = 72;$$

das reducirte System der Theilwerthe besteht daher hier aus den 72 Grössen

$$\begin{array}{llll}
\wp\left(\frac{\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{3\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{9\omega}{7}\right), & \\
\wp\left(\frac{\omega'+r\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{3\omega'+3r\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{9\omega'+9r\omega}{7}\right), & (r=0,1,2,\cdots 13),\\
\wp\left(\frac{2\omega'+s\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{6\omega'+3s\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{18\omega'+9s\omega}{7}\right), & (s=1,3,5,7,9,11,13),\\
\wp\left(\frac{7\omega'+t\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{21\omega'+3t\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{63\omega'+9t\omega}{7}\right); & (t=1,2)
\end{array}$$

und jede cyklische Function von $\wp\left(\frac{\omega}{7}\right),\ \wp\left(\frac{3\omega}{7}\right),\ \wp\left(\frac{9\omega}{7}\right)$ ist die Wurzel einer Gleichung 24^{ten} Grades, deren Coefficienten *rationale* Functionen von g_2 und g_3 sind.

Von besonderem Interesse ist der Satz V, wenn n eine Primzahl ist, und wenn man annimmt, dass $k = g$ eine primitive Wurzel von n ist. Dann wird nämlich, (wenn man von dem Falle $n = 2$ absieht),

$$\varkappa = \frac{1}{2}\,\varphi(n) = \frac{n-1}{2}, \quad N = T(n) = n + 1,$$

und die Theilwerthe

$$\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right), \quad \wp\left(\frac{2g\omega}{n}\right), \quad \wp\left(\frac{2g^2\omega}{n}\right), \cdots \wp\left(\frac{2g^{\varkappa-1}\omega}{n}\right)$$

sind, wenn man anders ordnet, identisch mit den Grössen

$$\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right), \quad \wp\left(\frac{4\omega}{n}\right), \quad \wp\left(\frac{6\omega}{n}\right), \cdots \wp\left(\frac{n-1}{n}\,\omega\right).$$

Jede *symmetrische* Function von diesen Grössen ist auch eine *cyklische* Function von $\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right)$, $\wp\left(\frac{2g\omega}{n}\right)$, $\cdots \wp\left(\frac{2g^{\varkappa-1}\omega}{n}\right)$, so dass man in diesem Falle leicht Ausdrücke bilden kann, welche die Wurzeln einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades sind.

Solche Resolventen $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades sind in der That mehrfach gebildet und für die Transformation der elliptischen Functionen benutzt worden. Es soll hier aber auch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass aus dem Satz V auch die Bildung zahlreicher anderer Resolventen hervorgeht, die man erhält, wenn k *keine primitive* Wurzel von n ist.

Um dies an einem Zahlenbeispiel zu erläutern, sei $n = 13$, dann genügt eine cyklische Function der 6 Grössen

$$\wp\left(\frac{2\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{4\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{8\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{16\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{32\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{64\omega}{13}\right)$$

einer Resolvente 14^{ten} Grades, dagegen genügt eine cyklische Function der 3 Grössen

$$\wp\left(\frac{2\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{8\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{32\omega}{13}\right)$$

einer Resolvente 28^{ten} Grades; und endlich genügt eine cyklische (symmetrische) Function der beiden Grössen

$$\wp\left(\frac{2\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{10\omega}{13}\right)$$

einer Resolvente 42^{ten} Grades.

Aehnliche Betrachtungen gelten für alle Zahlen n von der Form a^α oder $2a^\alpha$, wenn a eine *ungerade Primzahl* ist, d. h. man kann dann mit Anwendung des Satzes V unmittelbar Resolventen vom Grade $T(n)$ bilden, weil es dann noch primitive Wurzeln von n giebt.

Ist n auf andere Weise aus mehreren Factoren zusammengesetzt, so sind die Resolventen, welche der Satz V liefert, nicht vom Grade $T(n)$, sondern ihr Grad wird ein Vielfaches von $T(n)$. Es wird aber in dem Folgenden gezeigt werden, wie man auch dann noch Resolventen vom Grade $T(n)$ bilden kann.

Abschnitt II.

Einführung der Grösse $f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)$ und ihre Bedeutung für die Transformation der elliptischen Functionen.

§ 4.

Ueber die transformirten Functionen $\bar{\sigma} u$ und $\bar{\wp} u$.*)

Die Theilwerthe n^{ten} Grades der $\wp$-Function spielen eine sehr wichtige Rolle bei der Transformation der elliptischen Functionen; und umgekehrt kann man auch zeigen, dass die genannten Theilwerthe rational berechnet werden können nach Auflösung gewisser Resolventen, welche bei der Transformation n^{ten} Grades auftreten.

Die allgemeinsten Ausdrücke für die Transformation der elliptischen Functionen findet man dabei in folgender Weise.

Es seien die ganzen Zahlen p und q zu einander relativ prim, im Uebrigen aber ganz beliebig, dann kann man zwei ganze Zahlen p' und q' finden, so dass

$$pq' - p'q = +1 \tag{9}$$

wird. Das Periodenpaar

$$2\varpi = 2p\omega + 2q\omega', \qquad 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega' \tag{10}$$

heisst dann zu dem *primitiven* Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ *äquivalent*.

Vertauscht man nun die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten 2ϖ, $2\varpi'$, so ändern sich die Functionen σu, $\wp u$ und ihre Invarianten g_2, g_3 gar nicht. Es möge dies durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma(u \mid \varpi, \varpi') = \sigma(u \mid \omega, \omega') = \sigma u, \\ \wp(u \mid \varpi, \varpi') = \wp(u \mid \omega, \omega') = \wp u \end{array}\right. \tag{11}$$

ausgedrückt werden. Sind dagegen in

$$2\omega_1 = 2\lambda\omega + 2\mu\omega', \qquad 2\omega_1' = 2\lambda'\omega + 2\mu'\omega'$$

---

*) Die Ausführungen dieses und des folgenden Paragraphen sind zum Theil einer Vorlesung entnommen, welche Herr Weierstrass im Winter 1870—71 gehalten hat.

$\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ ganze Zahlen, für welche

$$\lambda\mu' - \lambda'\mu = n > 1$$

wird, so sind $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_1')$ und $\wp(u \mid \omega_1, \omega_1')$ von $\sigma(u \mid \omega, \omega')$ und $\wp(u \mid \omega, \omega')$ verschieden. Es besteht aber doch noch ein Zusammenhang zwischen diesen und den ursprünglichen Functionen, welcher durch die *Transformation der elliptischen Functionen* klar gelegt wird, und zwar entstehen hierbei die ursprünglichen Functionen aus den neuen durch *Transformation n^{ten} Grades.* Es lässt sich aber zeigen, dass man sich darauf beschränken kann, den Zusammenhang zwischen den Functionen $\sigma(u \mid n\varpi, \varpi')$, $\wp(u \mid n\varpi, \varpi')$ und $\sigma(u \mid \omega, \omega')$, $\wp(u \mid \omega, \omega')$ zu untersuchen; oder — und dass kommt auf dasselbe hinaus — man braucht nur den Zusammenhang zwischen $\sigma(u \mid \omega, \omega')$, $\wp(u \mid \omega, \omega')$ und den transformirten Functionen

$$(12) \qquad \sigma\left(u \mid \frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = \bar{\sigma} u, \quad \wp\left(u \mid \frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = \bar{\wp} u$$

zu untersuchen.

Da $\bar{\wp} u$ eine *gerade* Function von u ist, welche die Perioden 2ϖ, $2\varpi'$ besitzt, so muss $\bar{\wp} u$ eine rationale Function von $\wp u$ sein, die jetzt gebildet werden möge.

Die sämmtlichen nicht congruenten Werthe von u, für welche $\bar{\wp} u$ unendlich wird, sind

$$0, \ \frac{2\varpi}{n}, \ \frac{4\varpi}{n}, \ \ldots \ \frac{2(n-1)\varpi}{n};$$

entwickelt man $\bar{\wp} u$ nach Potenzen von $u - \frac{2\alpha\varpi}{n}$, so wird für $\alpha = 0$, $1, 2, \ldots n-1$

$$\bar{\wp} u = \left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)^{-2} + \frac{g_2}{20}\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)^2 + \cdots,$$

so dass die elliptische Function

$$\bar{\wp} u - \wp u - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \wp\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = -B_1$$

für keinen Werth von u mehr unendlich wird, woraus man schliesst, dass B_1 eine Constante ist. Den Werth dieser Constanten findet man, indem man die linke Seite der letzten Gleichung nach Potenzen von u entwickelt, dann ist der Coefficient von u^0 gleich $-B_1$, also

$$(13) \qquad B_1 = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right).$$

Dies giebt für beliebige Werthe von n:

$$(14)\qquad \bar{\wp}u = \wp u + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\left[\wp\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right].$$

Ist n *ungerade*, also $n = 2m+1$, so wird

$$\bar{\wp}u = \wp u + \sum_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right) + \wp\left(u - \frac{2(m+\alpha)\varpi}{n}\right)\right] - B_1.$$

Setzt man jetzt

$$m + \alpha = n - \beta, \qquad \text{also} \qquad \beta = m + 1 - \alpha,$$

und beachtet, dass

$$\wp\left(u - \frac{2(n-\beta)\varpi}{n}\right) = \wp\left(u + \frac{2\beta\varpi}{n}\right)$$

wird, so erhält man

$$\sum_{\alpha=1}^{m}\wp\left(u - \frac{2(m+\alpha)\varpi}{n}\right) = \sum_{\beta=m}^{\beta=1}\wp\left(u + \frac{2\beta\varpi}{n}\right) = \sum_{\alpha=1}^{m}\wp\left(u + \frac{2\alpha\varpi}{n}\right),$$

also

$$(14\text{a})\qquad \bar{\wp}u = \wp u + \sum_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right) + \wp\left(u + \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right] - B_1.$$

Nun ist aber

$$\wp(u-v) + \wp(u+v) = \frac{(\wp u + \wp v)\left(2\wp u\wp v - \frac{1}{2}g_2\right) - g_3}{(\wp u - \wp v)^2},$$

folglich wird

$$(15\text{a})\qquad \bar{\wp}u = \wp u + \sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\left[\wp u + \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right]\left[2\wp u\,\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \frac{1}{2}g_2\right] - g_3}{\left[\wp u - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right]^2} - B_1.$$

Ist n *gerade*, also $n = 2m+2$, so findet man in ähnlicher Weise

$$(14\text{b})\qquad \begin{cases} \bar{\wp}u = \wp u + \wp(u-\varpi) \\ + \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right) + \wp\left(u + \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right] - B_1, \end{cases}$$

oder

$$(15\text{b})\qquad \begin{cases} \bar{\wp}u = \wp u + e_\lambda + \dfrac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{\wp u - e_\lambda} \\ + \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\left[\wp u + \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right]\left[2\wp u\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \frac{1}{2}g_2\right] - g_3}{\left[\wp u - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right]^2} - B_1, \end{cases}$$

wenn man $\wp\varpi$ mit e_λ und die beiden anderen Wurzeln der Gleichung

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0$$

mit e_μ und e_ν bezeichnet.

Ist n *ungerade*, so folgt durch Integration aus Gleichung (14a)

$$(16\text{a})\quad \frac{\bar{\sigma}' u}{\bar{\sigma} u} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} + \sum_{\alpha=1}^{m}\left[\frac{\sigma'\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)}{\sigma\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)} + \frac{\sigma'\left(u + \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)}{\sigma\left(u + \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)}\right] + B_1 u,$$

und ist n *gerade*, so folgt durch Integration aus Gleichung (14b)

$$(16\text{b})\quad \frac{\bar{\sigma}' u}{\bar{\sigma} u} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} + \frac{\sigma'(u-\varpi)}{\sigma(u-\varpi)} + \tilde{\eta}$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{m}\left[\frac{\sigma'\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)}{\sigma\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)} + \frac{\sigma'\left(u + \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)}{\sigma\left(u + \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)}\right] + B_1 u.$$

Hierbei ist

$$\tilde{\eta} = \frac{\sigma'\varpi}{\sigma\varpi} = 2p\eta + 2q\eta',$$

und die Integrationsconstanten sind dadurch bestimmt, dass man u mit $-u$ vertauscht.

Bei nochmaliger Integration der Gleichungen (16a) und (16b) findet man die Integrationsconstante, indem man $u = 0$ setzt und die Relation

$$\frac{\bar{\sigma} u}{\sigma u} = 1 \quad \text{für} \quad u = 0$$

beachtet. Dadurch erhält man die Gleichungen

$$(17\text{a})\quad \begin{cases} \bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2}B_1 u^2}\, \sigma u \displaystyle\prod_{\alpha=1}^{m} \frac{\sigma\left(\frac{2\alpha\varpi}{n} - u\right)\sigma\left(\frac{2\alpha\varpi}{n} + u\right)}{\sigma\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\sigma\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)} \\ \quad\; = e^{\frac{1}{2}B_1 u^2}\, \sigma^n u \displaystyle\prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp u - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right], \end{cases}$$

wenn $n = 2m + 1$ ist; und, indem man $\dfrac{e^{-\tilde{\eta} u}\sigma(\varpi + u)}{\sigma\varpi}$ mit $\sigma_\lambda u$ bezeichnet,

$$(17\text{b})\quad \bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2}B_1 u^2}\, \sigma_\lambda u\, \sigma^{n-1} u \prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp u - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right],$$

wenn $n = 2m + 2$ ist.

Es kommt besonders auf die Bestimmung von

$$(18)\quad \prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp u - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right] = P(s)$$

an, denn kennt man diese Grösse, so folgt für $n = 2m + 1$

$$\lg(\bar{\sigma} u) = \frac{1}{2} B_1 u^2 + n \lg(\sigma u) + \lg P(s),$$

$$\frac{\bar{\sigma}' u}{\bar{\sigma} u} = B_1 u + n \frac{\sigma' u}{\sigma u} + \frac{d \lg P(s)}{du},$$

$$\bar{\wp} u = n \wp u - B_1 - \frac{d^2 \lg P(s)}{du^2}. \tag{19a}$$

In ähnlicher Weise findet man für $n = 2m + 2$

$$\bar{\wp} u = (n-1) \wp u + \wp(u - \bar{\omega}) - B_1 - \frac{d^2 \lg P(s)}{du^2}. \tag{19b}$$

Dabei ist

$$P(s) = s^m - G_1 s^{m-1} + G_2 s^{m-2} - \cdots \pm G_m \quad \text{und} \quad s = \wp u, \tag{20}$$

es sind also $G_1, G_2, \ldots G_m$ die *elementaren symmetrischen* Functionen der Theilwerthe

$$\wp\left(\frac{2\bar{\omega}}{n}\right), \wp\left(\frac{4\bar{\omega}}{n}\right), \cdots \wp\left(\frac{2m\bar{\omega}}{n}\right).$$

Ausserdem ist

$$B_1 = \begin{cases} 2G_1 & \text{für} \quad n = 2m + 1, \\ 2G_1 + e_\lambda & \quad\text{,,} \quad\; n = 2m + 2. \end{cases} \tag{21}$$

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich der Satz:

VI. *Zur Transformation n^{ten} Grades braucht man nicht die Theilwerthe $\wp_{\lambda,\mu}$ selbst, sondern nur die Grössen $G_1, G_2, \ldots G_m$ (und für gerades n noch e_λ).*

§ 5.

Ueber die Anzahl der Transformationen n^{ten} Grades.

In $\bar{\wp} u = \wp\left(u \,\middle|\, \frac{\bar{\omega}}{n}, \bar{\omega}'\right)$ ist $\bar{\omega}$ gleich $p\omega + q\omega'$, wobei p und q beliebige ganze Zahlen sind. Den unendlich vielen Werthen, welche p und q haben können, entsprechen aber nicht *unendlich* viele Werthe von $\bar{\wp} u$, sondern es giebt nur eine *endliche* Anzahl von verschiedenen Functionen $\bar{\wp} u$, welche durch Transformation n^{ten} Grades aus $\wp u$ entstanden sind. Diese Anzahl nennt man die *Anzahl der Transformationen n^{ten} Grades.* Mit ihrer Bestimmung hat sich schon Jacobi beschäftigt. (Ges. Werke, Bd. 1, S. 101)*). Hier kann man diese Anzahl auf folgende Weise finden.

---

*) Man vergl. auch Königsberger, die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen, S. 70.

Joubert, Sur les équations, qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques, S. 13.

Hurwitz, Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen, Math. Annalen, Bd. XVIII, S. 528—592.

Es sei zunächst $n = 2$, dann wird

$$B_1 = \wp\varpi = e_\lambda, \quad \bar{\sigma}u = e^{\frac{1}{2}B_1 u^2}\sigma_\lambda u\,\sigma u, \quad \bar{\wp}u = \wp u + \wp(u-\varpi) - \wp\varpi;$$

dabei ist $\wp\varpi$ die Wurzel einer Gleichung 3^{ten} Grades, nämlich der Gleichung

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0.$$

In diesem Falle ist also die Anzahl der von einander verschiedenen Transformationen gleich 3; die zugehörigen Werthe von ϖ sind:

$$\varpi = \omega, \quad \varpi = \omega', \quad \varpi = \omega + \omega'.$$

Es sei ferner n eine von 2 verschiedene Primzahl, also von der Form $2m + 1$, dann ist nach den Angaben in § 3

$$G_1 = \wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right) + \wp\left(\frac{4\varpi}{n}\right) + \cdots + \wp\left(\frac{2m\varpi}{n}\right)$$

die Wurzel einer Resolvente $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades. Dasselbe gilt von $G_2, G_3, \ldots G_m$; man braucht aber nur *eine* dieser Resolventen aufzustellen und zu lösen, weil, wie sich später ergeben wird, $G_2, G_3, \ldots G_m$ rationale Functionen von G_1 sind. Die $n + 1$ verschiedenen Werthe, welche ϖ dabei haben darf, sind z. B.*)

$$\omega, \ \omega', \ \omega + \omega', \ 2\omega + \omega', \ldots, (n-1)\,\omega + \omega'.$$

Im allgemeinen Falle gilt der folgende Satz:

VII. *Ist n eine beliebige ganze Zahl von der Form*

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

so ist die Anzahl der von einander verschiedenen Transformationen n^{ten} Grades höchstens gleich

$$T(n) = n\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)\cdots$$

Zum Beweise dieses Satzes beachte man, dass

$$\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n} + 2\alpha(\lambda\omega + \mu\omega')\right) = \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$$

ist, wobei λ und μ beliebige ganze Zahlen sind, folglich ändern sich $\bar{\sigma}u$ und $\bar{\wp}u$ gar nicht, wenn man bei ihrer Bildung, wie sie durch die Gleichungen (14), (17a), (17b) dargestellt ist, in

$$\varpi = p\omega + q\omega'$$

die Zahlen p und q bez. mit den Zahlen $p + n\lambda = p_1$, $q + n\mu = q_1$ vertauscht. Dann werden allerdings die Zahlen p und q möglicher Weise einen gemeinsamen Factor haben, dagegen werden sie niemals *beide* denselben Factor mit n gemeinsam haben. Setzt man nun

---

*) Man darf natürlich zu 2ϖ das n-fache einer beliebigen Periode addiren.

$$w_1 = \frac{2p_1\omega + 2q_1\omega'}{n},$$

so ist $\bar{\wp} u$ eine symmetrische Function der Grössen

$$\wp(w_1),\ \wp(2w_1),\ \ldots\ \wp((n-1)w_1)$$

und wird sich gar nicht ändern, wenn man w_1 mit rw_1 vertauscht, wenn nur r zu n relativ prim ist, denn die Zahlen

$$r,\ 2r,\ 3r,\ \ldots\ (n-1)r$$

geben modulo n die Reste

$$1, 2, 3, \ldots n-1,$$

nur in anderer Ordnung. Es liefern daher je zwei Grössen w_1 und w_2 dieselbe Transformation, wenn

$$w_2 = rw_1 + 2\lambda\omega + 2\mu\omega'$$

und r relativ prim zu n ist, so dass die Anzahl der Werthe von r gleich $\varphi(n)$ ist. Die Anzahl *aller* Grössen w_1, welche modulo 2ω, $2\omega'$ *nicht* congruent sind, ist aber nach den Untersuchungen des ersten Abschnitts gleich $\varphi(n)\ T(n)$, folglich kann die Anzahl der von einander verschiedenen Transformationen n^{ten} Grades höchstens gleich $T(n)$ sein.

In Uebereinstimmung hiermit wird später der Satz bewiesen werden, dass *die Grössen, welche bei der Transformation n^{ten} Grades auftreten, sämmtlich rationale Functionen von einer Grösse sind, welche von einer Resolvente $T(n)^{\text{ten}}$ Grades abhängt.*

§ 6.

Einführung der Hülfsgrösse $f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)$.

Es liegt nahe, bei der Transformation der elliptischen Functionen die in dem vorhergehenden Paragraphen charakterisirte Grösse B_1 (resp. G_1) als Hülfsgrösse einzuführen, durch welche die anderen bei der Transformation auftretenden Grössen, nämlich $G_2, G_3, \ldots G_m$ und die Invarianten $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ der transformirten Function $\bar{\wp} u$, sich *rational* ausdrücken lassen. Dies ist auch in der That die Absicht von Herrn Weierstrass gewesen (vergl. F. Müller, de transformatione functionum ellipticarum. Berlin 1867). Die Resolvente, deren Wurzel B_1 (resp. G_1) ist, wird aber nicht einfach genug, weshalb es nützlich erscheint, noch andere Hülfsgrössen aufzusuchen. Es sei nun, gleichviel ob $n = 2m+1$ oder $n = 2m+2$ ist,

$$D = \prod_{\alpha=1}^{m}\prod_{\beta=1}^{m}{}' \left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)\right], \tag{22}$$

wo der Strich bei dem Productzeichen Π andeuten möge, dass β nur die von α verschiedenen Werthe zwischen 1 und m annimmt; dann ist D die Discriminante der Gleichung

$$(23)\quad P(s)=\prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp u-\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right]=s^m-G_1s^{m-1}+G_2s^{m-2}-\cdots\pm G_m=0.$$

Setzt man nun der Kürze wegen*)

$$(24)\qquad \sigma_{\alpha p,\alpha q}=-e^{-2\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\bar{\eta}\bar{\omega}}\,\sigma\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right),$$

so wird

$$(25)\qquad \sigma_{-\alpha p,-\alpha q}=-\sigma_{+\alpha p,+\alpha q};\quad \sigma_{(\alpha+rn)p,(\alpha+rn)q}=(-1)^r\sigma_{\alpha p,\alpha q};$$
$$\sigma_{(n-\alpha)p,(n-\alpha)q}=\sigma_{\alpha p,\alpha q}.$$

Aus der Gleichung

$$\wp u-\wp v=\frac{\sigma(v-u)\,\sigma(v+u)}{\sigma^2u\,\sigma^2v}$$

folgt daher

$$\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)=\frac{\sigma\left(\frac{2(\beta-\alpha)\varpi}{n}\right)\sigma\left(\frac{2(\beta+\alpha)\varpi}{n}\right)}{\sigma^2\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\sigma^2\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)},$$

oder

$$(26)\qquad \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)=\frac{\sigma_{(\beta-\alpha)p,(\beta-\alpha)q}\,\sigma_{(\beta+\alpha)p,(\beta+\alpha)q}}{\sigma^2_{\alpha p,\alpha q}\,\sigma^2_{\beta p,\beta q}}.$$

Ist jetzt n *ungerade*, also $n=2m+1$, so wird deshalb

$$(27)\quad\left\{\begin{aligned}\prod_{\beta=1}^{m}{}'\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)\right]&=\frac{(-1)^{\alpha-1}\prod\limits_{\beta=1}^{m}\sigma^2_{\beta p,\beta q}}{\sigma_{2\alpha p,2\alpha q}\,\sigma^{2m-3}_{\alpha p,\alpha q}\prod\limits_{\beta=1}^{m}\sigma^2_{\beta p,\beta q}}\\&=\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\sigma_{2\alpha p,2\alpha q}\,\sigma^{2m-3}_{\alpha p,\alpha q}},\end{aligned}\right.$$

wobei also β auf der *linken* Seite der Gleichung nur die Werthe

---

*) Herr Klein hat in seiner bereits oben citirten Abhandlung die Bezeichnungen

$$\sigma_{\lambda,\mu}(u\,|\,\omega,\omega')=e^{\frac{2\lambda\eta+2\mu\eta'}{n}\left(u-\frac{\lambda\omega+\mu\omega'}{n}\right)}\,\sigma\left(u-\frac{2\lambda\omega+2\mu\omega'}{n}\,\middle|\,\omega,\omega'\right),$$

$$\sigma_{\lambda,\mu}=-e^{-\frac{2(\lambda\eta+\mu\eta')(\lambda\omega+\mu\omega')}{n^2}}\,\sigma\left(\frac{2\lambda\omega+2\mu\omega'}{n}\,\middle|\,\omega,\omega'\right)$$

eingeführt, denen die hier benutzten Ausdrücke entsprechen.

$$1, 2, \ldots a-1,\ a+1, \ldots m$$

annimmt. Da nun noch

$$\prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{2\alpha p, 2\alpha q} = \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{\alpha p, \alpha q} \tag{28}$$

wird, so folgt aus Gleichung (27)

$$D = \prod_{\alpha=1}^{m} \prod_{\beta=1}^{m}{}' \left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)\right] = \frac{(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}}{\prod\limits_{\alpha=1}^{m} \sigma_{\alpha p, \alpha q}^{2m-2}}. \tag{29}$$

Setzt man also

$$f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = f = (-1)^m \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{\alpha p, \alpha q}, \tag{30}$$

so wird

$$D = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} f^{-2m+2} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-3)}{8}} f^{-n+3}. \tag{31}$$

Diese Grösse f ist genau dieselbe, welche ich in Abh. 1 als Hülfsgrösse in die Transformationstheorie der elliptischen Functionen eingeführt habe. Schon aus ihrer Beziehung zur Discriminante der Gleichung $P(s) = 0$ kann man schliessen, dass sie zweckmässig gewählt ist.

Man kann jetzt noch die Beschränkung aufheben, dass n *ungerade* ist. Es war nämlich für *ungerade* Werthe von n

$$f = (-1)^m \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{\alpha p, \alpha q};$$

deshalb ist nach den Relationen (25) auch

$$f = (-1)^m \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{(n-\alpha)p,\ (n-\alpha)q}.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$f^2\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = f^2 = (-1)^{n-1} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \sigma_{\alpha p, \alpha q}. \tag{32}$$

Durch diese Gleichung sei f^2 jetzt auch für *gerade* Werthe von n definirt.

§ 7.

Verschiedene Darstellungen der Grösse f.

I. Es sei

$$h = e^{\frac{\bar\omega'\pi i}{\bar\omega}}, \quad z = e^{\frac{u\pi i}{2\bar\omega}}, \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \tag{33}$$

dann wird bekanntlich

$$e^{-\frac{\bar{\eta}u^2}{2\bar{\omega}}}\sigma u = \frac{2\varpi}{\pi}\,\frac{z-z^{-1}}{2i}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1-h^{2\nu}z^2}{1-h^{2\nu}}\cdot\frac{1-h^{2\nu}z^{-2}}{1-h^{2\nu}}\right),$$

also

$$-\sigma_{ap,\,aq} = e^{-2\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\bar{\eta}\bar{\omega}}\,\sigma\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = \frac{2\varpi}{\pi}\sin\left(\frac{\alpha\pi}{n}\right)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^{\alpha}}{1-h^{2\nu}}\cdot\frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^{-\alpha}}{1-h^{2\nu}}\right),$$

folglich ist für jeden positiven ganzzahligen Werth von n

$$(34)\qquad f^2 = (-1)^{n-1}\prod_{\alpha=1}^{n-1}\sigma_{ap,\,aq} = \left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^{n-1} n\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1-h^{2n\nu})^2}{(1-h^{2\nu})^{2n}}.\text{*)}$$

Für *ungerade* Werthe von n war f selbst durch die Gleichung (30) definirt, aus der man in Uebereinstimmung mit Gleichung (34)

$$(35)\qquad f = \left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-h^{2n\nu}}{(1-h^{2\nu})^n}$$

findet. Man kann auch diese Darstellung ohne Weiteres auf *gerade* Werthe von n übertragen, wenn man eine Festsetzung über das Vorzeichen von $\left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ trifft. Dieses Vorzeichen soll stets so bestimmt werden, dass der reelle Theil von $\left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ *positiv* ist. In dem Falle, wo der reelle Theil gleich 0 ist, möge der Factor von i positiv genommen werden.

Nach dieser Festsetzung sei die Grösse f durch die Gleichung (35) ebenso für *gerade wie für ungerade* Werthe von n definirt.

II. Setzt man jetzt

$$(36)\qquad g_2^3 - 27g_3^2 = \Delta(\varpi, \varpi') = \Delta,$$

so ist

---

*) Hierbei ist die bekannte Relation

$$2^{n-1}\prod_{\alpha=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha\pi}{n}\right) = n$$

verwendet. Eine ausführlichere Herleitung der Gleichung (34) findet sich in Abh. 1, § 2. Unter h und z versteht man gewöhnlich die Grössen $e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}$ und $e^{\frac{u\pi i}{2\omega}}$, so dass bei dieser Untersuchung h und z eine umfassendere Bedeutung haben.

$$(37)\qquad \Delta^{\frac{1}{24}} = \Delta^{\frac{1}{24}}(\varpi, \varpi') = \left(\frac{\pi}{\varpi}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}),^{*)}$$

wobei $\left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ das vorhin angegebene Vorzeichen besitzt. Aus Gleichung (35) folgt dann also

$$(38)\qquad f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = f = \frac{\Delta^{\frac{1}{24}}\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}{\Delta^{\frac{n}{24}}(\varpi, \varpi')}.$$

Da die 24[te] Wurzel aus $\Delta(\varpi, \varpi')$ eine grosse Rolle spielt, so möge dafür ein besonderes Zeichen Q eingeführt werden; es sei also

$$(39)\qquad Q = Q(\varpi, \varpi') = \left(\frac{\pi}{\varpi}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}) = \Delta^{\frac{1}{24}}(\varpi, \varpi').$$

Dadurch geht die Gleichung (38) über in

$$(38\text{a})\qquad f = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}{Q^n(\varpi, \varpi')}.$$

Bei dieser Darstellung von f, die also für *jeden* Werth von n gilt, sei noch einmal auf Gleichung (31) verwiesen, (welche allerdings nur für *ungerade* Werthe von n hergeleitet wurde und) welche jetzt die Form

$$(40)\qquad D = (-1)^{\frac{(n-1)(n-3)}{8}} \frac{Q^{n(n-3)}(\varpi, \varpi')}{Q^{n-3}\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}$$

annimmt. Dabei ist D die Discriminante von

$$P(s) = s^m - G_1 s^{m-1} + G_2 s^{m-2} - \cdots \pm G_m = 0,$$

während $Q^{24}(\varpi, \varpi')$ und $Q^{24}\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)$ bez. die Discriminanten der Gleichungen

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0 \quad \text{und} \quad 4\bar{\wp}^3 - \bar{g}_2\bar{\wp} - \bar{g}_3 = 0$$

sind.

III. Nach Gleichung (26) war

$$(41)\qquad \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right) = \frac{\sigma_{(\beta-\alpha)p,\,(\beta-\alpha)q}\;\sigma_{(\beta+\alpha)p,\,(\beta+\alpha)q}}{\sigma^2_{\alpha p,\,\alpha q}\;\sigma^2_{\beta p,\,\beta q}}.$$

---

*) Herr H. A. Schwarz bezeichnet in seiner oben citirten Formelsammlung die Grösse $g_2^3 - 27g_3^2$ mit $16G$. Von dieser Bezeichnung konnte ich keinen Gebrauch machen, weil hier fortgesetzt die 24[te] Wurzel aus $g_2^3 - 27g_3^2$ vorkommt, wobei der Factor $\sqrt[6]{2}$ sehr lästig sein würde.

Setzt man in dieser Gleichung $\beta = 2\alpha$, so wird

$$(42)\qquad \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right) = \frac{\sigma_{3\alpha p,\, 3\alpha q}}{\sigma_{\alpha p,\, \alpha q}\, \sigma^2_{2\alpha p,\, 2\alpha q}}.$$

Hat nun $n = 2m + 1$ die Form $6l \pm 1$, so ist wegen der Relationen (25)

$$(43)\qquad \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{2\alpha p,\, 2\alpha q} = \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{\alpha p,\, \alpha q} \quad \text{und} \quad \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{3\alpha p,\, 3\alpha q} = (-1)^l \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{\alpha p,\, \alpha q},$$

folglich wird

$$(44)\qquad \prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)\right] = \frac{(-1)^l}{\prod\limits_{\alpha=1}^{m} \sigma^2_{\alpha p,\, \alpha q}} = (-1)^l f^{-2}.$$

Von dieser Darstellung der Grösse f war ich in Abh. 1 ausgegangen.

Setzt man in Gleichung (41) $\beta = 3\alpha$, so wird

$$\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{6\alpha\varpi}{n}\right) = \frac{\sigma_{2\alpha p,\, 2\alpha q}\, \sigma_{4\alpha p,\, 4\alpha q}}{\sigma^2_{\alpha p,\, \alpha q}\, \sigma^2_{3\alpha p,\, 3\alpha q}}.$$

Da nun

$$\prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{4\alpha p,\, 4\alpha q} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{\alpha p,\, \alpha q}$$

ist, so wird

$$(45)\qquad \prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{6\alpha\varpi}{n}\right)\right] = \frac{(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}}{\prod\limits_{\alpha=1}^{m} \sigma^2_{\alpha p,\, \alpha q}} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} f^{-2}.$$

In dieser Weise kann man fortfahren, indem man nach einander $\beta = 4\alpha,\ 5\alpha, \ldots$ setzt und $\prod\limits_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\alpha\varkappa\varpi}{n}\right)\right]$ bildet. Diese Producte werden allerdings nur gleich $\pm f^{-2}$, wenn die Zahlen $\varkappa - 1$, $\varkappa$, $\varkappa + 1$ zu n relativ prim sind. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so erhält man Grössen, welche von $\pm f^2$ verschieden sind, auf welche ich aber schon jetzt die Aufmerksamkeit lenken möchte, weil sie gleichfalls bei der Transformation der elliptischen Functionen noch nützliche Verwendung finden sollen. Auch die Ausdrücke von der Form

$$\prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varkappa\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\alpha\lambda\varpi}{n}\right)\right]$$

sind zu beachten.

IV. Aus der Gleichung

$$\wp' u\, \wp' v = [\wp(v-u) - \wp(v+u)]\, (\wp u - \wp v)^2$$

folgt

$$\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\wp'\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)=\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{6\alpha\varpi}{n}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)\right]^2.$$

Deshalb ist nach den Gleichungen (44) und (45), (die aber nur für $n=6l\pm 1$ gelten),

$$\prod_{\alpha=1}^{m}\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\wp'\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}f^{-6},$$

da ferner

$$\prod_{\alpha=1}^{m}\wp'\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\prod_{\alpha=1}^{m}\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right),$$

so wird

$$\prod_{\alpha=1}^{m}\wp'^2\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)=f^{-6}$$

und

$$(46)\qquad \prod_{\alpha=1}^{m}\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)=(-1)^m f^{-3}.$$

Die Bestimmung des Zeichens ergiebt sich leicht aus dem speciellen Falle, wo ϖ reell und $\varpi'=i\varpi$ ist; dann sind nämlich die Grössen $\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$ sämmtlich negativ, während f positiv ist.*)

V. Aus den Gleichungen (44) und (46) findet man schliesslich

$$(47)\qquad f=(-1)^{l+m}\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)}{\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)},$$

eine Formel, welche zeigt, dass f eine *rationale* Function der Grössen $\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$ und $\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$, also auch der Grössen $\wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right)$ und $\wp'\left(\frac{2\varpi}{n}\right)$ ist.

*) Ich habe hier diejenige Herleitung der Gleichung (46) benutzt, welche mir seit beinahe 7 Jahren bekannt ist. Inzwischen hat aber Herr Klein in seiner oben citirten Abhandlung die folgende einfachere Entwickelung dieser Formel mitgetheilt. Es ist

$$\wp' u=-\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4 u},$$

also

$$\wp'\left(u-\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)=-\frac{\sigma_{2\alpha p,\,2\alpha q}(2u)}{\sigma^4_{\alpha p,\,\alpha q}(u)},$$

folglich wird

$$\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)=\frac{\sigma_{2\alpha p,\,2\alpha q}}{\sigma^4_{\alpha p,\,\alpha q}},\quad \prod_{\alpha=1}^{m}\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)=\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{1}{\sigma^3_{\alpha p,\,\alpha q}}=(-1)^m f^{-3}.$$

Die Formel (46) gilt also immer, wenn $n=2m+1$ ist.

§ 8.

Herleitung einer fundamentalen partiellen Differentialgleichung.

Die Grösse f oder $f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)$ ist nur deshalb als Hülfsgrösse bei der Transformation der elliptischen Functionen verwendbar, weil sich alle übrigen Grössen, welche man bei der Darstellung von $\bar{\wp} u$ braucht, als *rationale* Functionen von f ausdrücken lassen. Zu diesem Zwecke muss zunächst eine partielle Differentialgleichung hergeleitet werden, aus der dann die vollständige Darstellung jener Grössen folgt.

Es sei nun (vergl. die Formelsammlung von Herrn Schwarz, S. 41, Gl. (7))

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(v \mid \tau) = 2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4}} \sin(2\lambda+1) v\pi, \tag{48}$$

wo

$$v = \frac{u}{2\varpi}, \quad \tau = \frac{\varpi'}{\varpi}, \quad h = e^{\tau\pi i}$$

sein möge. Aus dieser Definition folgt unmittelbar die partielle Differentialgleichung

$$4\pi i \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial v^2}, \tag{49}$$

oder, wenn man die drei Grössen u, ϖ, ϖ' als die unabhängigen Veränderlichen ansieht,

$$\pi i \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varpi'} = \varpi \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial u^2}, \tag{50}$$

eine Gleichung, der noch die Homogeneitätsbedingung

$$\varpi \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varpi} + \varpi' \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varpi'} + u \frac{\partial \vartheta_1}{\partial u} = 0 \tag{51}$$

hinzuzufügen ist. Durch Transformation n^{ten} Grades treten $\bar{\vartheta}_1$, $\bar{\sigma} u$, $\bar{Q}$, $\frac{\varpi}{n}$, h^n, $\bar{\tilde{\eta}}$ an die Stelle von ϑ_1, σu, Q, ϖ, h, $\tilde{\eta}$, und die Gleichung (50) geht für jedes beliebige n über in

$$n\pi i \frac{\partial \bar{\vartheta}_1}{\partial \varpi'} = \varpi \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}_1}{\partial u^2}. \tag{52}$$

Nun ist aber

$$\vartheta_1 = \left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} Q^3 e^{-\frac{\tilde{\eta} u^2}{2\tilde{\omega}}} \sigma u, \quad \bar{\vartheta}_1 = \left(\frac{\varpi}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{Q}^3 e^{-\frac{n \bar{\tilde{\eta}} u^2}{2\tilde{\omega}}} \bar{\sigma} u,$$

wobei, wie aus den Gleichungen (16a) und (16b) folgt,

$$n\left(\bar{\tilde{\eta}} - \tilde{\eta}\right) = B_1 \varpi \tag{53}$$

ist. Wenn man also die Function S durch die Gleichung

$$S = f^3 e^{-\frac{1}{2} B_1 u^2} \frac{\bar{\sigma} u}{\sigma^n u} \tag{54}$$

definirt und in die vorhergehenden Gleichungen einführt, so wird durch passende Anwendung der Gleichungen (50) und (52)

$$\bar{\vartheta}_1 = \left(\frac{\pi}{\varpi}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1^n}{\sqrt{n}} S \tag{55}$$

und

$$n\pi i \, \vartheta_1^{\,2} \frac{\partial S}{\partial \varpi'} = \varpi \left[n(n-1) S \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial u}\right)^2 + 2n\vartheta_1 \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial u} \right.$$
$$\left. - n(n-1) \vartheta_1 S \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial u^2} + \vartheta_1^{\,2} \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} \right],$$

oder

$$\frac{n\pi i}{\varpi} \frac{\partial S}{\partial \varpi'} = 2n \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial \lg \vartheta_1}{\partial u} - n(n-1) S \frac{\partial^2 \lg \vartheta_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial u^2}. \tag{56}$$

Nun folgt aber aus

$$\vartheta_1 = \left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} Q^3 e^{-\frac{\widetilde{\eta} u^2}{2\varpi}} \sigma u$$

$$\frac{\partial \lg \vartheta_1}{\partial u} = -\frac{\widetilde{\eta} u}{\varpi} + \frac{\sigma' u}{\sigma u}, \qquad \frac{\partial^2 \lg \vartheta_1}{\partial u^2} = -\frac{\widetilde{\eta}}{\varpi} - \wp u,$$

so dass Gleichung (56) übergeht in

$$\frac{n\pi i}{\varpi} \frac{\partial S}{\partial \varpi'} = \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} + 2n \frac{\partial S}{\partial u}\left(-\frac{\widetilde{\eta} u}{\varpi} + \frac{\sigma' u}{\sigma u}\right) + n(n-1) S \left(\frac{\widetilde{\eta}}{\varpi} + \wp u\right). \tag{57}$$

S ist hierbei als eine Function von u, ϖ, ϖ' betrachtet, man kann aber auch S als eine Function von $\wp u = s$, g_2 und g_3 ansehen. Die Formeln, welche man bei dem Uebergange von der einen Auffassung zu der anderen braucht, findet man in der Abhandlung der Herren Frobenius und Stickelberger: „*Ueber die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten*“ (Journal für Mathematik, Bd. 92, S. 311—327). Dieser Arbeit entnehme ich die Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial \varpi'} = \dfrac{2\varpi}{\pi i}\left(2s^2 - \dfrac{1}{3} g_2 + s' \dfrac{\sigma' u}{\sigma u}\right) - \dfrac{2\widetilde{\eta}}{\pi i}(2s - us'), \\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial \varpi'} = -\dfrac{8\widetilde{\eta}}{\pi i} g_2 + \dfrac{12\varpi}{\pi i} g_3, \quad \dfrac{\partial g_3}{\partial \varpi'} = -\dfrac{12\widetilde{\eta}}{\pi i} g_3 + \dfrac{2\varpi}{3\pi i} g_2^{\,2}, \end{cases} \tag{58}$$

wobei also s statt $\wp u$ und s' statt $\wp' u$ geschrieben ist. Dadurch erhält man

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \varpi'} = \dfrac{\partial S}{\partial s} \dfrac{\partial s}{\partial \varpi'} + \dfrac{\partial S}{\partial g_2} \dfrac{\partial g_2}{\partial \varpi'} + \dfrac{\partial S}{\partial g_3} \dfrac{\partial g_3}{\partial \varpi'} \\[2ex] \quad = \dfrac{2\varpi}{\pi i}\left[\dfrac{\partial S}{\partial s}\left(2s^2 - \dfrac{1}{3} g_2 + s' \dfrac{\sigma' u}{\sigma u}\right) + 6 g_3 \dfrac{\partial S}{\partial g_2} + \dfrac{1}{3} g_2^{\,2} \dfrac{\partial S}{\partial g_3}\right] \\[2ex] \quad - \dfrac{2\widetilde{\eta}}{\pi i}\left[\dfrac{\partial S}{\partial s}(2s - us') + 4g_2 \dfrac{\partial S}{\partial g_2} + 6 g_3 \dfrac{\partial S}{\partial g_3}\right]. \end{cases} \tag{59}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \frac{\partial S}{\partial s}\, s', \quad \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial s^2}\, s'^2 + \frac{\partial S}{\partial s}\left(6 s^2 - \frac{1}{2}\, g_2\right).$$

Wenn man ausser diesen Relationen berücksichtigt, dass S in Bezug auf die Veränderlichen s, g_2, g_3 in dem Sinne als eine homogene Function vom Grade $-\frac{n-1}{4}$ angesehen werden kann, dass s von der ersten, g_2 von der zweiten, g_3 von der dritten Dimension ist, so findet man

$$(60) \qquad s\,\frac{\partial S}{\partial s} + 2 g_2\,\frac{\partial S}{\partial g_2} + 3 g_3\,\frac{\partial S}{\partial g_3} + \frac{n-1}{4}\, S = 0.$$

Durch diese Relationen geht Gleichung (57) über in

$$(61) \quad \begin{cases} s'^2\,\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} + \left[(6-4n)s^2 - \frac{1}{6}(3-4n)\, g_2\right] \frac{\partial S}{\partial s} - 12\, n g_3\,\frac{\partial S}{\partial g_2} \\ \qquad\qquad - \frac{2n}{3}\, g_2{}^2\,\frac{\partial S}{\partial g_3} + n(n-1)\, sS = 0. \end{cases}$$

Diese Differentialgleichung kann noch etwas einfacher geschrieben werden, wenn man eine von den Herren Frobenius und Stickelberger (in der oben citirten Abhandlung) eingeführte Bezeichnung benutzt. Es sei nämlich D das durch die Gleichung

$$(62) \qquad D(\varphi) = 18 g_3\,\frac{\partial \varphi}{\partial g_2} + g_2{}^2\,\frac{\partial \varphi}{\partial g_3}$$

definirte Operationssymbol; dann erhält man aus Gleichung (61)

$$(61\text{a}) \quad \begin{cases} 6(4s^3 - g_2\, s - g_3)\,\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} + [12(3-2n)s^2 - (3-4n)g_2]\,\frac{\partial S}{\partial s} \\ \qquad\qquad - 4nD(S) + 6n(n-1)\, sS = 0. \end{cases}$$

In etwas anderer Form findet sich diese fundamentale Differentialgleichung bereits in meiner zweiten Abhandlung über die Transformation der elliptischen Functionen (S. 209, Gl. (15)). Dort ist aber die Function S durch eine Function

$$L = Q^{n-1} S$$

ersetzt, welche in dem oben angedeuteten Sinne in Bezug auf s, g_2, g_3 eine homogene Function 0^{ter} Ordnung ist. Dem entsprechend sind dort auch die Grössen q, γ_2, γ_3 durch die Gleichungen

$$s = Q^4 q, \quad g_2 = Q^8 \gamma_2, \quad g_3 = Q^{12} \gamma_3, \quad \gamma_2{}^3 - 27\gamma_3{}^2 = 1$$

eingeführt, damit die vorkommenden Grössen sämmtlich von der 0^{ten} Ordnung sind, so dass man es thatsächlich nur mit *zwei* Veränderlichen q und γ_2 zu thun hat. Diese Modification ist aber deshalb eine unwesentliche, weil

$$(63) \qquad D(\Delta) = D(Q^{24}) = D(g_2{}^3 - 27 g_3{}^2) = 0,$$

so dass bei Benutzung des Operationssymbols D die Grösse Q wie eine Constante behandelt werden darf.

Ist ferner F eine homogene Function 0^{ter} Ordnung von g_2 und g_3, so findet man ausserdem

$$D(F) = 18\gamma_3 Q^4 \frac{dF}{d\gamma_2} = \gamma_2{}^2 Q^4 \frac{dF}{d\gamma_3}. \tag{64}$$

Wenn man also die Gleichung (61a) mit Q^{n-5} multiplicirt, so geht sie in die Form über, welche ich in Abh. 2 mitgetheilt habe, nämlich in

$$\text{(61 b)}\left\{\begin{aligned} &6(4q^3-\gamma_2 q-\gamma_3)\frac{\partial^2 L}{\partial q^2}+[12(3-2n)q^2-(3-4n)\gamma_2]\frac{\partial L}{\partial q}\\ &\qquad -72n\gamma_3\frac{\partial L}{\partial \gamma_2}+6n(n-1)qL=0.\end{aligned}\right.$$

Nachher haben auch die Herren Frobenius und Stickelberger am Schluss ihrer oben citirten Abhandlung die entsprechende Differentialgleichung für die Function $B=f^{-3}S$ angegeben und schliesslich hat auch Herr Klein neuerdings (vergl. die wiederholt genannte Abhandlung) gefunden, dass seine Function $\varrho = \frac{X_{\alpha}(u)}{\sigma^n u}$, welche für $\alpha = 0$, $p=1$, $q=0$, $p'=0$, $q'=1$ gleich S wird, auch dann noch der Gleichung (61) genügt, wenn α einen der Werthe $0, 1, 2, \ldots n-1$ hat. Dabei beschränkt sich aber Herr Klein auf den Fall, wo n *ungerade* ist. Im Uebrigen ist die Function ϱ nur scheinbar allgemeiner als S, weil S eine Function der Grösse ϖ ist, welche noch die beiden beliebigen Zahlen p und q enthält, während bei den Herren Frobenius, Stickelberger und Klein nur der Fall $\varpi=\omega$, $\varpi'=\omega'$ in Frage kommt.

§ 9.

Darstellung der Grössen $G_1, G_2, \ldots G_m$ als rationale Functionen von f.

Die Gleichung (61 a) gilt für alle Werthe von s; daher müssen in der Entwickelung nach Potenzen von s die einzelnen Coefficienten gleich Null sein.

Unterscheidet man zunächst zwei Fälle, je nachdem n *ungerade oder gerade* ist, so wird nach Gleichung (17a) für $n=2m+1$

$$S = f^3(s^m - G_1 s^{m-1} + \cdots \pm G_m) = \sum_{\alpha=0}^{m}(-1)^{\alpha} f^3 G_{\alpha} s^{m-\alpha}. \tag{64}$$

Hierbei ist natürlich $G_0 = 1$, während die Grössen G, welche in den folgenden Formeln mit negativem Index auftreten, gleich Null zu setzen sind. Indem man diese Entwickelung von S in die Gleichung

(61 a) einführt und den Coefficienten von $(-1)^\alpha s^{m-\alpha+1}$ gleich Null setzt, erhält man

$$(65)\quad \begin{cases} 24\alpha(2\alpha+1)G_\alpha + 8nD(G_{\alpha-1}) + (n-2\alpha+3)[(n+6\alpha-6)g_2 G_{\alpha-2} \\ \qquad + 3(n-2\alpha+5)g_3 G_{\alpha-3}] + 24nG_{\alpha-1}D(\lg f) = 0. \end{cases}$$

Für $\alpha = 1$ ergiebt sich hieraus

$$(66)\qquad 3G_1 + nD(\lg f) = 0,$$

und wenn man dies in die vorige Gleichung einsetzt,

$$(65a)\quad \begin{cases} 24\alpha(2\alpha+1)G_\alpha - 72G_1 G_{\alpha-1} + 8nD(G_{\alpha-1}) \\ + (n-2\alpha+3)[(n+6\alpha-6)g_2 G_{\alpha-2} + 3(n-2\alpha+5)g_3 G_{\alpha-3}] = 0. \end{cases}$$

So findet man für $\alpha = 2, 3, 4, \ldots$ bez. die Gleichungen

$$(67)\quad \begin{cases} 240G_2 - 72G_1^2 + 8nD(G_1) + (n-1)(n+6)g_2 = 0, \\ 504G_3 - 72G_1G_2 + 8nD(G_2) + (n-3)[(n+12)g_2G_1 \\ \qquad\qquad + 3(n-1)g_3] = 0, \\ 864G_4 - 72G_1G_3 + 8nD(G_3) + (n-5)[(n+18)g_2G_2 \\ \qquad\qquad + 3(n-3)g_3G_1] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Für $n = 2m + 2$ wird nach Gleichung (17b)

$$(68)\qquad S = f^3\sqrt{s-e_\lambda}\,(s^m - G_1 s^{m-1} + \cdots \pm G_m)$$
$$= \sqrt{s-e_\lambda}\sum_{\alpha=0}^{m}(-1)^\alpha f^3 G_\alpha s^{m-\alpha}.$$

Wenn man diesen Ausdruck in die Gleichung (61a) einsetzt, so hat man zu beachten, dass wegen der Gleichung $4e_\lambda^3 - g_2 e_\lambda - g_3 = 0$

$$(69)\qquad D(e_\lambda) = \frac{18g_3e_\lambda + g_2^2}{12e_\lambda^2 - g_2} = 6e_\lambda^2 - g_2$$

wird. Indem man dann die Gleichung (61a) mit $4(s-e_\lambda)^{\frac{3}{2}}$ multiplicirt, nach Potenzen von s entwickelt und den Coefficienten von $-s^{m+2}$ gleich Null setzt, erhält man zunächst

$$(70)\qquad 3(2G_1 + e_\lambda) + 2nD(\lg f) = 0.$$

Setzt man jetzt den Coefficienten von $(-1)^\alpha s^{m-\alpha+3}$ gleich Null, so wird mit Rücksicht auf Gleichung (70)

$$(71)\quad \begin{cases} 24\alpha(2\alpha+1)G_\alpha + 24[-3G_1 + 4\alpha(\alpha-1)e_\lambda]G_{\alpha-1} \\ \quad + [-144 e_\lambda G_1 + 24(n+2\alpha^2-5\alpha)e_\lambda^2 + (n^2+4\alpha n - 12\alpha^2 - 7n \\ \qquad\qquad + 30\alpha - 18)g_2]G_{\alpha-2} \\ \quad + [-72 e_\lambda^2 G_1 + 2(n^2+4\alpha n - 12\alpha^2 - 5n + 48\alpha - 54)g_2 e_\lambda \\ \qquad\qquad + 3(n^2 - 4\alpha n + 4\alpha^2 + 10n - 16\alpha + 12)g_3]G_{\alpha-3} \\ \quad + (n-2\alpha+6)\{[(n+6\alpha-15)g_2 e_\lambda^2 + 6(n-2\alpha+5)g_3 e_\lambda]G_{\alpha-4} \\ \qquad\qquad + 3(n-2\alpha+8)g_3 e_\lambda^2 G_{\alpha-5}\} \\ \quad + 8n[(D(G_{\alpha-1}) + 2e_\lambda D(G_{\alpha-2}) + e_\lambda^2 D(G_{\alpha-3})] = 0. \end{cases}$$

Hieraus findet man für $\alpha = 2, 3, 4, \ldots$

$$(72)\quad \begin{cases} 240 G_2 - 72 G_1^2 + 48 e_\lambda G_1 + 8n D(G_1) \\ \qquad\qquad + (n-2)[24 e_\lambda^2 + (n+3)g_2] = 0, \\ 504 G_3 - 72 G_1 G_2 + 96 e_\lambda G_2 + 8n D(G_2) \\ \qquad\qquad + (n-4[24 e_\lambda^2 G_1 + (n+9)g_2 G_1 + 3(n-2)g_3] = 0, \\ 864 G_4 - 72 G_1 G_3 + 144 e_\lambda G_3 + 8n D(G_3) \\ \qquad\qquad + (n-6)[24 e_\lambda^2 G_2 + (n+15)g_2 G_2 + 3(n-4)g_3 G_1] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Man kann aber auch beide Fälle vereinigen, indem man

$$(73)\qquad S^2 = f^6(s^{n-1} - B_1 s^{n-2} + B_2 s^{n-3} - \cdots \pm B_{n-1})$$

setzt, wobei also für $n = 2m+1$

$$B_1 = 2G_1,\quad B_2 = 2G_2 + G_1^2,\quad B_3 = 2G_3 + 2G_1G_2, \ldots$$

wird, während für $n = 2m+2$

$$B_1 = 2G_1 + e_\lambda,\quad B_2 = 2G_2 + G_1^2 + 2e_\lambda G_1,$$
$$B_3 = 2G_3 + 2G_1G_2 + e_\lambda(2G_2 + G_1^2), \ldots$$

ist. Dadurch gehen die Gleichungen (66), (67) und ebenso die Gleichungen (70), (72) über in

$$(74)\quad \begin{cases} 3B_1 + 2n D(\lg f) = 0, \\ 120 B_2 - 48 B_1^2 + 4n D(B_1) + (n-1)(n+6)g_2 = 0, \\ 252 B_3 - 84 B_1 B_2 + 12 B_1^3 + 4n D(B_2) + (n^2+7n-21)g_2 B_1 \\ \qquad\qquad + 3(n^2-4n+3)g_3 = 0, \\ 432 B_4 - 108 B_1 B_3 - 48 B_2^2 + 60 B_1^2 B_2 - 12 B_1^4 + 4n D(B_3) \\ \qquad + (n^2+9n-48)g_2 B_2 + 3g_2 B_1^2 + 3(n^2-6n+9)g_3 B_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Noch einfacher werden diese Differentialgleichungen, wenn man die Grössen $G_1, G_2, \ldots; B_1, B_2, \ldots$, die ja in dem oben angegebenen

Sinne homogene Functionen von g_2 und g_3 sind, durch andere Grössen ersetzt, so dass man es nur mit homogenen Functionen 0^{ten} Grades von g_2 und g_3 zu thun hat; d. h. es werden dann alle Grössen Functionen einer *einzigen* Veränderlichen

$$\gamma_2 = \frac{g_2}{Q^8} \quad \text{oder} \quad \gamma_3 = \frac{g_3}{Q^{12}}.$$

Zu diesem Zwecke setze man

$$Q^{3n-3} f^3 = \left(\frac{\bar{Q}}{Q}\right)^3 = \Gamma, \quad \Gamma G_\alpha = Q^{4\alpha} \Gamma_\alpha \tag{75}$$

und bezeichne der Kürze wegen die Ableitungen nach γ_2 durch Accente. Dadurch gehen z. B. die Gleichungen (66) und (67) über in

$$\left\{\begin{array}{l} \Gamma_1 + 2n\gamma_3 \Gamma' = 0, \\ 240\Gamma_2 + 144n\gamma_3\Gamma_1' + (n-1)(n+6)\gamma_2\Gamma = 0, \\ 504\Gamma_3 + 144n\gamma_3\Gamma_2' + (n-3)[(n+12)\gamma_2\Gamma_1 + 3(n-1)\gamma_3\Gamma] = 0, \\ 864\Gamma_4 + 144n\gamma_3\Gamma_3' + (n-5)[(n+18)\gamma_2\Gamma_2 + 3(n-3)\gamma_3\Gamma_1] = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 24\alpha(2\alpha+1)\Gamma_\alpha + 144n\gamma_3\Gamma'_{\alpha-1} + (n-2\alpha+3)[(n+6\alpha-6)\gamma_2\Gamma_{\alpha-2} \\ \qquad\qquad + 3(n-2\alpha+5)\gamma_3\Gamma_{\alpha-3}] = 0. \end{array}\right. \tag{76}$$

Diese Gleichungen, welche sich übrigens schon in Abh. 2 finden, besitzen den Vorzug, dass sie *linear* und *homogen* sind in Bezug auf die 4 Grössen Γ_α, $\Gamma'_{\alpha-1}$, $\Gamma_{\alpha-2}$, $\Gamma_{\alpha-3}$. Daraus folgt dann auch, dass Γ_α eine *lineare*, *homogene* Function von $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \ldots, \Gamma^{(\alpha)}$ ist. Beachtet man jetzt noch, dass Γ_α gleich Null ist, sobald α grösser wird als m, so liefert die Darstellung von Γ_{m+1} *eine lineare*, *homogene Differentialgleichung* $(m+1)^{\text{ter}}$ *Ordnung für die Grösse* Γ.

In den folgenden Abschnitten wird nun noch gezeigt werden, dass immer eine Gleichung zwischen f, g_2 und g_3 besteht, welche hier kurz die *f-Gleichung* genannt werden möge. Aus dieser f-Gleichung findet man also $D(\lg f)$ und somit ist es durch Benutzung der vorstehenden Differentialgleichungen leicht möglich, $G_1, G_2, \ldots$ oder $B_1, B_2, \ldots$ als *rationale* Functionen von f, g_2 und g_3 darzustellen.

§ 10.

Berechnung der Invarianten $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ der transformirten Function $\wp u$.

Es ist für jeden Werth von n

$$\wp u = u^{-2} + \frac{1}{20} g_2 u^2 + \frac{1}{28} g_3 u^4 + \cdots,$$

$$\bar{\wp} u = u^{-2} + \frac{1}{20} \bar{g}_2 u^2 + \frac{1}{28} \bar{g}_3 u^4 + \cdots$$

Andererseits ist

$$\bar{\wp} u = \wp u + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\left[\wp\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right]$$

$$= u^{-2} + \left[\frac{1}{20}\, g_2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n-1}\wp''\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right] u^2$$

$$+ \left[\frac{1}{28}\, g_3 + \frac{1}{24}\sum_{\alpha=1}^{n-1}\wp''''\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right] u^4 + \cdots.$$

Da nun

$$\wp'' u = 6\wp^2 u - \frac{1}{2}\, g_2, \quad \wp'''' u = 120\wp^3 u - 18 g_2 \wp u - 12 g_3$$

ist, so folgt aus den beiden Entwickelungen von $\bar{\wp} u$

$$\bar{g}_2 = 60\sum_{\alpha=1}^{n-1}\wp^2\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - (5n-6)\, g_2,$$

$$\bar{g}_3 = 140\sum_{\alpha=1}^{n-1}\wp^3\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - 21 g_2 \sum_{\alpha=1}^{n-1}\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - (14n-15) g_3;$$

hierbei ist aber

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = B_1, \quad \sum_{\alpha=1}^{n-1}\wp^2\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = B_1^2 - 2B_2,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\wp^3\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = B_1^3 - 3B_1B_2 + 3B_3,$$

folglich wird

(77) $\bar{g}_2 = -120 B_2 + 60 B_1^2 - (5n-6) g_2,$

(78) $\bar{g}_3 = 420 B_3 - 420 B_1 B_2 + 140 B_1^3 - 21 g_2 B_1 - (14n-15) g_3.$

Da in dem vorigen Paragraphen angegeben wurde, wie man die Grössen B_1, B_2, B_3 findet, so folgt jetzt aus den Gleichungen (77) und (78) auch die Berechnung von $\bar{g}_2$ und $\bar{g}_3$.

Man kann aber für $\bar{g}_2$ und $\bar{g}_3$ Formeln geben, welche für die numerische Berechnung noch geeigneter sind. Aus den Gleichungen (74) folgt nämlich

$$3B_1 = nD(\lg f^{-2}) = nf^2 D(f^{-2}),$$

$$3nD(B_1) = -9B_1^2 + n^2 f^2 D^2(f^{-2}),$$

also

$$120 B_2 - 60 B_1^2 + (n^2 + 5n - 6) g_2 + \frac{4}{3}\, n^2 f^2 D^2(f^{-2}) = 0,$$

oder

(77 a) $$\bar{g}_2 - n^2 g_2 = \frac{4}{3} n^2 f^2 D^2(f^{-2}).$$

Ferner folgt aus Gleichung (77)

$$\frac{n}{9} f^8 D(f^{-8}\bar{g}_2) = 840 B_3 - 840 B_1 B_2 + 280 B_1^3 - 42 g_2 B_1 - (28n - 30) g_3,$$

deshalb geht Gleichung (78) über in

(78 a) $$\bar{g}_3 = \frac{n}{18} f^8 D(f^{-8}\bar{g}_2).$$

Eine andere Form dieser Gleichungen (77 a) und (78 a) findet man, indem man

$$f^{-2} = \frac{Q^{2n}}{\bar{Q}^2} = Q^{2n-2}\xi$$

setzt; dann wird nach Gleichung (64)

$$D(f^{-2}) = 18\gamma_3\, Q^{2n+2} \frac{d\xi}{d\gamma_2} = 18\gamma_3 Q^{2n+2}\xi',$$

$$D^2(f^{-2}) = 324\gamma_3 Q^{2n+6} \frac{d(\gamma_3\xi')}{d\gamma_2},$$

$$\bar{g}_2 - n^2 g_2 = 432 n^2 \gamma_3 Q^8 \xi^{-1} \frac{d(\gamma_3\xi')}{d\gamma_2},$$

(77 b) $$\bar{\gamma}_2 = n^2 \xi^3 \left(\gamma_2 \xi + 432 \frac{d(\gamma_3\xi')}{d\gamma_2}\right).$$

Ferner ist

$$f^{-8}\bar{g}_2 = Q^{8n}\bar{\gamma}_2, \quad D(f^{-8}\bar{g}_2) = 18\gamma_3 Q^{8n+4}\bar{\gamma}_2',$$

folglich wird

$$\bar{g}_3 = n\gamma_3 \bar{Q}^8 Q^4 \bar{\gamma}_2',$$

oder

(78 b) $$\bar{Q}^4 \bar{\gamma}_3 = n\gamma_3 Q^4 \bar{\gamma}_2'.$$

Wendet man diejenigen Bezeichnungen an, welche Herr Klein (Math. Annalen, Bd. XIV, S. 111—172) benutzt, so hat man zu setzen

$$\gamma_2^3 = J, \quad \gamma_3^2 = J - 1, \quad \bar{\gamma}_2^3 = J', \quad \bar{\gamma}_3^2 = J' - 1, \quad \bar{Q}^2 = n Q^2 M$$

und erhält dadurch aus Gleichung (78 b) die bereits bekannte Differentialgleichung

(79) $$M^2 = \frac{1}{n} \frac{dJ'}{dJ} \cdot \frac{J^{\frac{2}{3}} (J-1)^{\frac{1}{2}}}{J'^{\frac{2}{3}} (J'-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Abschnitt III.

Verhalten der Grösse $Q(\omega, \omega')$ bei einer linearen Transformation der Perioden.

§ 11.

Feststellung der Aufgabe.

Um die verschiedenen Werthe der Hülfsgrösse $f = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}{Q^n(\varpi, \varpi')}$ zu erhalten, welche den $T(n)$ verschiedenen Transformationen n^{ten} Grades entsprechen, ist es nur nöthig, der Grösse 2ϖ alle diejenigen Werthe zu ertheilen, welche nach § 5 die $T(n)$ verschiedenen Transformationen liefern.

Indem man nun beachtet, dass sich

$$Q^{24}(\omega, \omega') = \Delta(\omega, \omega') = g_2^3 - 27 g_3^2$$

gar nicht ändert, wenn man das primitive Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ mit dem äquivalenten Periodenpaar

$$2\varpi = 2p\omega + 2q\omega', \quad 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega' \qquad (pq' - p'q = +1)$$

vertauscht, findet man, dass

$$(80) \qquad Q(\varpi, \varpi') = \varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} Q(\omega, \omega')$$

sein muss, wobei $\varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix}$, oder kürzer ϱ, eine 24^{te} Wurzel der Einheit ist. Diese 24^{te} Wurzel der Einheit bildet ein Analogon zu den 8^{ten} Wurzeln der Einheit, welche bei der linearen Transformation der Θ-Functionen auftreten.

Man kann sie sogar auf die Bestimmung der letzteren zurückführen, indem man die 24^{te} Wurzel aus Δ mit der 8^{ten} Wurzel aus dieser Grösse durch Transformation dritter Ordnung in Verbindung setzt, wie dies bereits Jacobi in seinen Fundamenten gethan hat (s. Band I der ges. Werke, Seite 237).

Wenn ich trotzdem hier noch ausführlich ein Verfahren für die Lösung dieser Aufgabe angebe, welches dem auf die Θ-Function bezüglichen Hermite'schen nachgebildet ist*), und welches ich bereits vor 5 Jahren den Herren Weierstrass und Klein mitgetheilt habe, so geschieht dies, um das Verständniss der vorliegenden Untersuchungen von dem Studium anderer umfangreicher Abhandlungen unabhängig zu machen, namentlich aber, um die Resultate in derjenigen

*) Liouville's Journal, ser. 2, t. III, p. 26—36.

Form zu gewinnen, in welcher sie später von mir verwendet werden. Vielleicht bieten auch die Betrachtungen, welche zu meinen Resultaten führen, an und für sich einiges Interesse.*)

§ 12.

Definition der Function $\Phi(u)$.

Um das Verfahren von Herrn Hermite nachzubilden, werde eine Function $\Phi(u)$ benutzt, welche durch ihre Eigenschaften den Θ-Functionen sehr nahe steht. Diese Function werde definirt durch die Gleichung

$$(81)\qquad \Phi(u) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}} \cos\left((6\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}\right)^{**)},$$

welche ich bereits in Abh. 1, Gleichung (27) angegeben habe. Dort findet sich auch schon in Gleichung (31) die Relation

$$(82)\qquad \Phi(u) = \Delta^{\frac{1}{24}} e^{-\frac{3\eta u^2}{2\omega}} \sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u\,.$$

Hierdurch ist die Beziehung von $\Phi(u)$ zu den Functionen

$$(83)\qquad \begin{cases} \sigma_1 u = e^{-\eta u}\,\dfrac{\sigma(\omega+u)}{\sigma\omega} = e^{+\eta u}\,\dfrac{\sigma(\omega-u)}{\sigma\omega}, \\[2ex] \sigma_2 u = e^{-\eta'' u}\,\dfrac{\sigma(\omega''+u)}{\sigma\omega''} = e^{+\eta'' u}\,\dfrac{\sigma(\omega''-u)}{\sigma\omega''}, \\[2ex] \sigma_3 u = e^{-\eta' u}\,\dfrac{\sigma(\omega'+u)}{\sigma\omega'} = e^{+\eta' u}\,\dfrac{\sigma(\omega'-u)}{\sigma\omega'} \end{cases}$$

gegeben. Von der Richtigkeit der Relation (82) kann man sich entweder dadurch überzeugen, dass man die Werthe von u aufsucht, für welche $\Phi(u)$ verschwindet, oder man kann auch die drei Gleichungen

$$(84)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{2\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{e_2-e_3}\; e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma_1 u \\[2ex] \qquad = h^{\frac{1}{4}}(z+z^{-1}) \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})(1+h^{2\nu}z^2)(1+h^{2\nu}z^{-2}), \end{cases}$$

---

*) In der That ist auch von anderer Seite in neuerer Zeit der in Rede stehenden 24ten Einheitswurzel besonderes Interesse zugewandt worden. Herr Weber giebt in seiner oben citirten Abhandlung eine Bestimmung auf rein arithmetischem Wege, während Herr Molien (Berichte der k. sächs. Ges. d. Wiss. vom 12. Jan. 1885) die sogenannte Cauchy'sche Methode benutzt. In der Note des Herrn Molien finden sich auch noch weitere Literaturnachweise.

**) h hat hier den üblichen Werth $e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}$; dem entsprechend sei in dem Folgenden $z = e^{\frac{u\pi i}{2\omega}}$.

$$(84)\quad \begin{cases} \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{e_1-e_3}\, e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\, \sigma_2 u = \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})(1+h^{2\nu-1}z^2)(1+h^{2\nu-1}z^{-2}), \\ \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{e_1-e_2}\, e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\, \sigma_3 u = \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})(1-h^{2\nu-1}z^2)(1-h^{2\nu-1}z^{-2}) \end{cases}$$

mit einander multipliciren. Mit Rücksicht darauf, dass

$$\sqrt{2}\,\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_2} = \Delta^{\frac{1}{8}} = Q^3$$

ist, erhält man dann

$$(85)\qquad 2\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} Q^3 e^{-\frac{3\eta u^2}{2\omega}}\, \sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u$$

$$= h^{\frac{1}{4}}(z+z^{-1})\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^3(1+h^{2\nu}z^2)(1+h^{2\nu}z^{-2})(1-h^{4\nu-2}z^4)(1-h^{4\nu-2}z^{-4}).$$

Dividirt man diese Gleichung durch

$$2\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} Q^2 = 2\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{6}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^2,$$

so wird

$$(86)\qquad Q e^{-\frac{3\eta u^2}{2\omega}}\, \sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u$$

$$= \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{z+z^{-1}}{2} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})(1+h^{2\nu}z^2)(1+h^{2\nu}z^{-2})(1-h^{4\nu-2}z^4)(1-h^{4\nu-2}z^{-4}).$$

Der Kürze wegen möge der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung mit $F(z)$ bezeichnet werden. Es ist dann $F(z)$ eine *ungerade* Function von z, welche sich nicht ändert, wenn man z mit z^{-1} vertauscht. Indem man $F(z)$ nach steigenden und fallenden Potenzen von z entwickelt, kann man schreiben

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{2n+1}.$$

Zur Bestimmung der Coefficienten a_n bildet man $F(hz)$ und findet durch einige einfache Zwischenrechnungen

$$(87)\qquad F(z) = -h^3 z^6 F(hz),$$

oder

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^{2n+1} = -\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n h^{2n+4} z^{2n+7} = -\sum_{-\infty}^{+\infty} a_{n-3} h^{2n-2} z^{2n+1}.$$

Daraus folgt

$$(88) \qquad a_n = -\,a_{n-3}\,h^{2n-2}.$$

Da sich $F(z)$ nicht ändert, wenn man z mit z^{-1} vertauscht, so wird

$$(89) \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z^{2n+1} + z^{-2n-1}) = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\,(2n+1)\,\frac{u\pi}{2\omega}.$$

Setzt man nun

$$2a_0 = c_0 h^{\frac{1}{12}}, \quad 2a_1 = c_1 h^{\frac{9}{12}}, \quad 2a_2 = c_2 h^{\frac{25}{12}},$$

so wird nach Gleichung (88)

$$2a_{3\lambda} = (-1)^{\lambda}\,c_0\,h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}, \qquad 2a_{3\lambda+1} = (-1)^{\lambda}\,c_1\,h^{\frac{(6\lambda+3)^2}{12}},$$

$$2a_{3\lambda+2} = (-1)^{\lambda}\,c_2\,h^{\frac{(6\lambda+5)^2}{12}}.$$

Deshalb geht die Gleichung (89) über in

$$(90) \qquad \begin{cases} F(z) = c_0 \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}} \cos\Big((6\lambda+1)\,\frac{u\pi}{2\omega}\Big) \\ \qquad + c_1 \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+3)^2}{12}} \cos\Big((6\lambda+3)\,\frac{u\pi}{2\omega}\Big) \\ \qquad + c_2 \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+5)^2}{12}} \cos\Big((6\lambda+5)\,\frac{u\pi}{2\omega}\Big). \end{cases}$$

Dabei ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+5)^2}{12}} \cos\Big((6\lambda+5)\,\frac{u\pi}{2\omega}\Big)$$

$$= -\sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda-1)^2}{12}} \cos\Big((6\lambda-1)\,\frac{u\pi}{2\omega}\Big)$$

$$= -\sum_{\lambda=-1}^{-\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}} \cos\Big((6\lambda+1)\,\frac{u\pi}{2\omega}\Big);$$

ferner findet man aus der Gleichung

$$(86\text{a}) \qquad F(0) = Q = \Big(\frac{\pi}{\omega}\Big)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda}\,h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}$$

für die Grössen c_0, c_1, c_2 die Werthe

$$c_0 = \Big(\frac{\pi}{\omega}\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = -\Big(\frac{\pi}{\omega}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

folglich ist

$$F(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}} \cos\left((6\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}\right).$$

Damit ist die Richtigkeit der Relation (82) bewiesen.

Beachtet man noch, dass

$$\sigma_1 u \sigma_2 u \sigma_3 u = -\frac{1}{2}\wp' u \sigma^3 u,$$

so wird

$$\Phi(u \mid \omega, \omega') = \Phi(u) = -\frac{1}{2} Q e^{-\frac{3\eta u^2}{2\omega}} \wp' u \sigma^3 u \text{*)}. \tag{91}$$

§ 13.

Lineare Transformation der Function $\Phi(u \mid \omega, \omega')$.

Vertauscht man die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten

$$2\varpi = 2p\omega + 2q\omega', \quad 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega', \quad (pq' - p'q = +1),$$

so ändern sich die Functionen $\wp' u$ und σu bekanntlich gar nicht; es wird also nach Gleichung (80)

$$\Phi(u \mid \varpi, \varpi') = -\frac{1}{2}\varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} Q e^{-\frac{3\tilde{\eta} u^2}{2\tilde{\omega}}} \wp' u \sigma^3 u,$$

wobei

$$\tilde{\eta} = p\eta + q\eta',$$

$$\frac{\eta}{\omega} - \frac{\tilde{\eta}}{\varpi} = \frac{1}{\omega\varpi}\left[\eta(p\omega + q\omega') - (p\eta + q\eta')\,\omega\right] = \frac{q\pi i}{2\omega\varpi}$$

ist. Man erhält also

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(u \mid \varpi, \varpi') &= \varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} e^{\frac{3u^2}{2}\left(\frac{\eta}{\omega} - \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\omega}}\right)} \Phi(u \mid \omega, \omega') \\ &= \varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} e^{\frac{3qu^2\pi i}{4\omega\tilde{\omega}}} \Phi(u \mid \omega, \omega'), \end{aligned}\right. \tag{92}$$

oder, wenn man mit $2e^{-\frac{3qu^2\pi i}{4\omega\tilde{\omega}} - \frac{u\pi i}{2\omega}}$ multiplicirt,

---

*) Im Anschlusse an diese Formel und seine eigenen neueren Entwickelungen bemerkt mir Herr Klein, dass man setzen kann:

$$\Phi(u \mid \omega, \omega')$$
$$= \sqrt{\frac{3\pi}{\omega}} \cdot Q \cdot e^{\frac{3\eta u^2}{2\omega}} \left(h^{\frac{1}{3}} z^{-2} \vartheta_1\left(\frac{3u - 2\omega'}{2\omega}, h^3\right) - h^{\frac{4}{3}} z^{-4} \vartheta_1\left(\frac{3u - 4\omega'}{2\omega}, h^3\right)\right).$$

$$(93)\quad 2e^{-\frac{3qu^2\pi i}{4\omega\varpi}-\frac{u\pi i}{2\omega}}\,\Phi(u\,|\,\varpi,\varpi') = \varrho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix} e^{-\frac{u\pi i}{2\omega}}\,\Phi(u\,|\,\omega,\omega').$$

Der Kürze wegen mögen jetzt folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$(94)\quad \begin{cases} \varphi(u,\lambda) = -\dfrac{3qu^2}{4\omega\varpi} + \left(\dfrac{6\lambda+1}{2\varpi} - \dfrac{1}{2\omega}\right)u + \dfrac{(6\lambda+1)^2\varpi'}{12\varpi}, \\ \psi(u,\lambda) = -\dfrac{3qu^2}{4\omega\varpi} + \left(-\dfrac{6\lambda+1}{2\varpi} - \dfrac{1}{2\omega}\right)u + \dfrac{(6\lambda+1)^2\varpi'}{12\varpi}; \end{cases}$$

dann wird

$$\varphi(u+2\omega,\lambda) = \varphi(u,\lambda-q) + 6\lambda - 4qq' + q + (q+1)(q'-1).$$

Da nun q und q' nicht gleichzeitig *gerade* sein dürfen, so folgt hieraus

$$\varphi(u+2\omega,\lambda) \equiv \varphi(u,\lambda-q) + q \pmod{2},$$

und

$$\varphi(u+2n\omega,\lambda) \equiv \varphi(u,\lambda-nq) + nq \pmod{2}.$$

Dies giebt

$$(95)\quad e^{\pi i\varphi(u+2n\omega,\lambda)} = (-1)^{nq}\, e^{\pi i\varphi(u,\lambda-nq)}.$$

Ebenso findet man

$$(96)\quad e^{\pi i\psi(u+2n\omega,\lambda)} = (-1)^{nq}\, e^{\pi i\psi(u,\lambda+nq)}.$$

Macht man jetzt noch die Voraussetzung, dass q *positiv* ist, da (abgesehen von dem besonders zu behandelnden Falle $q=0$) alle übrigen Fälle auf diesen zurückgeführt werden können, und setzt man dann

$$(97)\quad \lambda = \mu q + \nu,$$

wo μ alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen möge, während ν nur die Werthe $0, 1, 2, \ldots q-1$ durchläuft, so wird durch Anwendung von Gleichung (95) und (96)

$$(98)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda e^{\pi i\varphi(u,\lambda)} = \sum\limits_{\nu=0}^{q-1}(-1)^\nu \sum\limits_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\varphi(u-2\mu\omega,\nu)}, \\ \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda e^{\pi i\psi(u,\lambda)} = \sum\limits_{\nu=0}^{q-1}(-1)^\nu \sum\limits_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\psi(u+2\mu\omega,\nu)}. \end{cases}$$

Durch diese Relationen kann man die Gleichung (93) umformen. Setzt man nämlich zunächst für $\Phi(u\,|\,\varpi,\varpi')$ und $\Phi(u\,|\,\omega,\omega')$ ihre Werthe nach Gleichung (81) ein, so wird

$$\left(\frac{\pi}{p\omega+q\omega'}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda\left[e^{\pi i\varphi(u,\lambda)} + e^{\pi i\psi(u,\lambda)}\right]$$

$$= \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \varrho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda e^{\frac{(6\lambda+1)^2\omega'\pi i}{12\omega}}\left(e^{\frac{6\lambda u\pi i}{2\omega}} + e^{-\frac{(6\lambda+2)u\pi i}{2\omega}}\right),$$

oder

$$(99)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\pi}{p\omega+q\omega'}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{\nu=0}^{q-1}(-1)^{\nu}\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left[e^{\pi i\varphi(u-2\mu\omega,\nu)}+e^{\pi i\psi(u+2\mu\omega,\nu)}\right]\\&=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\varrho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda}e^{\frac{(6\lambda+1)^2\omega'\pi i}{12\omega}}\left(e^{\frac{3\lambda u\pi i}{\omega}}+e^{-\frac{(3\lambda+1)u\pi i}{\omega}}\right).\end{aligned}\right.$$

Nun ist

$$\int_0^{2\omega}\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left[e^{\pi i\varphi(u-2\mu\omega,\nu)}+e^{\pi i\psi(u+2\mu\omega,\nu)}\right]du=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{\pi i\varphi(u,\nu)}+e^{\pi i\psi(u,\nu)}\right]du$$

und

$$\int_0^{2\omega}e^{\frac{3\lambda u\pi i}{2\omega}}\,du=\begin{cases}2\omega & \text{für } \lambda=0,\\ 0 & \;\;\text{,,}\;\; \lambda\gtrless 0;\end{cases}$$

$$\int_0^{2\omega}e^{-\frac{(3\lambda+1)u\pi i}{2\omega}}\,du=0;$$

deshalb folgt aus Gleichung (99) durch Integration zwischen den Grenzen 0 und 2ω

$$(100)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\pi}{p\omega+q\omega'}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{\nu=0}^{q-1}(-1)^{\nu}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{\pi i\varphi(u,\nu)}+e^{\pi i\psi(u,\nu)}\right]du\\&=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\varrho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix}h^{\frac{1}{12}}\,2\omega.\end{aligned}\right.$$

Nun ist nach **Cauchy** bekanntlich

$$(101)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2u^2-2abu+c}\,du=e^{b^2+c}\left(\frac{\pi}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

wenn die reellen Theile von a^2 und von $\left(\frac{\pi}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ *positiv* sind. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn man

$$a^2=\frac{3q\pi i}{4\omega\varpi},\quad 2ab=\left(\frac{1}{2\omega}-\frac{6\lambda+1}{2\varpi}\right)\pi i,\quad c=\frac{(6\lambda+1)^2\varpi'\pi i}{12\varpi}$$

setzt und der Einfachheit wegen annimmt, dass ω reell und $\omega'=i\omega$ ist; es ist dies eine Beschränkung, die auf den Werth von ϱ gar keinen Einfluss hat. Es wird dann nämlich

$$a^2 = \frac{3q\pi i}{4\omega^2(p+qi)} = \frac{3q\pi(q+pi)}{4\omega^2(p^2+q^2)},$$

$$b^2 + c = \frac{\omega'\pi i}{12\omega} + \frac{\pi i}{12q}\,[p - 2(6\lambda+1) + (6\lambda+1)^2 q'],$$

so dass die Gleichung (101) übergeht in

$$(102)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\varphi(u,\lambda)}\,du = h^{\frac{1}{12}}\, e^{\frac{\pi i}{12q}[p-2(6\lambda+1)+(6\lambda+1)^2 q']}\left(\frac{4\omega\varpi}{3qi}\right)^{\frac{1}{2}};$$

und dem entsprechend ist

$$(103)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\psi(u,\lambda)}\,du = h^{\frac{1}{12}}\, e^{\frac{\pi i}{12q}[p+2(6\lambda+1)+(6\lambda+1)^2 q']}\left(\frac{4\omega\varpi}{3qi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man dies in die Gleichung (100) ein, so erhält man

$$4\left(\frac{\pi}{\varpi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega\varpi}{3qi}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}}\, e^{\frac{p\pi i}{12q}} \sum_{\nu=0}^{q-1}(-1)^\nu e^{\frac{(6\nu+1)^2 q'\pi i}{12q}} \cos\left(\frac{6\nu+1}{6q}\pi\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q'\end{pmatrix} h^{\frac{1}{12}}\, 2\omega,$$

oder, wenn man die Bestimmung über die Vorzeichen gehörig berücksichtigt,

$$(104)\qquad \varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q'\end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3q}}\, e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}} \sum_{\nu=0}^{q-1}(-1)^\nu e^{\frac{(6\nu+1)^2 q'\pi i}{12q}} \cos\left(\frac{6\nu+1}{6q}\pi\right).$$

Ist $q=0$, so muss $p=\pm 1$, $q'=\pm 1$ sein. Dieser Fall muss, wie schon vorhin erwähnt wurde, besonders behandelt werden. Zunächst sei

$$p = +1,\quad q' = +1,\quad \text{also}\quad \varpi = \omega,\quad \varpi' = p'\omega + \omega',$$

dann ist

$$\varphi(u,\lambda) = +\frac{3\lambda u}{\omega} + \frac{(6\lambda+1)^2(p'\omega+\omega')}{12\omega},$$

$$\psi(u,\lambda) = -\frac{(3\lambda+1)u}{\omega} + \frac{(6\lambda+1)^2(p'\omega+\omega')}{12\omega}.$$

Deshalb wird für alle Werthe von λ, die von 0 verschieden sind,

$$\int_0^{2\omega} e^{\pi i\varphi(u,\lambda)}\,du = 0 \quad\text{und}\quad \int_0^{2\omega} e^{\pi i\varphi(u,0)}\,du = 2e^{\frac{p'\pi i}{12}}\, h^{\frac{1}{12}}\,\omega.$$

Dagegen ist für alle Werthe von λ

$$\int_0^{2\omega} e^{\pi i\psi(u,\lambda)}\,du = 0.$$

Wenn man also die Gleichung (99) zwischen den Grenzen 0 und 2ω integrirt, so erhält man

$$\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} 2\omega\, e^{\frac{p'\pi i}{12}}\, h^{\frac{1}{12}} = \varrho h^{\frac{1}{12}}\, 2\omega \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$\text{(105)} \qquad \varrho\begin{pmatrix}1, & 0\\ p', & 1\end{pmatrix} = e^{\frac{p'\pi i}{12}}.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$\text{(106)} \qquad \varrho\begin{pmatrix}-1, & 0\\ p', & -1\end{pmatrix} = e^{-\frac{(p'+6)\pi i}{12}}.$$

§ 14.

Zurückführung auf Gauss'sche Summen.

Aus der Gleichung (104) erkennt man noch nicht unmittelbar, dass ϱ eine 24[te] Wurzel der Einheit ist; deshalb soll jetzt eine Umformung des Ausdruckes für ϱ vorgenommen werden, welche auf Gauss'sche Summen führt.

Der Kürze wegen sei

$$\text{(107)} \qquad F(\nu) = e^{\frac{\pi i}{12q}[(6\nu+1)^2 q' + 12\nu q + 12\nu + 2]},$$

$$\text{(108)} \qquad G(\nu) = e^{\frac{\pi i}{12q}[(6\nu+1)^2 q' - 12\nu q - 12\nu - 2]};$$

dann geht Gleichung (104) über in

$$\text{(104a)} \qquad \varrho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3q}}\, e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}} \sum_{\nu=0}^{q-1} [F(\nu) + G(\nu)].$$

Nun wird aber

$$\text{(109)} \quad F(\mu+\nu) = F(\mu)\, e^{\frac{\nu\pi i}{q}[(6\mu+1)q' + 3\nu q' + q + 1]} = F(\nu)\, e^{\frac{\mu\pi i}{q}[(6\nu+1)q' + 3\mu q' + q + 1]},$$

$$\text{(110)} \quad G(\mu+\nu) = G(\mu)\, e^{\frac{\nu\pi i}{q}[(6\mu+1)q' + 3\nu q' - q - 1]} = G(\nu)\, e^{\frac{\mu\pi i}{q}[(6\nu+1)q' + 3\mu q' - q - 1]}.$$

Für $\mu = q$ folgt hieraus, weil $(q+1)(q' \pm 1)$ immer eine *gerade* Zahl sein muss,

$$\text{(111)} \qquad F(\nu + q) = F(\nu), \quad G(\nu + q) = G(\nu).$$

In Gleichung (104a) darf also ν ein beliebiges Restsystem von q durchlaufen.

Jetzt sind je nach den Werthen von q und q' vier Hauptfälle zu unterscheiden.

I. **Hauptfall**: $q = 3\xi + 1$.

Wenn $q = 3\xi + 1$ ist, so wird

$$G(\xi - \nu) = F(\nu)\, e^{-\frac{\pi i}{3}},$$

also

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} [F(\nu) + G(\nu)] = \sum_{\nu=0}^{q-1} [F(\nu) + G(\xi - \nu)],$$

oder

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} [F(\nu) + G(\nu)] = \left(1 + e^{-\frac{\pi i}{3}}\right) \sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu) = e^{-\frac{\pi i}{6}} \sqrt{3} \sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu),$$

also

$$\varrho\begin{pmatrix} p, & 3\xi + 1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{q}}\, e^{\frac{(p-5q)\pi i}{12 q}} \sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu). \tag{112}$$

Setzt man jetzt in herkömmlicher Weise

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\nu^2 m\pi i}{n}} = \varphi[m, n],\text{*)} \tag{113}$$

so sind schon von Gauss in seiner Abhandlung: *Summatio quarundarum serierum singularium* (ges. Werke, Bd. 2, S. 11) die Werthe dieser Summen angegeben. Auf solche Gauss'sche Summen kann man nun $\sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu)$ zurückführen, doch muss man unterscheiden, ob q *gerade* oder *ungerade* ist.

I^a^. *Ist* $q = 6\alpha + 1$, so setze man

$$\mu = \alpha(p + 1)(q + 1) = 2\alpha(3\alpha + 1)(p + 1), \tag{114}$$

so dass μ sicher eine durch 4 theilbare Zahl ist. Es wird dann

$$6\mu + 1 = q^2(p + 1) - p,$$

$$\begin{aligned}(6\mu + 1)\, q' + q + 1 &= q[(p + 1)\, q q' - p' + 1] \\ &= q[q^2 - 1)\, p' + (q + 1)(q' + 1) - q'],\end{aligned}$$

also

$$(6\mu + 1)\, q' + q + 1 \equiv -\, q q' \pmod{2q}.$$

Deshalb ist

$$e^{\frac{\nu\pi i}{q}[(6\mu+1)q'+q+1+3\nu q']} = e^{\frac{\nu(3\nu q' - q q')\pi i}{q}},$$

oder, wenn man mit

---

*) Dieser Ausdruck $\varphi[m, n]$ ist nicht zu verwechseln mit der in Gleichung (94) definirten Function $\varphi(u, \lambda)$, welche in dem Folgenden gar nicht mehr benutzt wird.

$$1 = e^{\frac{\nu(\nu+1)qq'\pi i}{q}}$$

multiplicirt,

$$(115) \qquad e^{\frac{\nu\pi i}{q}[(6\mu+1)q'+q+1+3\nu q']} = e^{\frac{2(3\alpha+2)q'\nu^2\pi i}{q}}.$$

Deshalb wird nach Gleichung (109)

$$(116) \qquad F(\mu+\nu) = F(\mu)\, e^{\frac{2(3\alpha+2)q'\nu^2\pi i}{q}} = F(\mu)\, r^{\nu\nu},$$

wo

$$r = e^{\frac{2(3\alpha+2)q'\pi i}{q}}, \quad \sum_{\nu=0}^{q-1} r^{\nu\nu} = \varphi[(3\alpha+2)q', q]$$

ist. Dies giebt

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu) = \sum_{\nu=0}^{q-1} F(\mu+\nu) = F(\mu)\, \varphi[3\alpha+2)q', q]$$

und nach Gleichung (112)

$$(117) \qquad \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha+1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{q}}\, \varphi[(3\alpha+2)q', q]\, e^{\frac{(p-5q)\pi i}{12q}}\, F(\mu)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{q}}\, \varphi[(3\alpha+2)q', q]\, e^{\frac{E\pi i}{12}}.$$

Da $\frac{1}{\sqrt{q}}\varphi[(3\alpha+2)q', q]$ bekannt ist, so bleibt nur noch E zu berechnen übrig. Hierbei ist aber zu beachten, dass man E um ein Vielfaches von 24 vermehren oder vermindern kann, ohne dass sich ϱ ändert. Dies soll benutzt werden, d. h. es soll ein möglichst einfacher Ausdruck gesucht werden, der zu E modulo 24 congruent ist.

Nach Gleichung (114) wird

$$(3\mu+1)q'+1 = 3\alpha q[(p+1)q'+p'] + (3\alpha+1)(q'+1),$$

und weil $6\mu q$ durch $24q$ theilbar ist,

$$E = \frac{1}{q}[p - 5q + (6\mu+1)^2 q' + 12\mu q + 12\mu + 2]$$
$$\equiv \frac{1}{q}[p - 5q + 2 + 12\mu\{(3\mu+1)q'+1\} + q']$$
$$\equiv \frac{1}{q}[p + q' - 5q + 2 + 12\mu(3\alpha+1)(q'+1)],$$

oder da

$$2(3\alpha+1) = q+1, \quad 6\mu = (q^2-1)(p+1), \quad q^2-1 = 12\alpha(3\alpha+1),$$

$$E \equiv \frac{1}{q}[p + q' - 5q + 2 + 6\mu(q'+1)]$$
$$\equiv \frac{1}{q}[p + q' - 5q + 2 + (q^2-1)(pq'+p+q'+1)],$$

also

$$E \equiv q(p + q' + 2) - 5.$$

Dies giebt

$$(118) \qquad \varrho \begin{pmatrix} p, & 6\alpha + 1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{q}}\, \varphi[(3\alpha + 2)\, q', q]\, e^{\frac{[q(p+q'+2)-5]\pi i}{12}}.$$

I[b]. *Ist* $q = 6\alpha - 2$, so müssen p und q' *ungerade* sein, so dass man setzen kann

$$p + 1 = 2a, \qquad q + 1 = 2d.$$

Setzt man hier

$$\mu = a(2\alpha - 1), \quad \text{also} \quad 6\mu + 1 = 2aq - p,$$

so wird

$$(6\mu+1)q' + q + 1 = q(2aq' + 1 - p') \equiv q(1 - p') \equiv qq'(1 - p') \pmod{2q}$$

und

$$(119) \qquad e^{\frac{\nu\pi i}{q}[(6\mu+1)q'+q+1+3\nu q']} = e^{\frac{q'\nu^2\pi i}{q}(q-qp'+3)}.$$

Deshalb wird nach Gleichung (109)

$$(120) \qquad F(\mu + \nu) = F(\mu)\, e^{\frac{q'\nu^2\pi i}{q}(q-qp'+3)} = F(\mu)\, r^{\nu\nu},$$

wo

$$r = e^{\frac{(q-qp'+3)q'\pi i}{q}}, \qquad \sum_{\nu=0}^{q-1} r^{\nu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{2q-1} r^{\nu\nu} = \frac{1}{2}\, \varphi[(q - qp' + 3)\, q', 2q]$$

ist. Dies giebt

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu) = \sum_{\nu=0}^{q-1} F(\mu + \nu) = \frac{1}{2}\, F(\mu)\, \varphi[(q - qp' + 3)\, q', 2q]$$

und

$$(121) \qquad \begin{cases} \varrho \begin{pmatrix} p, & 6\alpha - 2 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2\sqrt{q}}\, \varphi[(q - qp' + 3)\, q', 2q]\, e^{\frac{(p-5q)\pi i}{12q}}\, F(\mu) \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{2\sqrt{q}}\, \varphi[(q - qp' + 3)\, q', 2q]\, e^{\frac{E\pi i}{12}}. \end{cases}$$

Dabei wird

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{q}\,[p - 5q + (6\mu + 1)^2 q' + 12\mu q + 12\mu + 2] \\ &= \frac{1}{q}\,[p - 7q + 2aq - p + (6\mu + 1)\, q\, (2aq' + 2 - p')] \\ &= 2a - 7 + (6\mu + 1)(2aq' + 2 - p') \\ &= 2a - 7 + 2aq' + 2 - p' + 4a(q-1)(aq' + 1) - 2ap'(q-1). \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$4a(q-1)(aq'+1) = 12a(2\alpha-1)(2ad-a+1)$$
$$= 24a^2d(2\alpha-1) - 12a(a-1)(2\alpha-1)$$

ein Vielfaches von 24, so dass

$$E \equiv 4ad - 5 - p' - 2ap'(q-1) \equiv p + q' - 3 - pp'(q-1).$$

Dies giebt also

$$(122)\qquad \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha-2 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{q}}\,\varphi[(q-p'q+3)q', 2q]\, e^{\frac{[p+q'-3-pp'(q-1)]\pi i}{12}}.$$

II. Hauptfall. $q = 3\xi - 1$.

Hier wird

$$G(-\xi-\nu) = F(\nu)\, e^{\frac{\pi i}{3}},$$

also

$$\sum_{\nu=0}^{q-1}[F(\nu)+G(\nu)] = \sum_{\nu=0}^{q-1}[F(\nu)+G(-\xi-\nu)] = \left(1+e^{\frac{\pi i}{3}}\right)\sum_{\nu=0}^{q-1}F(\nu),$$

also

$$(123)\qquad \varrho\begin{pmatrix} p, & 3\xi-1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{q}}\, e^{\frac{(p-q)\pi i}{12q}} \sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu).$$

Wie beim ersten Hauptfalle, so muss man auch hier unterscheiden, ob q *ungerade* oder *gerade* ist.

II^a. *Ist* $q = 6\alpha - 1$, so findet man ganz ähnlich wie im Falle I^a, indem man $\mu = \alpha(p+1)(q-1)$ setzt,

$$\sum_{\nu=0}^{q-1}F(\nu) = \sum_{\nu=0}^{q-1}F(\mu+\nu) = F(\mu)\sum_{\nu=0}^{q-1} e^{\frac{2(3\alpha+1)q'\nu^2\pi i}{q}}$$
$$= F(\mu)\,\varphi[(3\alpha+1)q', q],$$

und da

$$F(\mu)\, e^{\frac{(p-q)\pi i}{12q}} = e^{\frac{[q(p+q'+2)-1]\pi i}{12}}$$

wird, so erhält man

$$(124)\qquad \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha-1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{q}}\,\varphi[(3\alpha+1)q', q]\, e^{\frac{[q(p+q'+2)-1]\pi i}{12}}.$$

II^b. *Ist* $q = 6\alpha + 2$, so müssen wieder p und q' *ungerade* sein, so dass man setzen kann

$$p + 1 = 2a, \quad q' + 1 = 2d.$$

Giebt man hier der Grösse μ den Werth $-a(2\alpha+1)$, so findet man ähnlich wie im Falle I^b

$$\sum_{\nu=0}^{q-1}F(\nu) = \sum_{\nu=0}^{q-1}F(\mu+\nu) = \tfrac{1}{2}F(\mu)\,\varphi[q-p'q+3)\,q', 2q]$$

und deshalb

$$(125)\quad \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha+2 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{q}}\,\varphi[(q-p'q+3)q', 2q]\,e^{\frac{[-p-q'-3+pp'(q+1)]\pi i}{12}}.$$

III. Hauptfall. $q=3\xi$, $q'=3\eta-1$.

Da q und q' nicht gleichzeitig gerade sein dürfen, so ist

$$(q+1)(q'+1)\equiv 0\ (\text{mod. } 6),\quad (q+1)(q'-1)\equiv -2\ (\text{mod. } 6),$$

folglich wird nach Gleichung (109)

$$F(\nu+\xi)=F(\nu),\qquad G(\nu+\xi)=e^{-\frac{2\pi i}{3}}G(\nu),$$

also

$$\sum_{\nu=0}^{q-1}F(\nu)=3\sum_{\nu=0}^{\xi-1}F(\nu),$$

$$\sum_{\nu=0}^{q-1}G(\nu)=\left(1+e^{-\frac{2\pi i}{3}}+e^{-\frac{4\pi i}{3}}\right)\sum_{\nu=0}^{\xi-1}G(\nu)=0.$$

Daher erhält man

$$(126)\qquad \varrho\begin{pmatrix} p, & 3\xi \\ p', & 3\eta-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\,e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}}\sum_{\nu=0}^{\xi-1}F(\nu).$$

Aus der Gleichung $pq'-p'q=+1$ folgt nun, dass hier $p+1$ durch 3 theilbar sein muss; es sei also

$$p+1=3\zeta.$$

III[a]. *Ist* $q=6\alpha+3$, so setze man

$$\mu=2\zeta\alpha(\alpha+1),$$

wodurch man erreicht, dass μ durch 4 theilbar ist. Jetzt wird

$$6\mu+1=\zeta q(2\alpha+1)-p,\quad (6\mu+1)q'+q+1\equiv qq'\ (\text{mod. } 2q).$$

Daraus folgt

$$e^{\frac{\nu\pi i}{q}[(6\mu+1)q'+q+1+3\nu q']}=e^{\frac{q'\nu\pi i}{q}(3\nu+q)}=e^{\frac{q'\nu^2\pi i}{q}(q+3)}=r^{\nu\nu},$$

wo

$$r=e^{\frac{(q+3)q'\pi i}{q}}=e^{\frac{2(\alpha+1)q'\pi i}{2\alpha+1}},\quad \sum_{\nu=0}r^{\nu\nu}=\varphi[(\alpha+1)q', 2\alpha+1].$$

Man erhält daher nach Gleichung (109)

$$F(\mu+\nu)=F(\mu)\,e^{\frac{q'\nu^2\pi i}{q}(q+3)}=F(\mu)\,r^{\nu\nu}$$

und

$$(127)\quad \begin{cases} \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha+3 \\ p', & 3\eta-1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}\,\varphi[(\alpha+1)q', 2\alpha+1]\,F(\mu)\,e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}} \\ \qquad\qquad\qquad = \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}\,\varphi[(\alpha+1)q', 2\alpha+1]\,e^{\frac{E\pi i}{12}}. \end{cases}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{q}\,[p-3q+(6\mu+1)^2 q' + 12\mu q + 12\mu + 2] \\ &= \frac{1}{q}\,(p+q'+2-3q) + \frac{12\mu}{q}\,[(3\mu+1)\,q' + q + 1] \\ &= \frac{1}{q}\,(p+q'+2-3q) + \frac{12\mu}{q}(\alpha+1)(q'+1) + 12\mu(\zeta\alpha q'+1+\alpha p'). \end{aligned}$$

Da nun μ durch 4 theilbar ist und

$$12\mu(\alpha+1) = 24\zeta\alpha(\alpha^2+2\alpha+1) = -3\zeta+\zeta q(4\alpha^2+6\alpha+1)$$

wird, so ist modulo 24

$$\begin{aligned} E &\equiv \frac{1}{q}\,(p+q'+2-3q) + \frac{12\mu}{q}\,(\alpha+1)\,(q'+1) \\ &\equiv \frac{1}{q}\,(p+q'+2-3q-3\zeta q'-3\zeta) + \zeta(q'+1)\,(4\alpha^2+6\alpha+1) \\ &\equiv -p'-3+\zeta\eta(12\alpha^2+18\alpha+3) \\ &\equiv -p'-3+\zeta\eta(6\alpha+3) = \zeta\eta q - p' - 3. \end{aligned}$$

Man erhält also

$$(128)\quad \varrho\begin{pmatrix} 3\zeta-1, & 6\alpha+3 \\ p', & 3\eta-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}\,\varphi[(\alpha+1)q', (2\alpha+1)]\,e^{\frac{(\eta\zeta q-p'-3)\pi i}{12}}.$$

III[b]. *Ist* $q = 6\alpha$, so muss q' ungerade sein. Deshalb ist $q'+1$ durch 6 theilbar und ebenso $p+1$; man setze daher

$$p+1 = 6\sigma, \quad q'+1 = 6\tau.$$

Ferner sei $\mu = -\sigma$, also

$$6\mu+1 = -p, \quad (6\mu+1)q'+q+1 = (1-p')q \equiv (1-p')qq' \pmod{2q}.$$

Daraus folgt

$$e^{\frac{\nu\pi i}{q}[(6\mu+1)q'+q+1+3\nu q']} = e^{\frac{\nu q'\pi i}{q}(3\nu+q-p'q)} = e^{\frac{\nu^2 q'\pi i}{q}(q-p'q+3)} = r^{\nu\nu},$$

wobei

$$r = e^{\frac{3q'\pi i}{q}(2\alpha-2\alpha p'+1)} = e^{\frac{(2\alpha-2\alpha p'+1)q'\pi i}{2\alpha}},$$

$$\sum_{\nu=0}^{2\alpha-1} r^{\nu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{4\alpha-1} r^{\nu\nu} = \frac{1}{2}\,\varphi[(2\alpha-2\alpha p'+1)\,q', 4\alpha].$$

Nach Gleichung (109) erhält man also

$$F(\mu + \nu) = F(\mu)\, r^{\mu\nu}$$

und

$$\varrho\begin{pmatrix}6\sigma-1, & 6\alpha\\ p', & 6\tau-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}}\,\varphi[(2\alpha-2\alpha p'+1)\,q',\, 4\alpha]\, F(\mu)\, e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}}\,\varphi[(2\alpha-2\alpha p'+1)\,q',\, 4\alpha]\, e^{\frac{E\pi i}{12}}.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{q}\,[p - 3q + (6\mu+1)^2 q' + 12\mu q + 12\mu + 2] \\ &= \frac{1}{q}\,(p - 3q + p^2 q' - 2pq - 2q - 2p) \\ &= pp' - 2p - 5; \end{aligned}$$

dies giebt also

$$(129)\qquad \left\{\begin{aligned} &\begin{pmatrix}6\sigma-1, & 6\alpha\\ p', & 6\tau-1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}}\,\varphi[(2\alpha-2\alpha p'+1)\,q',\, 4\alpha]\, e^{\frac{(pp'-2p-5)\pi i}{12}}. \end{aligned}\right.$$

IV. Hauptfall: $q = 3\xi$, $q' = 3\eta + 1$.

Hier ist

$$(q+1)(q'+1) \equiv 2 \pmod{6}, \qquad (q+1)(q'-1) \equiv 0 \pmod{6},$$

folglich wird nach Gleichung (109)

$$F(\nu+\xi) = e^{\frac{2\pi i}{3}} F(\nu), \qquad G(\nu+\xi) = G(\nu),$$

also

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu) = \left(1 + e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)\sum_{\nu=0}^{\xi-1} F(\nu) = 0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} G(\nu) = 3\sum_{\nu=0}^{\xi-1} G(\nu).$$

Daher erhält man

$$(130)\qquad \varrho\begin{pmatrix}p, & 3\xi\\ p', & 3\eta+1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\, e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}} \sum_{\nu=0}^{\xi-1} G(\nu).$$

Die Rechnungen werden daher in diesem Falle denen des vorigen Falles ganz ähnlich, man hat nur $F(\nu)$ mit $G(\nu)$ zu vertauschen und statt der Gleichung (109) die Gleichung (110) passend zu verwenden. Dadurch erhält man die beiden Formeln

$$(131)\quad \begin{cases} \varrho\begin{pmatrix} 3\xi+1, & 6\alpha+3 \\ p', & 3\eta+1 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}\,\varphi[(\alpha+1)\,q',\ 2\alpha+1]\,e^{\frac{(-\eta\zeta q+p'-3)\pi i}{12}} \end{cases}$$

und

$$(132)\quad \begin{cases} \varrho\begin{pmatrix} 6\sigma+1, & 6\alpha \\ p', & 6\tau+1 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}}\,\varphi[(2\alpha-2\alpha p'+1)\,q',\ 4\alpha]\,e^{\frac{(pp'-2p-1)\pi i}{12}}. \end{cases}$$

§ 15.

Tabellen.

Es erscheint zweckmässig, die gefundenen Resultate in einer Tabelle zusammenzustellen. Es möge dabei ausdrücklich hervorgehoben werden, dass die Darstellung von ϱ auf sehr verschiedene Weise möglich ist, und dass es vermuthlich noch einfachere Ausdrücke für ϱ giebt. Die folgende Tabelle ist aber für die vorliegenden Zwecke vollkommen ausreichend.

$$(133)\quad \begin{cases} \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha+1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{q}}\,\varphi[(3\alpha+2)\,q',\ q]\,e^{\frac{[q(p+q'+2)-5]\pi i}{12}}, \\ \qquad \text{(Gleichung (118))}, \\ \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha+2 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{q}}\,\varphi[q-p'q+3)\,q',\ 2q]\,e^{\frac{[-p-q'-3+pp'(q+1)]\pi i}{12}}, \\ \qquad \text{(Gleichung (125))}, \\ \varrho\begin{pmatrix} 3\xi-1, & 6\alpha+3 \\ p', & 3\eta-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}\,\varphi[(\alpha+1)\,q',\ 2\alpha+1]\,e^{\frac{(\eta\zeta q-p'-3)\pi i}{12}}, \\ \qquad \text{(Gleichung (128))}, \\ \varrho\begin{pmatrix} 3\xi+1, & 6\alpha+3 \\ p', & 3\eta+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}\,\varphi[(\alpha+1)\,q',\ 2\alpha+1]\,e^{\frac{(-\eta\zeta q+p'-3)\pi i}{12}}, \\ \qquad \text{(Gleichung (131))}, \\ \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha-2 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{q}}\,\varphi[(q-p'q+3)\,q',\ 2q]\,e^{\frac{[p+q'-3-pp'(q-1)]\pi i}{12}}, \\ \qquad \text{(Gleichung (122))}, \\ \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha-1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{q}}\,\varphi[(3\alpha+1)\,q',q]\,e^{\frac{[q(p+q'+2)-1]\pi i}{12}}, \\ \qquad \text{(Gleichung (124))}, \end{cases}$$

$$(133)\quad \begin{cases} \varrho\begin{pmatrix}6\sigma-1, 6\alpha\\ p', 6\tau-1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2\sqrt{2\alpha}}\,\varphi[(2\alpha-2\alpha p'+1)q', 4\alpha]\,e^{\frac{(pp'-2p-5)\pi i}{12}}, \\ \qquad\qquad \text{(Gleichung (129))}, \\ \varrho\begin{pmatrix}6\sigma+1, 6\alpha\\ p', 6\tau+1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2\sqrt{2\alpha}}\,\varphi[(2\alpha-2\alpha p'+1)q', 4\alpha]\,e^{\frac{(pp'-2p-1)\pi i}{12}}, \\ \qquad\qquad \text{(Gleichung (132))}. \end{cases}$$

Hieraus mögen noch die Fälle $q = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ besonders ausgerechnet und in eine Tabelle zusammengestellt werden.

$$(134)\qquad \varrho\begin{pmatrix}1, 0\\ p', 1\end{pmatrix} = e^{\frac{p'\pi i}{12}}, \qquad \varrho\begin{pmatrix}-1, 0\\ p', -1\end{pmatrix} = e^{\frac{-(p'+6)\pi i}{12}},$$

$$(134\text{a})\quad \begin{cases} \varrho\begin{pmatrix}p, 1\\ p', q'\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{12}(p+q'-3)}, & \varrho\begin{pmatrix}p, 2\\ p', q'\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{24}(p+q'-6)}, \\ \varrho\begin{pmatrix}p, 3\\ p', 3k+1\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{36}(p+q'-11)}, & \varrho\begin{pmatrix}p, 3\\ p', 3k+2\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{36}(p+q'-7)}, \\ \varrho\begin{pmatrix}p, 4\\ p', 4k+1\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{48}(p+q'-18)}, & \varrho\begin{pmatrix}p, 4\\ p', 4k+3\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{48}(p+q'-6)}, \\ \varrho\begin{pmatrix}p, 5\\ p', 5k+1\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{60}(p+q'-27)}, & \varrho\begin{pmatrix}p, 5\\ p', 5k+2\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{60}(p+q'-15)}, \\ \varrho\begin{pmatrix}p, 5\\ p', 5k+3\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{60}(p+q'-15)}, & \varrho\begin{pmatrix}p, 5\\ p', 5k+4\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{60}(p+q'-3)}, \\ \varrho\begin{pmatrix}p, 6\\ p', 6k+1\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{72}(p+q'-38)}, & \varrho\begin{pmatrix}p, 6\\ p', 6k+5\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{72}(p+q'+2)}, \\ \varrho\begin{pmatrix}p, 7\\ p', 7k+1\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{84}(p+q'-51)}, & \varrho\begin{pmatrix}p, 7\\ p', 7k+2\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{84}(p+q'-27)}, \\ \varrho\begin{pmatrix}p, 7\\ p', 7k+3\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{84}(p+q'-15)}, & \varrho\begin{pmatrix}p, 7\\ p', 7k+4\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{84}(p+q'-27)}, \\ \varrho\begin{pmatrix}p, 7\\ p', 7k+5\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{84}(p+q'-15)}, & \varrho\begin{pmatrix}p, 7\\ p', 7k+6\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{84}(p+q'+9)}. \end{cases}$$

Die Form, welche die 18 verschiedenen Werthe von ϱ in den Gleichungen (134a) haben, ist so übereinstimmend, dass die Frage nahe liegt, ob sich die Gleichungen nicht alle durch eine einzige darstellen lassen. Dies ist in der That möglich, denn setzt man

$$p = hq + r, \quad q' = kq + t,$$

wo r, t positiv und kleiner als q sein sollen, so haben die Gleichungen (134a) sämmtlich die Form

$$\varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix} hq+r, & q \\ p', & kq+t \end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{12}(h+k+r+t-q-2)}.$$

Ich habe aber noch nicht geprüft, wie weit die Gültigkeit dieser einfachen Formel reicht.

Abschnitt IV.

Theorie der f-Gleichung, wenn n eine von 2 und 3 verschiedene Primzahl ist.

§ 16.

Beweis, dass in dem vorliegenden Falle f^2 einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades genügt.

Ist $n = 2m + 1$ eine Primzahl von der Form $6l \pm 1$ und g eine primitive Wurzel von n, so wird nach Gleichung (44)

$$(135)\quad f^{-2} = (-1)^l \prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)\right] = (-1)^l \prod_{\alpha=1}^{m} F\left(\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right),$$

wo

$$F(\wp) = \frac{3\wp^4 - \frac{3}{2}g_2\wp^2 - 3g_3\wp - \frac{1}{16}g_2^2}{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}$$

ist. Die Grösse f^2 ist somit eine symmetrische und deshalb auch cyklische Funktion von

$$\wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right),\ \wp\left(\frac{2g\varpi}{n}\right),\ \cdots \wp\left(\frac{2g^{m-1}\varpi}{n}\right).$$

Daraus folgt nach den Ausführungen in § 3, dass f^{-2} die Wurzel einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades ist, deren Coefficienten *rationale* Functionen von g_2 und g_3 sind. Der Nenner in $F(\wp)$ ist

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = \wp'^2;$$

der Nenner in f^{-2} wird daher gleich $\prod\limits_{\alpha=1}^{m}\wp'^2\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$, und dieses Product ist nach Gleichung (46) gleich f^{-6}. Der Nenner, welcher in

$$f^{-2} = (-1)^l \prod_{\alpha=1}^{m} F\left(\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right)$$

auftritt, muss sich also gegen entsprechende Factoren im Zähler fortheben, so dass die ganzen symmetrischen Functionen der $n+1$ Grössen f^{-2} unter Anwendung der angedeuteten Relationen sogar *ganze* symmetrische Functionen der Theilwerthe des reducirten Systems werden. Daraus kann man also nach Satz IV in § 2 schliessen, dass die Coefficienten der Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, von welcher f^{-2} abhängt, sogar *ganze* rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

§ 17.

Die $n+1$ Wurzeln der f-Gleichung. Jacobi'sche Relationen.

Um die $n+1$ Wurzeln der f-Gleichung zu erhalten, beachte man, dass f^2 eine cyklische Function der m Theilwerthe n^{ten} Grades

$$\wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right),\ \wp\left(\frac{2g\varpi}{n}\right),\ \wp\left(\frac{2g^2\varpi}{n}\right),\ \cdots \wp\left(\frac{2g^{m-1}\varpi}{n}\right)$$

ist. Setzt man jetzt für ϖ die $n+1$ Werthe

$$\omega,\ \omega',\ \omega'+24\omega,\ \omega',+48\omega,\ \cdots\ \omega'+24(n-1)\omega,$$

so wird das vollständige System der Theilwerthe n^{ten} Grades erschöpft. Bezeichnet man also die $n+1$ Wurzeln der f-Gleichung mit

$$f_\infty^2,\ f_0^2,\ f_1^2,\ f_2^2,\ \ldots f_{n-1}^2,$$

so ist nach Gleichung (35)

$$f_\infty = \frac{Q\left(\frac{\omega}{n},\ \omega'\right)}{Q^n(\omega,\ \omega')} = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^m \sqrt{n} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1-h^{2n\nu})}{(1-h^{2\nu})^n}, \tag{136}$$

wobei h den Werth $e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}$ hat. Vertauscht man jetzt $\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right)$ mit $\wp\left(\frac{2\omega'+48r\omega}{n}\right)$, so geht f_∞ in f_r über. Nun ist aber

$$\wp(u \mid \omega, \omega') = \wp(u \mid \omega'+24r\omega, -\omega),$$

weil sich $\wp u$ gar nicht ändert, wenn man die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ durch die äquivalenten Perioden $2p\omega+2q\omega'$, $2p'\omega+2q'\omega'$ ersetzt. Es geht also f_∞ in f_r über, wenn man

$$\wp\left(\frac{2\omega}{n} \,\middle|\, \omega, \omega'\right) \text{ mit } \wp\left(\frac{2\omega'+48r\omega}{n} \,\middle|\, \omega'+24r\omega,\ -\omega\right)$$

vertauscht, d. h. man hat in f_∞ die Grössen $\omega'+24r\omega$, $-\omega$ an die Stelle von ω, ω' zu setzen. Dadurch erhält man also

$$f_r = \frac{Q\left(\frac{\omega'+24r\omega}{n},\ -\omega\right)}{Q^n(\omega'+24r\omega,\ -\omega)}$$

für $r = 0, 1, 2, \ldots n-1$. Aus der Tabelle (134a) findet man

$$\varrho\begin{pmatrix}24r, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix} = e^{\frac{(24r-3)\pi i}{12}} = e^{-\frac{\pi i}{4}}, \quad \varrho\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix} = e^{-\frac{\pi i}{4}},$$

folglich ist

$$Q(24r\omega + \omega', -\omega) = e^{-\frac{\pi i}{4}} Q(\omega, \omega'),$$

$$Q\left(\frac{\omega' + 24r\omega}{n}, -\omega\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}} Q\left(\omega, \frac{\omega' + 24r\omega}{n}\right)$$

und

$$(137)\quad f_r = e^{\frac{(n-1)\pi i}{4}} \frac{Q\left(\omega, \frac{\omega' + 24r\omega}{n}\right)}{Q^n(\omega, \omega')} = e^{\frac{m\pi i}{2}} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^m h^{\frac{-n^2+1}{12n}} \varepsilon^r \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(1 - h^{\frac{2\nu}{n}} \varepsilon^{24r\nu}\right)}{(1-h^{2\nu})^n},$$

wobei $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist.

Dieses Resultat stimmt mit Gleichung (9) in Abh. 1 überein; auch zeigt die hier benutzte Herleitung recht deutlich, wesshalb es zweckmässig ist, die Grössen $Q\left(\omega, \frac{\omega' + 24r\omega}{n}\right)$ und nicht etwa $Q\left(\omega, \frac{\omega' + r\omega}{n}\right)$ einzuführen.

Setzt man

$$N = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^m h^{\frac{n}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu})^n$$

und entwickelt die Grössen

$$Nf_\infty, \; Nf_0, \; Nf_1, \; \ldots \; Nf_{n-1}$$

nach Potenzen von h, so findet man, wie schon in Abh. 1 gezeigt wurde, die nach Jacobi benannten Relationen, nämlich die $\frac{n+1}{2}$ Relationen

$$(138)\quad \begin{cases} f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1} = e^{\frac{(2l+m)\pi i}{2}} f_\infty \sqrt{n}, \\ f_0 + \varepsilon^{-\beta} f_1 + \varepsilon^{-2\beta} f_2 + \cdots + \varepsilon^{-2m\beta} f_{n-1} = 0, \end{cases}$$

wo β ein beliebiger Nichtrest von n ist. In ähnlicher Weise findet man auch die Gleichungen

$$(139)\quad \begin{cases} f_0^3 + f_1^3 + f_2^3 + \cdots + f_{n-1}^3 = e^{\frac{m\pi i}{2}} f_\infty^3 \sqrt{n}, \\ f_0^3 + \varepsilon^{-3\beta} f_1^3 + \varepsilon^{-6\beta} f_2^3 + \cdots + \varepsilon^{-6m\beta} f_{n-1}^3 = 0. \end{cases}$$

§ 18.

Herstellung der f-Gleichung.

Schon in § 5 der Abhandlung 1 ist ausführlich angegeben, wie man die f-Gleichung wirklich herstellen kann. Sie hat die Form

$$(140)\qquad f^{2n+2} + \mathfrak{g}_1 f^{2n} + \mathfrak{g}_2 f^{2n-2} + \cdots + \mathfrak{g}_{n+1} = 0,$$

und es folgt zunächst aus der Productentwickelung der Grössen f, wie sie durch die Gleichungen (136) und (137) gegeben ist,

$$(141)\qquad \mathfrak{g}_{n+1} = f_\infty^2 f_0^2 f_1^2 \cdots f_{n-1}^2 = (-1)^m \frac{n}{\Delta^{\frac{n^2-1}{12}}}.$$

Da f^{-2} einer Gleichung genügt, deren Coefficienten *ganze rationale* Functionen von g_2 und g_3 sind, so müssen, wie aus Gleichung (141) folgt, die Coefficienten $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ in der Gleichung für f^2 gleichfalls *ganze rationale* Functionen von g_2 und g_3 sein, dividirt durch eine Potenz von Δ, deren Exponent eine *ganze* Zahl ist. Nennt man diesen Exponenten, wenn er bei $\mathfrak{g}_\alpha$ auftritt, α_1, so wird α_1 zwischen

$$\frac{\alpha(n-1)}{12} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha n}{12}$$

liegen, weil

$$\Delta^{\frac{1}{12}} = \frac{\pi}{\omega} h^{\frac{1}{6}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu})^2$$

und

$$f_\infty^{2\alpha} = \frac{n^\alpha h^{\frac{\alpha n}{6}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2n\nu})^{2\alpha}}{\Delta^{\frac{\alpha(n-1)}{12}} h^{\frac{\alpha}{6}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu})^{2\alpha}},$$

$$f_r^{2\alpha} = (-1)^{\alpha m} \frac{\varepsilon^{2\alpha r} h^{\frac{\alpha}{6n}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - h^{\frac{2\nu}{n}} \varepsilon^{24 r\nu}\right)^{2\alpha}}{\Delta^{\frac{\alpha(n-1)}{12}} h^{\frac{\alpha}{6}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu})^{2\alpha}}$$

ist. Liegt zwischen $\frac{\alpha(n-1)}{12}$ und $\frac{\alpha n}{12}$ keine ganze Zahl, so ist $\mathfrak{g}_\alpha = 0$, liegen aber mehrere ganze Zahlen dazwischen, so darf man für α_1 die grösste nehmen.

Um nun auch den Zähler von $\mathfrak{g}_\alpha$ zu bestimmen, muss man zunächst berücksichtigen, dass die Dimension von

$$g_2, \quad g_3, \quad \Delta^{\alpha_1} = (g_2^3 - 27 g_3^2)^{\alpha_1}, \quad f^2 = \frac{Q^2\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}{Q^{2n}(\varpi, \varpi')}, \quad \mathfrak{g}_\alpha$$

bez. gleich

$$2, \quad 3, \quad 6\alpha_1, \qquad \frac{1-n}{2}, \qquad \frac{1-n}{2}\,\alpha$$

ist. Daraus folgt, dass der Zähler von $\mathfrak{g}_\alpha$ eine *ganze* homogene Function $\mathfrak{G}_{\alpha_2}$ der Grössen g_2, g_3 sein muss, deren Grad α_2 durch die Gleichung

$$\alpha_2 = 6\alpha_1 - \frac{n-1}{2}\,\alpha \tag{142}$$

bestimmt wird. Homogen ist die Function in dem Sinne, dass man die Dimension von g_2 und g_3 berücksichtigt.

Dieser Grad α_2 ist eine verhältnissmässig kleine Zahl, sie muss nämlich nach den über α_1 getroffenen Bestimmungen kleiner sein als $\frac{\alpha}{2}$. Kennt man α_2, so ist die Function $\mathfrak{G}_{\alpha_2}$ bis auf einige Zahlencoefficienten vollständig bestimmt. Es ist nämlich, wenn man mit $c_1, c_2, \ldots$ Zahlencoefficienten bezeichnet,

$$\mathfrak{G}_1 = 0,$$

und es hat

$\mathfrak{G}_0$ die Form c_1,

$\mathfrak{G}_2$ " " $c_1 g_2$,

$\mathfrak{G}_3$ " " $c_1 g_3$,

$\mathfrak{G}_4$ " " $c_1 g_2^2$,

$\mathfrak{G}_5$ " " $c_1 g_2 g_3$,

$\mathfrak{G}_6$ " " $c_1 g_2^3 + c_2 g_3^2$,

$\mathfrak{G}_7$ " " $c_1 g_2^2 g_3$,

$\mathfrak{G}_8$ " " $c_1 g_2^4 + c_2 g_2 g_3^2$,

$\mathfrak{G}_9$ " " $c_1 g_2^3 g_3 + c_2 g_3^3$,

. . . .

Um auch noch diese Zahlencoefficienten $c_1, c_2, \ldots$ zu finden, beachte man, dass die Summe

$$f_\infty^{2\alpha} + f_0^{2\alpha} + f_1^{2\alpha} + \cdots + f_{n-1}^{2\alpha},$$

welche mit s_α bezeichnet werden möge, dieselbe Form hat wie $\mathfrak{g}_\alpha$. Den Zähler von s_α kann man aber leicht nach Potenzen von h entwickeln, indem man die Reihen

$$(143)\begin{cases}\displaystyle\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})=1-h^2-h^4+h^{10}+h^{14}-h^{24}-\cdots\\ \displaystyle\qquad\qquad=h^{-\frac{1}{12}}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}},\\ \displaystyle\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^{2\alpha}=H_0(2\alpha)-H_1(2\alpha)h^2+H_2(2\alpha)h^4-H_3(2\alpha)h^6+\cdots\end{cases}$$

benutzt. Wie man die Grössen $H_\varkappa(2\alpha)$ *einzeln* berechnen kann, ist in Abh. 3 gezeigt worden.

Man kann aber auch s_α als Function von g_2 und g_3 betrachten und den Zähler nach Potenzen von h^2 entwickeln durch Anwendung der Reihen

$$(144)\begin{cases}g_2=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^4\left[\frac{1}{12}+20(h^2+9h^4+28h^6+73h^8+126h^{10}+\cdots)\right],\\ g_3=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^6\left[\frac{1}{126}-\frac{7}{3}(h^2+33h^4+244h^6+1057h^8+3126h^{10}+\cdots)\right].\end{cases}$$

Durch Vergleichung dieser beiden Entwickelungen findet man leicht die unbestimmten Coefficienten, welche in $\mathfrak{g}_\alpha$ oder in s_α auftreten. Natürlich braucht man bei dieser Reihenentwickelung nur so viele Glieder zu berücksichtigen, als unbestimmte Coefficienten in s_α enthalten sind, d. h. man braucht nur $\varkappa$ Glieder, wenn α_2 die Form $6\varkappa+1$ hat, und $\varkappa+1$ Glieder, wenn α_2 eine der Formen $6\varkappa$, $6\varkappa+2$, $6\varkappa+3$, $6\varkappa+4$, $6\varkappa+5$ hat.

Kennt man die Grössen s_α, so findet man mit Hülfe der Newton'schen Formeln auch die Grössen $\mathfrak{g}_\alpha$.

Im Uebrigen sei hier auf § 5 in Abh. 1 verwiesen.

§ 19.

Beispiele für $n=5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$. Definition der L-Gleichung.

Das soeben angedeutete Verfahren wurde bereits in Abhandlung 1 dazu verwendet, um die f-Gleichungen für $n=5, 7, 11, 13, 17, 19$ wirklich zu bilden. In Abhandlung 3 wurde dann noch eine Umformung der f-Gleichung vorgenommen, die aus den Substitutionen

$$L=Q^{n-1}f,\qquad \gamma_2=\frac{g_2}{Q^8},\qquad \gamma_3=\frac{g_3}{Q^{12}}$$

hervorgeht. Dabei ist

$$Q=\Delta^{\frac{1}{24}}=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{12}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})=Q(\omega,\omega')$$

eindeutig definirt. Die Gleichung für L, welche man hierdurch erhält,

möge *L-Gleichung* genannt werden. Sie lässt sich einfacher schreiben als die f-Gleichung, weil die Coefficienten *ganze rationale* Functionen von γ_2 und γ_3 sind, während in der f-Gleichung Potenzen von Δ als Nenner auftreten.

In Abhandlung 3 wurde die L-Gleichung für $n = 23$ angegeben und in der vorliegenden Mittheilung möge noch die L-Gleichung für $n = 29$ hinzugefügt werden; der Vollständigkeit wegen sollen hier die L-Gleichungen für alle Primzahlen von der Form $6l \pm 1$ bis $n = 29$ Platz finden.

Man erhält für $n = 5$

$$L^{12} + 10L^6 - 12\gamma_2 L^2 + 5 = 0; \tag{145}$$

für $n = 7$

$$L^{16} + 14L^{12} + 63L^8 + 70L^4 + 216\gamma_3 L^2 - 7 = 0; \tag{146}$$

für $n = 11$

$$\left\{\begin{aligned} &L^{24} + 11(-90L^{12} + 40.12\gamma_2 L^8 + 15.216\gamma_3 L^6 + 2.144\gamma_2{}^2 L^4) \\ &\qquad + 12\gamma_2 . 216\gamma_3 L^2 - 11 = 0; \end{aligned}\right. \tag{147}$$

für $n = 13$

$$\left\{\begin{aligned} &L^{28} + 13(2L^{26} + 25L^{24} + 196L^{22} + 1064L^{20} + 4180L^{18} \\ &\qquad\qquad + 12086L^{16} + 25660L^{14} + 39182L^{12} + 41140L^{10} \\ &\qquad\qquad + 27272L^8 + 9604L^6 + 1165L^4) \\ &\qquad + (746 - 1728\gamma_2{}^3)L^2 + 13 = 0; \end{aligned}\right. \tag{148}$$

für $n = 17$

$$\left\{\begin{aligned} &L^{36} + 17[10L^{30} + 2.12\gamma_2 L^{26} + 751L^{24} + 184.12\gamma_2 L^{20} \\ &\qquad\qquad + 25740L^{18} + 17.144\gamma_2{}^2 L^{16} + 8780.12\gamma_2 L^{14} \\ &\qquad\qquad + 323903L^{12} - 1474.144\gamma_2{}^2 L^{10} + 99128.12\gamma_2 L^8 \\ &\qquad\qquad + (-592310 + 20.1728\gamma_2{}^3)L^6 + 481.144\gamma_2{}^2 L^4] \\ &\qquad + (994 - 1728\gamma_2{}^3)12\gamma_2 L^2 + 17 = 0; \end{aligned}\right. \tag{149}$$

für $n = 19$

$$\left\{\begin{aligned} &L^{40} + 19[-4L^{36} + 138L^{32} - 2926L^{28} - 2.216\gamma_3 L^{26} + 41035L^{24} \\ &\qquad\qquad + 237.216\gamma_3 L^{22} - 359820L^{20} - 7410.216\gamma_3 L^{18} \\ &\qquad\qquad + 1743935L^{16} + 85414.216\gamma_3 L^{14} \\ &\qquad\qquad + (-4798430 + 13.216^2\gamma_3{}^2)L^{12} - 317802.216\gamma_3 L^{10} \\ &\qquad\qquad + (16921266 + 306.216^2\gamma_3{}^2)L^8 + 148629.216\gamma_3 L^6 \\ &\qquad\qquad + (422140 + 185.216^2\gamma_3{}^2)L^4] \\ &\qquad + (1474 + 216^2\gamma_3{}^2)216\gamma_3 L^2 - 19 = 0; \end{aligned}\right. \tag{150}$$

für $n = 23$

$$
(151)\left\{\begin{aligned}
L^{48} + 23[&684\,L^{36} - 208.12\gamma_2 L^{32} + 138.216\gamma_3 L^{30} + 76.12^2\gamma_2{}^2 L^{28}\\
&-2.12\gamma_2.216\gamma_3 L^{26} + 3826738\,L^{24}\\
&-2631456.12\gamma_2 L^{20} + 3151332.216\gamma_3 L^{18}\\
&+5454584.12^2\gamma_2{}^2 L^{16} + 2732604.12\gamma_2.216\gamma_3 L^{14}\\
&+(643643.12^3\gamma_2{}^3 - 3224219652)L^{12}\\
&+81332.12^2\gamma_2{}^2.216\gamma_3 L^{16}\\
&+(5814.12^4\gamma_2{}^4 + 343305200.12\gamma_2)L^8\\
&+(235.12^3\gamma_2{}^3.216\gamma_3 - 20169438.216\gamma_3)L^6\\
&+(5.12^5\gamma_2{}^5 + 123292.12^2\gamma_2{}^2)L^4]\\
+ (12^4\gamma_2{}^4&.216\gamma_3 - 502.12\gamma_2.216\gamma_3)L^2 - 23 = 0;
\end{aligned}\right.
$$

für $n = 29$

$$
(152)\left\{\begin{aligned}
L^{60} + 29[&-14L^{54} - 7.12\gamma_2 L^{50} + 2941\,L^{48} + 3752.12\gamma_2 L^{44}\\
&-430920\,L^{42} + 549.12^2\gamma_2{}^2 L^{40} - 746900.12\gamma_2 L^{38}\\
&+39119722\,L^{36} - 293314.12^2\gamma_2{}^2 L^{34} + 88455352.12\gamma_2 L^{32}\\
&+(-18009.12^3\gamma_2{}^3 - 2125900852)L^{30}\\
&+63392927.12^2\gamma_2{}^2 L^{28} + (2.12^4\gamma_2{}^4 - 6278577146.12\gamma_2)L^{26}\\
&+(6163164.12^3\gamma_2{}^3 + 65739634658)L^{24}\\
&-4804765196.12^2\gamma_2{}^2 L^{22}\\
&+(182139.12^4\gamma_2{}^4 + 112526262488.12\gamma_2)L^{20}\\
&+(-464606062.12^3\gamma_2{}^3 + 2343582470520)L^{18}\\
&+(110.12^5\gamma_2{}^5 + 93035050963.12^2\gamma_2{}^2)L^{16}\\
&+(30009954.12^4\gamma_2{}^4 + 2992511028940.12\gamma_2)L^{14}\\
&+(11381036076.12^3\gamma_2{}^3 + 42359297252609)L^{12}\\
&+(-125917.12^5\gamma_2{}^5 + 355288039406.12^2\gamma_2{}^2)L^{10}\\
&+(51644991.12^4\gamma_2{}^4 + 1791596244808.12\gamma_2)L^8\\
&+(126.12^6\gamma_2{}^6 - 417739329.12^3\gamma_2{}^3 + 1466253058066)L^6\\
&+(8470.12^5\gamma_2{}^5 + 29673801.12^2\gamma_2{}^2)L^4]\\
+ (-12^7\gamma_2{}^7 &+ 1738.12^4\gamma_2{}^4 - 403643.12\gamma_2)L^2 + 29 = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Man kann die Richtigkeit dieser Gleichungen dadurch prüfen, dass man für die absoluten Invarianten γ_2 und γ_3 solche Werthe annimmt, bei denen complexe Multiplication stattfindet. Dann zerfällt die L-Gleichung, wie bei einer anderen Gelegenheit gezeigt werden soll, in Factoren. Ist z. B. $\gamma_3 = 0$ und $n = 4l + 1$, so lässt sich von der linken Seite der L-Gleichung ein quadratischer Factor $L^4 + aL^2 + b$ absondern, dessen Coefficienten a und b ohne weitläufige Rechnung

bestimmt werden können. Der andere Factor $4l^{ten}$ Grades ist ein vollständiges Quadrat. Ist $\gamma_2 = 0$ und $n = 6l + 1$, so lässt sich gleichfalls von der linken Seite der L-Gleichung ein solcher quadratischer Factor $L^4 + aL^2 + b$ absondern. Der andere Factor $6l^{ten}$ Grades ist ein vollständiger Cubus. Aehnliches findet bei anderen *singulären* Invarianten statt.

Dieser Umstand liefert nicht nur eine nützliche Controle, sondern er dient auch dazu, die langwierigen Rechnungen wesentlich abzukürzen.

Eine eingehendere Untersuchung dieser interessanten Beziehungen, welche bei Herstellung der Gleichungen (145) bis (152) bereits vortreffliche Dienste geleistet haben, bleibt einer späteren Abhandlung vorbehalten.

§ 20.

Berechnung der Grössen G_1, G_2, G_3 für $n = 5$ und $n = 7$.

Für $n = 5$ wird nach den Auseinandersetzungen in § 4

$$(153)\qquad \sigma\left(u \,\Big|\, \frac{\varpi}{5}, \varpi'\right) = e^{G_1 u^2} \sigma^5 u(\wp^2 u - G_1 \wp u + G_2),$$

wobei man nach den in § 9 gegebenen Methoden G_1 und G_2 leicht als Functionen von f darstellen kann; man braucht nur die Gleichungen (66) und (67) oder die Gleichungen (76) anzuwenden. Die Rechnung selbst bietet, nachdem die L-Gleichung bekannt ist, keine theoretischen Schwierigkeiten mehr; und zwar findet man

$$(154)\qquad \begin{cases} 18g_3G_1 = -g_2\Delta f^4 + \Delta f^2 - 2g_2^2 - 7g_2f^{-2} + 5f^{-4}, \\ 12G_2 = \Delta f^4 + g_2 + 7f^{-2}. \end{cases}$$

Für $n = 7$ wird in ähnlicher Weise

$$(155)\qquad \sigma\left(u \,\Big|\, \frac{\varpi}{7}, \varpi'\right) = e^{G_1 u^2} \sigma^7 u(\wp^3 u - G_1 \wp^2 u + G_2 \wp u - G_3),$$

wobei

$$(156)\qquad \begin{cases} 12g_2G_1 = \Delta^3 f^{10} + 13\Delta^2 f^6 + 47\Delta f^2 - 54g_3 + 14f^{-2}, \\ 12g_2^2G_2 = -3g_3\Delta^3 f^{10} - 39g_3\Delta^2 f^6 - \Delta^2 f^4 - 159g_3\Delta f^2 \\ \qquad\qquad - 6\Delta + 81g_3^2 - 132g_3f^{-2} + 7f^{-4}, \\ 144G_3 = \Delta^3 f^{10} + 13\Delta^2 f^6 + 59\Delta f^2 - 18g_3 + 74f^{-2}. \end{cases}$$

§ 21.

Berechnung der Invarianten $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ und $\bar{\gamma}_2$, $\bar{\gamma}_3$ der transformirten Function für $n = 5$ und für $n = 7$.

Die Werthe der Invarianten $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ der transformirten Function sind nach den Gleichungen (77a) und (78a)

$$\bar{g}_2 = n^2 g_2 + \frac{4}{3} n^2 f^2 D^2(f^{-2}), \qquad \bar{g}_3 = \frac{n}{18} f^8 D(f^{-8}\bar{g}_2).$$

Ist $n = 5$, so wird

$$\Delta^2 f^{12} + 10\Delta f^6 - 12 g_2 f^2 + 5 = 0,$$

also

$$D(f) = \frac{18 g_3}{\Delta^2 f^9 + 5\Delta f^3 - 2 g_2 f^{-1}}$$

$$= \frac{1}{30 g_3} (\Delta^2 f^9 + g_2 \Delta f^5 + 9\Delta f^3 + 2 g_2^2 f - 5 g_2 f^{-1}),$$

$$D(f^{-2}) = \frac{-1}{15 g_3} (\Delta^2 f^6 + g_2 \Delta f^2 + 9\Delta + 2 g_2^2 f^{-2} - 5 g_2 f^{-4}),$$

$$D^2(f^{-2}) = \frac{1}{25} (15\Delta f^2 - 18 g_2 f^{-2} + 195 f^{-4}).$$

Dies giebt

$$\bar{g}_2 - g_2 = 20(\Delta f^4 + 13 f^{-2}) \text{ und } L^8 \bar{\gamma}_2 - \gamma_2 = 20(L^4 + 13 L^{-2}). \tag{157}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$F_1 = \Delta^2 f^{10} + 5\Delta f^4 - 2 g_2,$$

so folgt hieraus

$$F_1 D(f^{-8} \bar{g}_2) = - 18 g_3 (85 \Delta f^{-4} - 2 g_2 f^{-8} + 2605 f^{-10}),$$

oder

$$\left\{\begin{aligned} & F_1 (\bar{g}_3 - g_3) = - 420 g_3 (\Delta f^4 + 31 f^{-2}), \\ & L^{12} \bar{\gamma}_3 - \gamma_3 = \frac{-420 \gamma_3 (L^4 + 31 L^{-2})}{L^{10} + 5 L^4 - 2\gamma_2}. \end{aligned}\right. \tag{158}$$

Für $n = 7$ ist die f-Gleichung

$$\Delta^4 f^{16} + 14\Delta^3 f^{12} + 63\Delta^2 f^8 + 70\Delta f^4 + 216 g_3 f^2 - 7 = 0.$$

Hier sei

$$28 F_1 = 8\Delta^4 f^{14} + 84\Delta^3 f^{10} + 252\Delta^2 f^6 + 140\Delta f^2 + 216 g_3$$

$$= - 28(\Delta^3 f^{10} + 9\Delta^2 f^6 + 15\Delta f^2 + 54 g_3 - 2 f^{-2}),$$

dann wird

$$D(f^{-2}) = \frac{54 g_2^2}{7 F_1 f^2} = \frac{1}{14 g_2} (\Delta^3 f^8 + 13 \Delta^2 f^4 + 47\Delta - 54 g_3 f^{-2} + 14 f^{-4}),$$

$$D^2(f^{-2}) = \frac{27 g_2}{49 F_1} (3\Delta^3 f^8 + 37 \Delta^2 f^4 + 105\Delta + 72 g_3 f^{-2} + 14 f^{-4}).$$

Daraus folgt

$$\bar{g}_2 - 49 g_2 = \frac{12 g_2}{F_1} (9\Delta^3 f^{10} + 111 \Delta^2 f^6 + 315 \Delta f^2 + 216 g_3 + 42 f^{-2}),$$

$$48 g_2 = \frac{12 g_2}{F_1} (- 4\Delta^3 f^{10} - 36\Delta^2 f^6 - 60 \Delta f^2 - 216 g_3 + 8 f^{-2}),$$

also

$$\bar{g}_2 - g_2 = \frac{60 g_2}{F_1} (\Delta^3 f^{10} + 15\Delta^2 f^6 + 51 \Delta f^2 + 10 f^{-2}). \tag{159}$$

Hieraus ergiebt sich dann nach einigen Zwischenrechnungen

$$3 (\bar{g}_3 - g_3) = 7 (\Delta^3 f^{10} + 43\Delta^2 f^6 + 467 \Delta f^2 + 1634 f^{-2}). \tag{160}$$

In dem Falle, wo die L-Gleichung die Grösse γ_2 nur in der ersten Potenz, die Grösse γ_3 aber gar nicht enthält, wie das bei $n = 5$ eintritt, kann man $\bar{\gamma}_2$ noch einfacher berechnen. Es ist nämlich z. B. für $n = 5$

$$L^{12} + 10L^6 - 12\gamma_2 L^2 + 5 = 0. \tag{161}$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist

$$L_\infty^2 = \frac{Q^2\left(\frac{\omega}{5}, \omega'\right)}{Q^2(\omega, \omega')}$$

und $\bar{\gamma}_2$ sei die absolute Invariante der ihr entsprechenden transformirten Function. Wendet man auf diese nochmals eine Transformation 5^{ten} Grades an, so erhält man die Gleichung

$$\bar{L}^{12} + 10\bar{L}^6 - 12\bar{\gamma}_2\bar{L}^2 + 5 = 0, \tag{161a}$$

welche nach Gleichung (137) unter anderen auch die Wurzel

$$\bar{L}_0^2 = \frac{Q^2\left(\frac{\omega}{5}, \frac{\omega'}{5}\right)}{Q^2\left(\frac{\omega}{5}, \omega'\right)}$$

hat. Nun wird aber ganz allgemein

$$Q\left(\frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right) = \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - h^{2\nu}) = \sqrt{n}\, Q(\omega, \omega'),$$

folglich wird hier

$$\bar{L}_0^2 = \frac{5}{L_\infty^2}.$$

In ähnlicher Weise findet man zu jeder Wurzel L^2 der Gleichung (161) eine zugehörige Wurzel $\bar{L}^2$ der Gleichung (161a), so dass

$$L^2\bar{L}^2 = 5$$

wird. Durch diese Beziehung geht die Gleichung (161a) über in

$$15625 + 1250L^6 - 60\bar{\gamma}_2 L^{10} + 5L^{12} = 0,$$

oder in Uebereinstimmung mit Gleichung (157) in

$$L^8\bar{\gamma}_2 - \gamma_2 = 20(L^4 + 13L^{-2}).$$

In dem Falle, wo die L-Gleichung die Grösse γ_3 nur in der ersten Potenz, die Grösse γ_2 aber gar nicht enthält, wie das bei $n = 7$ eintritt, kann man $\bar{\gamma}_3$ einfacher berechnen. Es ist z. B. für $n = 7$

$$L^{16} + 14L^{12} + 63L^8 + 70L^4 + 216\gamma_3 L^2 - 7 = 0, \tag{162}$$

und zu jeder Wurzel L^2 dieser Gleichung gibt es eine Wurzel $\bar{L}^2$ der Gleichung

(162a) $\overline{L}^{16} + 14\overline{L}^{12} + 63\overline{L}^{8} + 70\overline{L}^{4} + 216\overline{\gamma}_3\overline{L}^2 - 7 = 0,$

so dass

$$L^2\overline{L}^2 = -7$$

wird. Dies giebt dann die Gleichung

$$7^8 + 14 \,.\, 7^6 L^4 + 63 \,.\, 7^4 L^8 + 70 \,.\, 7^2 L^{12} - 216\overline{\gamma}_3 \,.\, 7 L^{14} - 7 L^{16} = 0,$$

oder in Uebereinstimmung mit Gleichung (160)

$$3(\overline{\gamma}_3 L^{12} - \gamma_3) = 7(L^{10} + 43 L^6 + 467 L^2 + 1634 L^{-2}).$$

Abschnitt V.

Theorie der f-Gleichung, wenn n eine zusammengesetzte Zahl von der Form $6l \pm 1$ ist.

§ 22.

Wiederholte Transformation.

Sind a und b zwei Primzahlen, und hat

$$n = ab$$

die Form $6l \pm 1$, so werde zunächst eine Transformation a^{ten} Grades ausgeführt, wenn $a \geqq b$ ist. Die zugehörige L-Gleichung hat dann die Wurzeln

$$L_\infty^2 = L^2\left(\frac{\omega}{a}, \omega'\right) = \frac{Q^2\left(\frac{\omega}{a}, \omega'\right)}{Q^2(\omega, \omega')},$$

$$L_r^2 = L^2\left(\omega, \frac{24r\omega + \omega'}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}} \frac{Q^2\left(\omega, \frac{24r\omega + \omega'}{a}\right)}{Q^2(\omega, \omega')},$$

wo $r = 0, 1, 2, \ldots a - 1$ zu setzen ist.*) Wählt man nun eine dieser Wurzeln heraus, bezeichnet die primitiven Perioden der zugehörigen transformirten Function $\overline{\wp}u$ mit $2\overline{\omega}$, $2\overline{\omega}'$, berechnet nach § 10 die zugehörigen Invarianten $\overline{g}_2$, $\overline{g}_3$ oder $\overline{\gamma}_2$, $\overline{\gamma}_3$ und führt eine zweite Transformation, aber vom b^{ten} Grade aus, so sind

$$\overline{L}^2\left(\frac{\overline{\omega}}{b}, \overline{\omega}'\right) = \frac{Q^2\left(\frac{\overline{\omega}}{b}, \overline{\omega}'\right)}{Q^2(\overline{\omega}, \overline{\omega}')},$$

$$\overline{L}^2\left(\overline{\omega}, \frac{24s\overline{\omega} + \overline{\omega}'}{b}\right) = (-1)^{b-1} \frac{Q^2\left(\overline{\omega}, \frac{24s\overline{\omega} + \overline{\omega}'}{b}\right)}{Q^2(\overline{\omega}, \overline{\omega}')},$$

wo $s = 0, 1, 2, \cdots b - 1$ ist, die $b + 1$ Wurzeln der neuen L-Gleichung, bei der aber die Coefficienten *ganze rationale* Functionen von $\overline{\gamma}_2$, $\overline{\gamma}_3$ sind.

---

*) $L^2\left(\omega, \frac{24r\omega + \omega'}{a}\right)$ sei gleichbedeutend mit $L^2\left(\frac{24r\omega + \omega'}{a}, -\omega\right)$.

Es werden dann

$$
(163)\left\{\begin{aligned}
L^2\left(\frac{\omega}{a},\ \omega'\right)\overline{L}^2\left(\frac{\omega}{ab},\ \omega'\right) &= \frac{Q^2\left(\frac{\omega}{ab},\ \omega'\right)}{Q^2(\omega,\ \omega')} \\
&= L^2\left(\frac{\omega}{ab},\ \omega'\right), \\
L^2\left(\frac{\omega}{a},\ \omega'\right)\overline{L}^2\left(\frac{\omega}{a},\ \frac{24s\omega+a\omega'}{ab}\right) &= (-1)^{\frac{b-1}{2}}\frac{Q^2\left(\frac{\omega}{a},\ \frac{24s\omega+a\omega'}{ab}\right)}{Q^2(\omega,\ \omega')} \\
&= L^2\left(\frac{\omega}{a},\ \frac{24s\omega+a\omega'}{ab}\right), \\
L^2\left(\omega,\ \frac{24r\omega+\omega'}{a}\right)\overline{L}^2\left(\frac{\omega}{b},\ \frac{24r\omega+\omega'}{a}\right) &= (-1)^{\frac{a-1}{2}}\frac{Q^2\left(\frac{\omega}{b},\ \frac{24r\omega+\omega'}{a}\right)}{Q^2(\omega,\ \omega')} \\
&= L^2\left(\frac{\omega}{b},\ \frac{24r\omega+\omega'}{a}\right), \\
L^2\left(\omega,\ \frac{24r\omega+\omega'}{a}\right)\overline{L}^2\left(\omega,\ \frac{24(r+as)\omega+\omega'}{ab}\right) &= (-1)^{\frac{a+b-2}{2}}\frac{Q^2\left(\omega,\ \frac{24(r+as)\omega+\omega'}{ab}\right)}{Q^2(\omega,\ \omega')} \\
&= L^2\left(\omega,\ \frac{24(r+as)\omega+\omega'}{ab}\right)
\end{aligned}\right.
$$

sämmtlich zur Transformation ab^{ten} Grades gehören; nur in dem Falle, wo $a = b$ ist, giebt

$$L^2\left(\frac{\omega}{a},\ \frac{\omega'}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}}a \quad \text{und} \quad L^2\left(\frac{\omega}{a},\ \frac{24r\omega+\omega'}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}}a$$

keine eigentliche Transformation vom Grade a^2, sondern die ganzzahlige Multiplication mit a. Diese $a+1$ Grössen L^2 sind dann also auszunehmen, so dass die Anzahl der von einander verschiedenen Grössen L^2 bei der Transformation ab^{ten} Grades gleich

$$(a+1)\,(b+1)$$

wird, wenn $a > b$ ist, und gleich

$$a(a+1),$$

wenn $a = b$ ist.

Diese Zahlen $(a+1)\,(b+1)$ oder $a(a+1)$ geben auch den Grad der Gleichung an, welcher die zur Transformation ab^{ten} Grades gehörigen Grössen L^2 genügen. Die wirkliche Bildung der L-Gleichung kann hier nämlich in folgender Weise ausgeführt werden.

Es sei $S_a(\overline{\omega},\ \overline{\omega}')$ definirt durch die Gleichung

$$S_a(\overline{\omega},\ \overline{\omega}') = L^{2a}(\overline{\omega},\ \overline{\omega}')\left[\overline{L}^{2a}\left(\frac{\overline{\omega}}{b},\ \overline{\omega}'\right) + \sum_{s=0}^{b-1}\overline{L}^{2a}\left(\overline{\omega},\ \frac{24s\overline{\omega}+\overline{\omega}'}{b}\right)\right];$$

dann wird

$$S(\bar{\omega}, \bar{\omega}') = L^{2\alpha}(\bar{\omega}, \bar{\omega}')\, G(\bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3).$$

Dabei ist $G(\bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ eine *ganze rationale* Function der Invarianten $\bar{\gamma}_2$ und $\bar{\gamma}_3$, welche zu $\wp(u \mid \bar{\omega}, \bar{\omega}')$ gehören. Da aber $\bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3$ rationale Functionen von $L^2(\bar{\omega}, \bar{\omega}')$ sind, so ist $S_\alpha(\bar{\omega}, \bar{\omega}')$ eine rationale Function von $L^2(\bar{\omega}, \bar{\omega}')$ und γ_2, γ_3. Bildet man jetzt

$$\Sigma_\alpha = \Sigma S_\alpha(\bar{\omega}, \bar{\omega}'),$$

wo sich die Summe auf alle $a + 1$ Werthepaare von $\bar{\omega}, \bar{\omega}'$ bezieht, so erhält man eine symmetrische Function der $a + 1$ Grössen $L^2(\bar{\omega}, \bar{\omega}')$, also eine rationale Function von γ_2 und γ_3.

Andererseits geht aber aus der Bildung von Σ_α hervor, dass Σ_α die Summe der α^{ten} Potenzen der $(a + 1)(b + 1)$ Grössen L^2 ist, welche zur Transformation ab^{ten} Grades gehören.

Diese $(a + 1)(b + 1)$ Grössen L^2 genügen also einer Gleichung $(a + 1)(b + 1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten mit Hülfe der Newton'schen Formeln jetzt ohne Schwierigkeit gefunden werden können.

Natürlich kann man zu dieser Gleichung auch dadurch gelangen, dass man aus der Gleichung $(a + 1)^{\text{ten}}$ Grades für $L^2\left(\frac{\omega}{a}, \omega'\right)$ und aus der Gleichung $(b + 1)^{\text{ten}}$ Grades für

$$\bar{L}\left(\frac{\omega}{ab}, \omega'\right) = \frac{L^2\left(\frac{\omega}{ab}, \omega'\right)}{L^2\left(\frac{\omega}{a}, \omega'\right)}$$

die Grösse $L^2\left(\frac{\omega}{a}, \omega'\right)$ eliminirt, nachdem man für $\bar{\gamma}_2$ und $\bar{\gamma}_3$ ihre Werthe als rationale Functionen von $L^2\left(\frac{\omega}{a}, \omega'\right)$ eingesetzt hat.

In dem Falle, wo $a = b$ ist, sondert sich der Factor $(L^2 \pm a)^{a+1}$ ab, so dass für L^2 nur eine Gleichung von $a(a + 1)^{\text{ten}}$ Grade übrig bleibt.

Das beschriebene Verfahren kann man beliebig fortsetzen und dadurch die Transformation für jeden zusammengesetzten Transformationsgrad auf den Fall zurückführen, wo dieser Grad eine Primzahl ist.

Man findet dadurch auch unmittelbar, dass bei einer Transformation n^{ten} Grades, wo

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

und $a, b, c, \ldots$ von einander verschiedene Primzahlen von der Form $6l \pm 1$ sind, die Anzahl der möglichen Transformationen gleich

$$T(n) = n\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)\cdots$$

ist, und dass diese Zahl auch den Grad der zugehörigen L-Gleichung angiebt. (Man vergleiche hiermit die Auseinandersetzungen in § 5.)

Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass auch hier die L-Gleichung nur der Kürze wegen statt der f-Gleichung benutzt ist, in welche sie durch die Substitutionen

$$L = Q^{n-1} f, \qquad \gamma_2 = \frac{g_2}{Q^8}, \qquad \gamma_3 = \frac{g_3}{Q^{12}}$$

übergeht.

§ 23.

Reduction der f-Gleichung, wenn n ein Quadrat von der Form $6l + 1$ ist.

Die f-Gleichung, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die L-Gleichung reducirt sich wesentlich, wenn n ein Quadrat von der Form $6l + 1$ ist. Es lässt sich dann nämlich zeigen, dass nicht nur f^2, sondern schon f selbst die Wurzel einer Gleichung $T(n)^{\text{ten}}$ Grades ist, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

Es sei zunächst n gleich a^2 und $a = 2\tau + 1$ eine Primzahl; ferner sei g in Bezug auf den Modul n eine primitive Wurzel, so dass

$$(164) \qquad \begin{cases} g^{2\tau} \equiv +1 \ (\text{mod. } a), & g^{\tau} \equiv -1 \ (\text{mod. } a), \\ g^{2a\tau} \equiv +1 \ (\text{mod. } n), & g^{a\tau} \equiv -1 \ (\text{mod. } n) \end{cases}$$

wird. Bildet man jetzt den Ausdruck

$$y = \prod_{\beta=0}^{a\tau-1} \frac{\wp\left(\frac{2g^\beta\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{4g^\beta\varpi}{n}\right)}{\wp'\left(\frac{2g^\beta\varpi}{n}\right)} \prod_{\gamma=0}^{\tau-1} \frac{\wp\left(\frac{2g^\gamma\varpi}{a}\right) - \wp\left(\frac{4g^\gamma\varpi}{a}\right)}{\wp'\left(\frac{2g^\gamma\varpi}{a}\right)},$$

so wird nach Gleichung (47) y gleich $\pm f$, denn die Grössen $\wp\left(\frac{2g^\beta\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{4g^\beta\varpi}{n}\right)$ sind identisch mit den Grössen $\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)$, bei denen α den Factor a nicht enthält, während die Grössen $\wp\left(\frac{2g^\gamma\varpi}{a}\right) - \wp\left(\frac{4g^\gamma\varpi}{a}\right)$ mit den übrigen Differenzen $\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)$ übereinstimmen. Ebenso sind, abgesehen vom Vorzeichen, $\wp'\left(\frac{2g^\gamma\varpi}{a}\right)$ und $\wp'\left(\frac{2g^\beta\varpi}{n}\right)$ mit den Grössen $\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$ identisch, je nachdem α durch a theilbar ist oder nicht.

Da nun $\wp(2u)$, $\wp(gu)$, $\wp(au)$, $\frac{\wp'(gu)}{\wp' u}$ rationale Functionen von $\wp u$ sind, und da im Nenner von y die Anzahl der Factoren gleich $a\tau + \tau$ gleich $(a + 1)\tau$ gleich $2\tau(\tau + 1)$ immer *gerade* ist, so ist y sicher eine *rationale* Function von $\wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right)$, also

$$y = F\left(\wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right)\right).$$

Ausserdem wird aber wegen der Congruenzen (164)

$$\frac{\wp\left(\frac{2g^{a\tau}\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{4g^{a\tau}\varpi}{n}\right)}{\wp'\left(\frac{2g^{a\tau}\varpi}{n}\right)}=-\frac{\wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{4\varpi}{n}\right)}{\wp'\left(\frac{2\varpi}{n}\right)},$$

$$\frac{\wp\left(\frac{2g^{\tau}\varpi}{a}\right)-\wp\left(\frac{4g^{\tau}\varpi}{a}\right)}{\wp'\left(\frac{2g^{\tau}\varpi}{a}\right)}=-\frac{\wp\left(\frac{2\varpi}{a}\right)-\wp\left(\frac{4\varpi}{a}\right)}{\wp'\left(\frac{2\varpi}{a}\right)}.$$

Es ändert sich daher y gar nicht, wenn man $\frac{2\varpi}{n}$ mit $\frac{2g\varpi}{n}$ vertauscht, d. h. y, und deshalb auch f, ist eine cyklische Function von

$$\wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right),\quad \wp\left(\frac{2g\varpi}{n}\right),\quad \wp\left(\frac{2g^2\varpi}{n}\right),\quad \cdots \wp\left(\frac{2g^{a\tau-1}\varpi}{n}\right).$$

Damit ist bewiesen, dass in diesem Falle nicht nur f^2, sondern schon f *selbst* einer Gleichung genügt, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind. Man kann diesen Satz auch so fassen: Ist $n=a^2$ und a eine Primzahl von der Form $6l\pm1$, so genügt nicht nur L^2, sondern schon L *selbst* einer Gleichung $a(a+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von γ_2 und γ_3 sind.

Diesen Satz kann man noch in dem Sinne verallgemeinern, dass n auch das Quadrat einer beliebig zusammengesetzten Zahl von der Form $6l\pm1$ sein darf; nur ist dann der Grad der betreffenden Gleichung $T(n)$. Ist z. B.

$$n=a^2b^2,$$

so kann man zuerst eine Transformation vom Grade a^2 und dann eine Transformation vom Grade b^2 vornehmen. Dadurch erhält man zuerst eine Gleichung $a(a+1)^{\text{ten}}$ Grades zwischen

$$L\left(\frac{\omega}{a^2},\omega\right),\quad \gamma_2,\quad \gamma_3;$$

sodann eine Gleichung $b(b+1)^{\text{ten}}$ Grades zwischen

$$\overline{L}\left(\frac{\omega}{n},\omega'\right)=\frac{L\left(\frac{\omega}{n},\omega'\right)}{L\left(\frac{\omega}{a^2},\omega'\right)},\quad \overline{\gamma}_2,\quad \overline{\gamma}_3,$$

wo $\overline{\gamma}_2$, $\overline{\gamma}_3$ noch rationale Functionen von $L\left(\frac{\omega}{a^2},\omega'\right)$, γ_2, γ_3 sind. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen $L\left(\frac{\omega}{a^2},\omega'\right)$, so erhält man eine Gleichung $a(a+1)\,b(b+1)^{\text{ten}}$ Grades für $L\left(\frac{\omega}{n},\omega'\right)$, wenn

$a > b$ ist. Dagegen reducirt sich der Grad der Gleichung auf $a^3(a+1)$, wenn $a = b$ ist.

In ähnlicher Weise findet man durch wiederholte Transformation den Satz, auch wenn

$$n = a^{2\alpha} b^{2\beta} c^{2\gamma} \ldots$$

und von der Form $6l + 1$ ist.

§ 24.

Die $a(a+1)$ Wurzeln der f-Gleichung, wenn n das Quadrat einer Primzahl ist und die Form $6l + 1$ hat.

Beschränken wir uns jetzt auf den Fall, wo n das Quadrat einer Primzahl a ist und die Form $6l + 1$ hat; so lassen sich die Wurzeln der f-Gleichung sehr leicht angeben, wenn man von den Untersuchungen in Abschnitt III Gebrauch macht.

Setzt man nämlich

$$(166) \quad f_\infty = f\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right) = \frac{Q\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right)}{Q^n(\omega, \omega')} = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}} a \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - h^{2n\nu}}{(1 - h^{2\nu})^n},$$

so wird f_∞ nach den Angaben des vorigen Paragraphen eine rationale Function von $\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right)$, welche in $f_{r,s}$ übergeht, wenn man die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten Perioden

$$48(r + as)\omega + 2\omega', \quad -2\omega$$

vertauscht, wobei r und s die Werthe $0, 1, 2, \ldots a - 1$, (also $r + as$ die Werthe $0, 1, 2, \ldots n - 1$) durchlaufen. Dies giebt die n Wurzeln

$$(167) \qquad f_{r,s} = \frac{Q\left(\frac{24(r+as)\omega + \omega'}{n}, -\omega\right)}{Q^n[24(r+as)\omega + \omega', -\omega]}.$$

Nun ist aber nach Tabelle (134a)

$$\varrho\begin{pmatrix} p, & 1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{12}(p+q'-3)},$$

also

$$\varrho\begin{pmatrix} 24(r+as), & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \quad \text{und} \quad \varrho\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = e^{-\frac{\pi i}{4}};$$

folglich wird

$$Q[24(r+as)\omega + \omega', -\omega] = e^{-\frac{\pi i}{4}} Q(\omega, \omega'),$$

$$Q\left(\frac{24(r+as)\omega + \omega'}{n}, -\omega\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}} Q\left(\omega, \frac{24(r+as)\omega + \omega'}{n}\right).$$

Da nun ausserdem $n-1=a^2-1$ sicher durch 8 theilbar ist, so wird

$$(168)\quad f_{r,s}=\frac{Q\left(\omega,\frac{24(r+as)\omega+\omega'}{n}\right)}{Q^n(\omega,\omega')}=\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}}h^{\frac{-n^2+1}{12n}}\varepsilon^{r+as}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-h^{\frac{2\nu}{n}}\varepsilon^{24(r+as)\nu}}{(1-h^{2\nu})^n},$$

wobei $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist. Die noch übrigen $a-1$ Wurzeln $f_1, f_2, \ldots f_{a-1}$ der f-Gleichung erhält man aus f_∞, indem man die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten Perioden

$$(169)\quad 2\varpi=48t\omega+2a\omega',\qquad 2\varpi'=2p'\omega+2q'\omega'$$

vertauscht. Dabei durchläuft t die Werthe $1, 2, \ldots a-1$, während die ganzen Zahlen p' und q' für jeden Werth von t aus der diophantischen Gleichung

$$(170)\quad 24tq'-ap'=+1$$

bestimmt werden. Dadurch erhält man

$$(171)\quad f_t=\frac{Q\left(\frac{24t\omega+a\omega'}{n},\ p'\omega+q'\omega'\right)}{Q^n(24t\omega+a\omega',\ p'\omega+q'\omega')}.$$

Jetzt ist aber

$$Q(24t\omega+a\omega',p'\omega+q'\omega')=\varrho\begin{pmatrix}24t, & a\\ p', & q'\end{pmatrix}Q(\omega,\omega'),$$

$$Q\left(\frac{24t\omega+a\omega'}{n},p'\omega+q'\omega'\right)=\varrho\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & aq'\end{pmatrix}Q\left(\frac{\omega}{a},\frac{24t\omega+a\omega'}{n}\right).$$

Dies giebt

$$(172)\quad f_t=e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)}\left[\varrho\begin{pmatrix}24t, & a\\ p', & q'\end{pmatrix}\right]^{-n}\frac{Q\left(\frac{\omega}{a},\frac{24t\omega+a\omega'}{n}\right)}{Q^n(\omega,\omega')},$$

oder, wenn man der Kürze wegen den Factor $\varrho\begin{pmatrix}24t, & a\\ p', & q'\end{pmatrix}$ mit ϱ bezeichnet,

$$(173)\quad f_t=e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)}\varrho^{-n}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{a}\,h^{\frac{-n+1}{12}}\varepsilon^{at}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^{24at\nu}}{(1-h^{2\nu})^n}.$$

Diese Darstellung der Wurzeln hat den Vorzug, dass sie sämmtlich denselben Nenner haben, und dass sich die Zähler nach Potenzen von h entwickeln lassen. Da man nun die Coefficienten der f-Gleichung ihrer Form nach genau angeben kann, so ist es durch Ausführung dieser Entwickelungen mit Hülfe der Newton'schen Formeln möglich, die f-Gleichung selbst vollständig herzustellen. Wenn auch die wiederholte Transformation schneller zum Ziele führt, so liegt in diesem Umstande doch eine werthvolle Methode, die Richtigkeit der gefundenen Resultate zu prüfen.

§ 25.

Die Transformation 25ten Grades.

Die Untersuchungen der vorhergehenden Paragraphen sollen zunächst auf den Fall $n = 25$ angewendet werden. Nach Gleichung (166) ist die erste Wurzel der f-Gleichung hier

$$(174)\qquad f_\infty = \frac{Q\left(\frac{\omega}{25}, \omega'\right)}{Q^{25}(\omega, \omega')} = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{12} 5 \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{50\nu}}{(1-h^{2\nu})^{25}};$$

weitere 25 Wurzeln liefert die Gleichung (168), nämlich

$$(175)\qquad f_{r,s} = \frac{Q\left(\omega, \frac{24(r+5s)\omega+\omega'}{25}\right)}{Q^{25}(\omega, \omega')} = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{12} h^{-\frac{52}{25}} \varepsilon^{r+5s} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{\frac{2\nu}{25}} \varepsilon^{24(r+5s)\nu}}{(1-h^{2\nu})^{25}}.$$

Die vier noch übrigen Wurzeln sind nach Gleichung (173) zu bilden, wobei zuerst der Factor ϱ zu bestimmen ist. Nach Tabelle (134a) wird

$$\text{für } t=1 \quad \varrho\begin{pmatrix}24, 5\\19, 4\end{pmatrix} = e^{\frac{5\pi i}{12}}, \quad e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)} \varrho^{-n} = e^{-9\pi i} = -1,$$

$$\text{„} \quad t=2 \quad \varrho\begin{pmatrix}48, 5\\19, 2\end{pmatrix} = e^{\frac{7\pi i}{12}}, \quad e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)} \varrho^{-n} = e^{-14\pi i} = +1,$$

$$\text{„} \quad t=3 \quad \varrho\begin{pmatrix}72, 5\\43, 3\end{pmatrix} = e^{\frac{12\pi i}{12}}, \quad e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)} \varrho^{-n} = e^{-24\pi i} = +1,$$

$$\text{„} \quad t=4 \quad \varrho\begin{pmatrix}96, 5\\19, 1\end{pmatrix} = e^{\frac{14\pi i}{12}}, \quad e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)} \varrho^{-n} = e^{-29\pi i} = -1.$$

Bezeichnet man also der Kürze wegen $Q(\omega, \omega')$ mit Q, so wird

$$(176)\quad \begin{cases} Q^{25} f_1 = -Q\left(\frac{\omega}{5}, \frac{5\omega'+24\omega}{25}\right) = -\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{5}\, h^{\frac{1}{12}} \varepsilon^{5} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu}\varepsilon^{120\nu}), \\ Q^{25} f_2 = +Q\left(\frac{\omega}{5}, \frac{5\omega'+48\omega}{25}\right) = +\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{5}\, h^{\frac{1}{12}} \varepsilon^{10} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu}\varepsilon^{240\nu}), \\ Q^{25} f_3 = +Q\left(\frac{\omega}{5}, \frac{5\omega'+72\omega}{25}\right) = +\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{5}\, h^{\frac{1}{12}} \varepsilon^{15} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu}\varepsilon^{360\nu}), \\ Q^{25} f_4 = -Q\left(\frac{\omega}{5}, \frac{5\omega'+96\omega}{25}\right) = -\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{5}\, h^{\frac{1}{12}} \varepsilon^{20} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu}\varepsilon^{480\nu}). \end{cases}$$

Die L-Gleichung für $n = 25$ findet man übrigens am schnellsten wohl in folgender Weise. Es sei

$$L = Q^{24} f_\infty = \frac{Q\left(\frac{\omega}{25}, \omega'\right)}{Q(\omega, \omega')}, \quad x = \frac{Q\left(\frac{\omega}{5}, \omega'\right)}{Q(\omega, \omega')}, \quad \bar{x} = \frac{Q\left(\frac{\omega}{25}, \omega'\right)}{Q\left(\frac{\omega}{5}, \omega'\right)} = \frac{L}{x}.$$

Dann ist nach Gleichung (145)

$$x^{12} + 10x^6 - 12\gamma_2 x^2 + 5 = 0, \tag{177}$$

und wenn man die Transformation wiederholt,

$$\bar{x}^{12} + 10\bar{x}^6 - 12\bar{\gamma}_2\bar{x}^2 + 5 = 0,$$

oder

$$L^{12} + 10x^6 L^6 - 12\bar{\gamma}_2 x^{10} L^2 + 5x^{12} = 0. \tag{178}$$

Nun ist aber nach Gleichung (157)

$$\bar{\gamma}_2 x^{10} = 20x^6 + \gamma_2 x^2 + 260,$$

so dass Gleichung (178) übergeht in

$$L^{12} + 10x^6 L^6 - 12(20x^6 + \gamma_2 x^2 + 260) L^2 + 5x^{12} = 0. \tag{178a}$$

Jetzt lässt sich aber die linke Seite dieser Gleichung in die Factoren

$$L^2 - 5, \quad L^5 + 5L^4 + 15L^3 + 25L^2 + 25L - x^6,$$
$$L^5 - 5L^4 + 15L^3 - 25L^2 + 25L + x^6$$

zerlegen. Durch die Entwickelung nach Potenzen von h kann man hierbei noch zeigen, dass von diesen drei Factoren nur der mittelste verschwindet, folglich wird

$$x^6 = L^5 + 5L^4 + 15L^3 + 25L^2 + 25L. \tag{179}$$

Setzt man diesen Werth von x^6 in die Gleichung (177) oder in die daraus hervorgehende Gleichung

$$\begin{aligned} 1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 = {} & (x^{12} + 10x^6 + 5)^3 \\ & : (x^{12} + 22x^6 + 125)(x^{12} + 4x^6 - 1)^2 : x^6 \end{aligned} \tag{177a}$$

ein, so wird in Uebereinstimmung mit der von Herrn Gierster angegebenen Formel

$$(180)\left\{\begin{aligned} 1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 = {} & (L^{10} + 10L^9 + 55L^8 + 200L^7 + 525L^6 \\ & + 1010L^5 + 1425L^4 + 1400L^3 + 875L^2 + 250L + 5)^3 \\ & : (L^2 + 2L + 5)(L^{14} + 14L^{13} + 104L^{12} + 520L^{11} + 1925L^{10} \\ & + 5504L^9 + 12411L^8 + 22176L^7 + 33760L^5 \\ & + 26999L^4 + 14696L^3 + 4616L^2 + 490L - 5)^2 \\ & : (L^5 + 5L^4 + 15L^3 + 25L^2 + 25L), \end{aligned}\right.$$

oder

$$(181)\begin{cases} L^{30}+5[6L^{29}+93L^{28}+980L^{27}+7830L^{26}+50256L^{25} \\ \quad +268400L^{24}+1220700L^{23}+4804125L^{22} \\ \quad +16546750L^{21}+50280063L^{20}+135548760L^{19} \\ \quad +325391355L^{18}+696975750L^{17} \\ \quad +1332883725L^{16}+2274011260L^{15} \\ \quad +3453611025L^{14}+4651924950L^{13} \\ \quad +5527353375L^{12}+5749995000L^{11} \\ \quad +5184120315L^{10}+3995803150L^{9} \\ \quad +2584554825L^{8}+1367125500L^{7} \\ \quad +569806000L^{6}] \\ \quad +(884232000-12^3\gamma_2^{\,3})L^5 \\ \quad +(186153750-5\cdot 12^3\gamma_2^{\,3})L^4 \\ \quad +(22292500-15\cdot 12^3\gamma_2^{\,3})L^3 \\ \quad +(1003125-25\cdot 12^3\gamma_2^{\,3})L^2 \\ \quad +(18750-25\cdot 12^3\gamma_2^{\,3})L+125=0. \end{cases}$$

Wesentlich einfacher werden diese Gleichungen, wenn man $L+1=M$ als Veränderliche einführt. Dadurch geht nämlich Gleichung (179) über in

$$(179\text{a})\qquad x^6 = M^5+5M^3+5M-11,$$

und daraus folgt

$$(180\text{a})\begin{cases} 1728\gamma_2^{\,3}:(216\gamma_3)^2:1 = (M^{10}+10M^8+35M^6-12M^5+50M^4 \\ \qquad -60M^3+25M^2-60M+16)^3 \\ \quad :(M^2+4)(M^4+3M^2+1)^2(M^{10}+10M^8 \\ \qquad +35M^6-18M^5+50M^4-90M^3 \\ \qquad +25M^2-90M+76)^2 \\ \quad :(M^5+5M^3+5M-11). \end{cases}$$

§ 26.

Die Transformation 49ten Grades.

Für $n=49$ ist

$$(182)\qquad f_\infty = \frac{Q\left(\frac{\omega}{49},\,\omega'\right)}{Q^{49}(\omega,\,\omega')} = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{24} 7 \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{98\nu}}{(1-h^{2\nu})^{49}};$$

dann liefert die Gleichung (168) weiter die 49 Wurzeln

$$(183)\quad f_{r,s} = \frac{Q\left(\omega,\,\frac{24(r+7s)\omega+\omega'}{49}\right)}{Q^{49}(\omega,\,\omega')} = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{24} h^{-\frac{200}{49}} \varepsilon^{r+7s} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{\frac{2\nu}{49}}\varepsilon^{24(r+7s)\nu}}{(1-h^{2\nu})^{49}}.$$

Die sechs noch übrigen Wurzeln sind nach Gleichung (173) zu bilden, und zwar wird nach Tabelle (134a)

$$\text{für } t=1 \quad \varrho\begin{pmatrix}24,7\\17,5\end{pmatrix}=e^{\frac{\pi i}{6}}, \quad e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)}\varrho^{-n}=e^{-\frac{11\pi i}{2}}=+i,$$

$$\text{„} \quad t=2 \quad \varrho\begin{pmatrix}48,7\\41,6\end{pmatrix}=e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)}\varrho^{-n}=e^{-\frac{67\pi i}{2}}=+i,$$

$$\text{„} \quad t=3 \quad \varrho\begin{pmatrix}72,7\\41,4\end{pmatrix}=e^{\frac{7\pi i}{12}}, \quad e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)}\varrho^{-n}=e^{-\frac{53\pi i}{2}}=-i,$$

$$\text{„} \quad t=4 \quad \varrho\begin{pmatrix}96,7\\41,3\end{pmatrix}=e^{\pi i}, \quad e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)}\varrho^{-n}=e^{-\frac{95\pi i}{2}}=+i,$$

$$\text{„} \quad t=5 \quad \varrho\begin{pmatrix}120,7\\17,1\end{pmatrix}=e^{\frac{5\pi i}{6}}, \quad e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)}\varrho^{-n}=e^{-\frac{81\pi i}{2}}=-i,$$

$$\text{„} \quad t=6 \quad \varrho\begin{pmatrix}144,7\\41,2\end{pmatrix}=e^{\frac{17\pi i}{12}}, \quad e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)}\varrho^{-n}=e^{-\frac{137\pi i}{2}}=-i.$$

Daraus folgt

$$(184)\begin{cases}
Q^{49}f_1=+i\,Q\left(\frac{\omega}{7},\ \frac{24\omega+7\omega'}{49}\right)=+i\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{7}\,h^{\frac{1}{12}}\,\varepsilon^{7}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}\varepsilon^{168\nu}),\\[2ex]
Q^{49}f_2=+i\,Q\left(\frac{\omega}{7},\ \frac{48\omega+7\omega'}{49}\right)=+i\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{7}\,h^{\frac{1}{12}}\,\varepsilon^{14}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}\varepsilon^{336\nu}),\\[2ex]
Q^{49}f_3=-i\,Q\left(\frac{\omega}{7},\ \frac{72\omega+7\omega'}{49}\right)=-i\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{7}\,h^{\frac{1}{12}}\,\varepsilon^{21}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}\varepsilon^{504\nu}),\\[2ex]
Q^{49}f_4=+i\,Q\left(\frac{\omega}{7},\ \frac{96\omega+7\omega'}{49}\right)=+i\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{7}\,h^{\frac{1}{12}}\,\varepsilon^{28}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}\varepsilon^{672\nu}),\\[2ex]
Q^{49}f_5=-i\,Q\left(\frac{\omega}{7},\ \frac{120\omega+7\omega'}{49}\right)=-i\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{7}\,h^{\frac{1}{12}}\,\varepsilon^{35}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}\varepsilon^{840\nu}),\\[2ex]
Q^{49}f_6=-i\,Q\left(\frac{\omega}{7},\ \frac{144\omega+7\omega'}{49}\right)=-i\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{7}\,h^{\frac{1}{12}}\,\varepsilon^{42}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}\varepsilon^{1008\nu}).
\end{cases}$$

Mit Hülfe der Newton'schen Formeln könnte man jetzt die L-Gleichung bilden. Es soll aber lieber die wiederholte Transformation benutzt werden. Es sei

$$L = Q^{48} f_\infty = \frac{Q\left(\frac{\omega}{49}, \omega'\right)}{Q(\omega, \omega')}, \quad x = \frac{Q\left(\frac{\omega}{7}, \omega'\right)}{Q(\omega, \omega')}, \quad \bar{x} = \frac{Q\left(\frac{\omega}{49}, \omega'\right)}{Q\left(\frac{\omega}{7}, \omega'\right)} = \frac{L}{x},$$

dann ist nach Gleichung (146)

$$x^{16} + 14x^{12} + 63x^8 + 70x^4 + 216\gamma_3 x^2 - 7 = 0, \tag{185}$$

und wenn man die Transformation wiederholt,

$$\bar{x}^{16} + 14\bar{x}^{12} + 63\bar{x}^8 + 70\bar{x}^4 + 216\bar{\gamma}_3\bar{x}^2 - 7 = 0,$$

oder

$$L^{16} + 14x^4 L^{12} + 63x^8 L^8 + 70x^{12} L^4 + 216\bar{\gamma}_3 x^{14} L^2 - 7x^{16} = 0. \tag{186}$$

Nun ist aber nach Gleichung (160)

$$3\bar{\gamma}_3 x^{14} = 7(x^{12} + 43x^8 + 467x^4 + 1634) + 3\gamma_3 x^2,$$

so dass Gleichung (186) übergeht in

$$\begin{aligned} &L^{16} + 14x^4 L^{12} + 63x^8 L^8 + 70x^{12} L^4 \\ &\quad + 504(x^{12} + 43x^8 + 467x^4 + 1634)L^2 + 216\gamma_3 x^2 L^2 - 7x^{16} = 0. \end{aligned} \tag{186a}$$

Jetzt lässt sich aber die linke Seite dieser Gleichung in die Factoren

$$\begin{aligned} &L^2 + 7, \quad L^7 + 7L^6 + 21L^5 + 49L^4 + 7(x^4 + 21)L^3 + 7(5x^4 + 49)L^2 \\ &\qquad + 49(x^4 + 7)L - x^8, \\ &L^7 - 7L^6 + 21L^5 - 49L^4 + 7(x^4 + 21)L^3 - 7(5x^4 + 49)L^2 \\ &\qquad + 49(x^4 + 7)L + x^8 \end{aligned}$$

zerlegen. Die Entwickelung nach Potenzen von h zeigt, dass von diesen drei Factoren nur der zweite verschwinden kann. Man erhält also die Gleichung

$$\begin{aligned} &L^7 + 7L^6 + 21L^5 + 49L^4 + 147L^3 + 343L^2 + 343L \\ &\quad + 7(L^3 + 5L^2 + 7L)x^4 - x^8 = 0. \end{aligned} \tag{187}$$

Um die Elimination von x zu vereinfachen, bringt man die Gleichung (185) auf die Form

$$\begin{aligned} 1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 &= (x^8 + 13x^4 + 49)(x^8 + 5x^4 + 1)^3 \\ &\quad : (x^{16} + 14x^{12} + 63x^8 + 70x^4 - 7)^2 : x^4. \end{aligned} \tag{185a}$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (187) und (185a) die Grösse x^4, so erhält man die L-Gleichung für $n = 49$.

Auch hier tritt eine wesentliche Vereinfachung ein, wenn man $L + 1 = M$ als Veränderliche einführt. Dadurch geht nämlich die Gleichung (187) über in

$$\begin{aligned} &M^7 + 14M^4 + 56M^3 + 70M^2 - 28M - 113 \\ &\quad + 7(M^3 + 2M^2 - 3)x^4 - x^8 = 0. \end{aligned} \tag{187a}$$

Abschnitt VI.

Theorie der f-Gleichung, wenn n eine zusammengesetzte Zahl von der Form $6l \pm 2$ ist.

§ 27.

Die Transformation zweiten Grades.

Wenn n die Factoren 2 oder 3 besitzt, so modificiren sich die in den beiden vorhergehenden Paragraphen für $n = 6l \pm 1$ angegebenen Beziehungen in dem Sinne, dass erst eine höhere Potenz von f die Wurzel einer Gleichung $T(n)^{\text{ten}}$ Grades wird, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

Schon für $n = 2$ wird nicht mehr die Hülfsgrösse f^2, sondern erst f^8 die Wurzel einer Gleichung 3^{ten} Grades von der verlangten Eigenschaft. Um in diesem Falle die f-Gleichung zu bilden, kann man das folgende Verfahren einschlagen.

Nach Gleichung (32) wird für $n = 2$

$$f_\infty^2 = -\sigma_{1,0} = e^{-\frac{\eta\omega}{2}}\sigma\omega,$$

oder, wenn man Gleichung (1) auf Seite 25 der Formelsammlung des Herrn Schwarz benutzt,

$$f_\infty^2 = \frac{1}{\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}},$$

also

$$f_\infty^8 = \frac{Q^8\left(\frac{\omega}{2}, \omega'\right)}{Q^{16}(\omega, \omega')} = \frac{1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} = \frac{4(e_2 - e_3)}{Q^{12}}, \tag{188}$$

da

$$Q^{12} = Q^{12}(\omega, \omega') = 4(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)$$

ist. Ferner wird

$$4(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = 12e_1^2 - g_2 = 12\wp\omega - g_2,$$

folglich ist f_∞^8 eine rationale Function von $\wp\omega$, die in f_r^8 übergeht, wenn man die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten Perioden $6r\omega + 2\omega'$, -2ω vertauscht, wobei r die Werthe 0 und 1 hat. Daraus folgt

$$(189)\quad \begin{cases} f_0^8 = \dfrac{Q^8\left(\frac{\omega'}{2}, -\omega\right)}{Q^{16}(\omega', -\omega)} = \dfrac{Q^8\left(\omega, \frac{\omega'}{2}\right)}{Q^{16}(\omega, \omega')} = \dfrac{1}{(e_3 - e_2)(e_3 - e_1)} = \dfrac{4(e_1 - e_2)}{Q^{12}}, \\[2ex] f_1^8 = \dfrac{Q^8\left(\frac{3\omega + \omega'}{2}, -\omega\right)}{Q^{16}(3\omega + \omega', -\omega)} = \dfrac{Q^8\left(\omega, \frac{3\omega + \omega'}{2}\right)}{Q^{16}(\omega, \omega')} = \dfrac{1}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)} = \dfrac{-4(e_1 - e_3)}{Q^{12}}. \end{cases}$$

Die f-Gleichung wird daher für $n = 2$

$$(190)\quad \Delta f^{24} - 12 g_2 f^8 + 16 = 0 \quad \text{oder} \quad L^{24} - 12\gamma_2 L^8 + 16 = 0.$$

Ferner wird nach Gleichung (14b), (15b) und (17b)

$$(191)\quad \begin{cases} \bar{\wp} u = \wp\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \wp u + \wp(u-\omega) - \wp\omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \wp u + \dfrac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp u - e_1}, \\ \bar{\sigma} u = \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = e^{\frac{1}{2}e_1 u^2} \sigma_1 u\, \sigma u. \end{cases}$$

Dabei ist, wie aus den Gleichungen (188) und (74) folgt,

$$(192)\quad (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = f_\infty^{-8}, \quad e_1 = \frac{-12 g_3}{\Delta f_\infty^{16} - 4 g_2} = B_1.$$

Da B_2 und B_3 in diesem Falle gleich Null sind, so findet man aus den Gleichungen (77) und (78) ohne Weiteres

$$\bar{g}_2 = 60 e_1{}^2 - 4 g_2, \qquad \bar{g}_3 = 14 g_2 e_1 + 22 g_3,$$

oder, wenn man den Werth von e_1 einsetzt,

$$(194)\quad \begin{cases} \bar{g}_2 - g_2 = 20 f_\infty^{-8}, \quad \bar{g}_3 - g_3 = \dfrac{-336 g_3 f_\infty^{-8}}{\Delta f_\infty^{16} - 4 g_2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \dfrac{7}{18 g_3}\left(\text{[illegible]}\, g_2 \Delta f_\infty^{8} - 2\Delta + 8 g_2{}^2 f_\infty^{-8}\right). \end{cases}$$

§ 28.

Die f-Gleichung, wenn n eine zusammengesetzte Zahl von der Form $6l \pm 2$ ist.

Hat n die Form $6l \pm 2$, so gelten ähnliche Schlüsse, wie in § 22; da hier aber bei der wiederholten Transformation auch die Transformation zweiten Grades verwendet werden muss, so ist es hier von vornherein zu erwarten, dass nicht f^2, sondern im Allgemeinen erst f^8 die Wurzel einer Gleichung vom Grade $T(n)$ wird, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind. Dieser Umstand macht es zweifelhaft, ob bei geradem n die Grösse f überhaupt als Hülfsgrösse zweckmässig zu verwenden ist; denn die Rechnungen werden nicht einfach genug.

Eine weitergehende Untersuchung, welche einer späteren Abhandlung vorbehalten bleibt, zeigt, dass für $n = 2$ und für $n = 4$ die Grösse f selbst noch als die einfachste Hülfsgrösse zu betrachten ist, dass man aber für $n = 8, 10, 14, 16, \ldots$ andere Hülfsgrössen einführen muss, durch welche sich $B_1, B_2, \ldots$ und die Invarianten $\bar{g}_2, \bar{g}_3$ der transformirten Function rational ausdrücken lassen.

Wenn also in dem folgenden Paragraphen ausser der Transformation 4^{ten} Grades auch noch die vom 8^{ten} Grade gegeben wird, so soll dabei ausdrücklich hervorgehoben werden, dass dem Verfasser bereits eine *weit* einfachere Methode für die Transformation 8^{ten} Grades bekannt ist. Man wird vielmehr aus dem hier folgenden Beispiel, das zu einer L-Gleichung vom 96^{ten} Grade für $n=8$ führt, erkennen, wie wünschenswerth in den hier besprochenen Fällen die Einführung einer zweckmässigeren Hülfsgrösse ist.

§ 29.

Die L-Gleichungen für $n = 4$ und $n = 8$.

Es sei

$$L^8\left(\frac{\omega}{2}, \omega'\right) = x, \quad L^8\left(\frac{\omega}{4}, \omega'\right) = y, \quad L^8\left(\frac{\omega}{8}, \omega'\right) = z,$$

dann ist nach Gleichung (190)

$$x^3 - 12\gamma_2 x + 16 = 0, \quad \text{oder} \quad 12\gamma_2 x = x^3 + 16.$$

Führt man jetzt noch eine zweite Transformation zweiten Grades aus, so wird

$$\bar{x} = \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad \bar{x}^3 - 12\bar{\gamma}_2\bar{x} + 16 = 0,$$

oder

$$y^3 - 12\bar{\gamma}_2 x^2 y + 16\, x^3 = 0.$$

Nun wird aber nach Gleichung (194)

$$\bar{\gamma}_2 x^2 = \gamma_2 x + 20,$$

also

$$y^3 - 12(\gamma_2 x + 20)y + 16x^3 = (y-16)(y^2 + 16y - 12\gamma_2 x + 16) = 0.$$

Dies giebt

$$(195) \qquad 12\gamma_2 x = y^2 + 16y + 16, \quad \text{oder} \quad x^3 = y^2 + 16y,$$

und wenn man aus diesen beiden Gleichungen x eliminirt,

$$(196) \qquad y^6 + 48y^5 + 816y^4 + 5632y^3 + (13056 - 1728\gamma_2^3)\, y^2 + (12288 - 16.1728\gamma_2^3)y + 4096 = 0,$$

oder

$$(196\text{a}) \qquad 1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 = (y^2 + 16y + 16)^3 : (y^3 + 24y^2 + 120y - 64)^2 : (y^2 + 16y).$$

Noch einfacher lässt sich diese Gleichung schreiben, wenn man $y + 8 = \eta$ als Veränderliche einführt; es wird dann

$$(196\text{b}) \qquad 1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 = (\eta^2 - 48)^3 : (\eta^3 - 72\eta)^2 : (\eta^2 - 64).$$

Dies ist die L-Gleichung für $n = 4$.

Führt man jetzt nochmals eine Transformation zweiten Grades aus und setzt

$$\frac{z}{x} = \frac{Q^8\left(\frac{\omega}{8}, \omega'\right)}{Q^8\left(\frac{\omega}{2}, \omega'\right)} = \bar{\bar{y}},$$

so erhält man in Analogie zu den Gleichungen (195)

$$(197) \qquad \bar{x}^3 = \bar{y}^2 + 16\bar{y}, \quad \text{oder} \quad y^3 = xz^2 + 16x^2 z,$$

und wenn man mit Hülfe der Gleichungen (195) x eliminirt,

$$(198) \quad 3\gamma_2(y^2+16y+16)z^2 + 4(y^2+16y+16)^2 z - 36\gamma_2^2 y^3 = 0.$$

Eliminirt man schliesslich noch y aus den bereits aufgestellten Gleichungen und setzt $z = L^8$, so erhält man für die Transformation 8^{ten} Grades die L-Gleichung

$$(199) \left\{\begin{aligned} & L^{96} - 2^7.15\gamma_2 L^{80} - 2^{12}.71 L^{72} - 2^8.35505\gamma_2^2 L^{64} \\ & \quad + (2^{19}.495\gamma_2 + 2^{14}.81\gamma_2^4) L^{56} \\ & \quad + (2^{16}.190311 + 2^{14}.1115829\gamma_2^3) L^{48} \\ & \quad + (2^{23}.175095\gamma_2^2 + 2^{19}.8505\gamma_2^5) L^{40} \\ & \quad + (2^{18}.116635995\gamma_2 - 2^{16}.43565769\gamma_2^4 - 2^{14}.2187\gamma_2^7) L^{32} \\ & \quad + (2^{25}.4498517 - 2^{24}.3597399\gamma_2^3 + 2^{21}.559143\gamma_2^6) L^{24} \\ & \quad + (2^{24}.3505815\gamma_2^2 + 2^{22}.5998455\gamma_2^5 - 2^{24}.6561\gamma_2^8) L^{16} \\ & \quad + (-2^{32}.75\gamma_2 + 2^{28}.8829\gamma_2^4 - 2^{30}.2187\gamma_2^7) L^8 + 2^{28} = 0. \end{aligned}\right.$$

Abschnitt VII.

Theorie der f-Gleichung, wenn n durch die Zahl 3 theilbar ist.

§ 30.

Die Transformation dritten Grades.

Auch bei der Transformation dritten Grades ist nicht mehr f^2, sondern erst f^6 eine rationale Function von $\wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right)$ und deshalb die Wurzel einer algebraischen Gleichung vierten Grades.

Es ist nämlich nach Gleichung (46)

$$\wp'\left(\frac{2\varpi}{3}\right) = -f^{-3}.$$

Bezeichnet man also der Kürze wegen $\wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right)$ mit $\wp$, so wird

$$(200) \qquad f^{-6} = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Nun folgt aber aus Gleichung (1)

$$\frac{4\sigma(3u)}{\sigma^9 u} = \begin{vmatrix} \wp' u & \wp'' u \\ \wp'' u & \wp''' u \end{vmatrix};$$

und da $\sigma(3u)$ verschwindet, wenn $u = \frac{2\varpi}{3}$ ist, so ist $\wp$ eine Wurzel der Gleichung

$$(201) \qquad \wp'\wp''' - \wp''^2 = 12\wp^4 - 6g_2\wp^2 - 12g_3\wp - \tfrac{1}{4}g_2^2 = 0,$$

welche in Bezug auf $\wp$ vom vierten Grade ist. Man kann daher die f-Gleichung für $n = 3$ finden, indem man $\wp$ aus den Gleichungen (200) und (201) eliminirt.

Eine kürzere Methode besteht darin, dass man die verschiedenen Wurzeln der f-Gleichung und ihre Entwickelung nach Potenzen von h berücksichtigt. Dadurch kann man sehr leicht die unbestimmten Zahlencoefficienten der f-Gleichung berechnen. Aus

$$(202) \qquad f_\infty^6 = \frac{Q^6\left(\frac{\omega}{3}, \omega'\right)}{Q^{18}(\omega, \omega')}$$

erhält man dabei durch Vertauschung der primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten Perioden $16r\omega + 2\omega'$, -2ω die 3 anderen Wurzeln

$$(203) \qquad f_r^6 = \frac{Q^6\left(\frac{8r\omega+\omega'}{3}, -\omega'\right)}{Q^{18}(8r\omega+\omega', -\omega')} = -\frac{Q^6\left(\omega, \frac{8r\omega+\omega'}{3}\right)}{Q^{18}(\omega, \omega')},$$

(vgl. die Tabelle (134a))

wobei r die Werthe 0, 1, 2 hat. Da man jetzt auch weiss, dass die f-Gleichung die Form

$$\Delta^2 f^{24} + a\Delta f^{12} + bg_3 f^6 - 27 = 0$$

haben muss, so findet man durch Entwickelung der Wurzeln nach Potenzen von h und durch Anwendung der Newton'schen Formeln

$$a = 18, \qquad b = 216.$$

Die f-Gleichung für $n = 3$ ist daher

$$(204) \qquad \Delta^2 f^{24} + 18\Delta f^{12} + 216 g_3 f^6 - 27 = 0.$$

Jetzt wird nach Gleichung (14a)

$$(205) \qquad \begin{cases} \bar{\wp} u = \wp u + \wp\left(u - \frac{2\varpi}{3}\right) + \wp\left(u + \frac{2\varpi}{4}\right) - 2G_1, \\ \bar{\sigma} u = e^{G_1 u^2}\sigma^3 u(\wp u - G_1). \end{cases}$$

Man braucht also nur noch die Grössen G_1, $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ auszurechnen.

Setzt man der Kürze wegen

$$F_1 = \Delta^2 f^{18} + 9\Delta f^6 + 54 g_3 = -9(\Delta f^6 + 18 g_3 - 3 f^{-6}),$$

so wird nach Gleichung (66)

$$G_1 = \frac{9 g_2^2}{F_1} = \frac{1}{12 g_2}(\Delta f^6 - 18 g_3 + 9 f^{-6}), \tag{206}$$

Da hier G_2 und G_3 gleich 0 sind, so folgt unmittelbar aus den Gleichungen (77) und (78)

$$\begin{cases} \bar{g}_2 = -120 B_2 + 60 B_1^2 - 9 g_2 = 120 G_1^2 - 9 g_2, \\ \bar{g}_3 = 420 B_3 - 420 B_1 B_2 + 140 B_1^3 - 21 g_2 B_1 - 27 g_3 \\ \quad = 280 G_1^3 - 42 g_2 G_1 - 27 g_3, \end{cases} \tag{207}$$

oder

$$F_1(\bar{g}_2 - g_2) = 180 g_2(\Delta f^6 + 3 f^{-6}), \quad \bar{g}_3 - g_3 = \frac{7}{3}(\Delta f^6 + 39 f^{-6}). \tag{207a}$$

§ 31.

Theorie der f-Gleichung, wenn n die Form $6l + 3$ hat.

Auch für $n = 6l + 3$ gelten ähnliche Schlüsse wie in § 22; da aber hier bei der wiederholten Transformation auch die Transformation dritten Grades verwendet werden muss, so wird *im Allgemeinen* erst f^6 die Wurzel einer Gleichung vom Grade $T(n)$ mit rationalen Coefficienten sein. Man wird also wiederum darauf hingewiesen, noch andere Hülfsgrössen in die Transformationstheorie einzuführen, um einfachere Gleichungen zu erhalten.

Eine Reduction tritt aber auch bei Benutzung der Grösse f ein, wenn $n = 6l + 3$ ein vollständiges Quadrat ist; dann wird nämlich schon f^3 einer Gleichung vom Grade $T(n)$ mit rationalen Coefficienten genügen.

Der Nachweis dieses interessanten Satzes ist nur für $n = 9$ nöthig, weil der Satz für alle Quadrate von der Form $6l + 1$ schon in § 24 bewiesen ist, wo gezeigt wurde, dass sogar schon f die angegebene Eigenschaft besitzt. Durch wiederholte Transformation ergiebt sich daher auch die Richtigkeit des Satzes für alle Quadratzahlen von der Form $9^\alpha(6l + 1)$, sobald der Satz für $n = 9$ bewiesen ist. Dieser Beweis kann leicht, wie folgt, geführt werden.

Es wird nach Gleichung (46) für $n = 9$

$$\begin{aligned} f^{-3} &= \wp'\left(\frac{2\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{4\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{8\varpi}{9}\right)\cdot\wp'\left(\frac{6\varpi}{9}\right) \\ &= \wp'\left(\frac{4\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{8\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{16\varpi}{9}\right)\cdot\wp'\left(\frac{12\varpi}{9}\right) \\ &= \wp'\left(\frac{8\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{16\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{32\varpi}{9}\right)\cdot\wp'\left(\frac{24\varpi}{9}\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f^3 eine *cyklische Function* der Grössen $\wp\left(\frac{2\varpi}{9}\right)$, $\wp\left(\frac{4\varpi}{9}\right)$, $\wp\left(\frac{8\varpi}{9}\right)$ ist, so dass also nach Satz V in § 3 f^3 die Wurzel einer Gleichung 12ten Grades mit rationalen Coefficienten sein muss.

§ 32.

Die f-Gleichung für $n = 9$.

Nach den Angaben des soeben bewiesenen Satzes ist es jetzt leicht, die f-Gleichung für $n = 9$ zu bilden. Zunächst ist

$$(208)\qquad f_\infty = \frac{Q\left(\frac{\omega}{9}, \omega'\right)}{Q^9(\omega, \omega')} = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 3 \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{18\nu}}{(1-h^{2\nu})^9}.$$

Indem man die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten Perioden $16(r+3s)\omega + 2\omega'$, -2ω vertauscht und die Tabelle (134a) passend verwendet, erhält man hieraus

$$(209)\qquad \begin{cases} f_{r,s} = \dfrac{Q\left(\frac{8(r+3s)\omega+\omega'}{9}, -\omega\right)}{Q^9(8(r+3s)\omega+\omega', -\omega)} = \dfrac{Q\left(\omega, \frac{8(r+3s)\omega+\omega'}{9}\right)}{Q^9(\omega, \omega')} \\[2ex] \quad = \left(\dfrac{\omega}{\pi}\right)^4 h^{-\frac{20}{27}} \varepsilon^{\frac{r+3s}{3}} \displaystyle\prod_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1-h^{\frac{2\nu}{9}}\varepsilon^{8(r+3s)\nu}}{(1-h^{2\nu})^9}. \end{cases}$$

Dabei haben r und s die Werthe 0, 1, 2, so dass $f_{r,s}$ im Ganzen 9 Werthe hat. Um die beiden noch fehlenden Werthe von f zu bestimmen, vertausche man in Gleichung (208) die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten Perioden $16t\omega + 6\omega'$, $10\omega + 2(3-t)\omega'$, wo t die Werthe 1 und 2 hat. Nun ist nach Tabelle (134a)

$$\text{für } t = 1 \quad \varrho\begin{pmatrix}8, 3\\5, 2\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{12}}, \qquad \text{für } t = 2 \quad \varrho\begin{pmatrix}16, 3\\5, 1\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{6}},$$

folglich wird

$$f_1 = \frac{Q\left(\frac{8\omega+3\omega'}{9}, 5\omega+2\omega'\right)}{Q^9(8\omega+3\omega', 5\omega+2\omega')} = \varrho\begin{pmatrix}0, 1\\-1, 6\end{pmatrix} e^{-\frac{9\pi i}{12}} \frac{Q\left(\frac{\omega}{3}, \frac{8\omega+3\omega'}{9}\right)}{Q^9(\omega, \omega')},$$

$$f_2 = \frac{Q\left(\frac{16\omega+3\omega'}{9}, 5\omega+\omega'\right)}{Q^9(16\omega+3\omega', 5\omega+\omega')} = \varrho\begin{pmatrix}0, 1\\-1, 3\end{pmatrix} e^{-\frac{9\pi i}{6}} \frac{Q\left(\frac{\omega}{3}, \frac{16\omega+3\omega'}{9}\right)}{Q^9(\omega, \omega')},$$

oder

$$(210)\qquad \begin{cases} f_1 = -i\dfrac{Q\left(\frac{\omega}{3}, \frac{8\omega+3\omega'}{9}\right)}{Q^9(\omega, \omega')} = -i\left(\dfrac{\omega}{\pi}\right)^4 \sqrt{3}\, h^{-\frac{2}{3}} \varepsilon \displaystyle\prod_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1-h^{2\nu}\varepsilon^{24\nu}}{(1-h^{2\nu})^9}, \\[2ex] f_2 = +i\dfrac{Q\left(\frac{\omega}{3}, \frac{16\omega+3\omega'}{9}\right)}{Q^9(\omega, \omega')} = +i\left(\dfrac{\omega}{\pi}\right)^4 \sqrt{3}\, h^{-\frac{2}{3}} \varepsilon^2 \displaystyle\prod_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1-h^{2\nu}\varepsilon^{48\nu}}{(1-h^{2\nu})^9}. \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Entwickelungen und durch Anwendung der Newton'schen Formeln kann man jetzt die einzelnen Coefficienten der f-Gleichung bilden. Einfacher kommt man jedoch auch hier durch wiederholte Transformation zum Ziele. Der Kürze wegen soll nicht die f-Gleichung, sondern die L-Gleichung gebildet werden. Es sei also

$$x = \frac{Q^3\left(\frac{\omega}{3}, \omega'\right)}{Q^3(\omega, \omega')}, \quad L^3 = \frac{Q^3\left(\frac{\omega}{9}, \omega'\right)}{Q^3(\omega, \omega')}, \quad \bar{x} = \frac{Q^3\left(\frac{\omega}{9}, \omega'\right)}{Q^3\left(\frac{\omega}{3}, \omega'\right)} = \frac{L^3}{x},$$

dann wird nach Gleichung (204)

(211) $$x^8 + 18x^4 + 216\gamma_3 x^2 - 27 = 0,$$

und wenn man noch eine zweite Transformation dritten Grades ausführt,

$$\bar{x}^8 + 18\bar{x}^4 + 216\bar{\gamma}_3\bar{x}^2 - 27 = 0,$$

oder

(212) $$L^{24} + 18x^4L^{12} + 216\bar{\gamma}_3 x^6 L^6 - 27x^8 = 0.$$

Nach Gleichung (207a) wird aber

$$3\bar{\gamma}_3 x^6 = 7x^4 + 3\gamma_3 x^2 + 273,$$

so dass Gleichung (212) übergeht in

$$L^{24} + 18x^4L^{12} + 72\,(7x^4 + 3\gamma_3 x^2 + 273)\,L^6 - 27x^8 = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung zerfällt nun in die Factoren

$$L^6 + 27, \quad L^9 + 9L^6 + 27L^3 - x^4, \quad L^9 - 9L^6 + 27L^3 + x^4.$$

Die Entwickelung nach Potenzen von h zeigt, dass nur der mittelste dieser Factoren verschwindet, es wird also

(213) $$x^4 = L^9 + 9L^6 + 27L^3 = (L^3 + 3)^3 - 27.$$

Wenn man diesen Werth von x^4 in die Gleichung (211) oder in die daraus hergeleitete Gleichung

(211a) $$1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 = (x^4+27)(x^4+3)^3 : (x^8+18x^4-27)^2 : x^4$$

einsetzt, so erhält man

(214) $$\begin{cases} 1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 = (L^3+3)^3\,(L^9 + 9L^6 + 27L^3 + 3)^3 \\ \qquad : (L^{18} + 18L^{15} + 135L^{12} + 504L^9 + 891L^6 + 486L^3 - 27)^2 \\ \qquad : (L^9 + 9L^6 + 27L^3). \end{cases}$$

Setzt man $L^3 + 3 = M$, so geht diese Gleichung über in

(214a) $$1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 = M^3(M^3-24)^3 : (M^6 - 36M^3 + 216)^2 : (M^3 - 27).$$

Von Interesse ist hierbei die Bedeutung der Ausdrücke L^3 und $L^6 + 9L^3 + 27$. Nach Gleichung (30) ist nämlich

$$
(215)\quad \begin{cases}
x^4 = L^{12}\left(\frac{\omega}{3},\, \omega'\right) = Q^{24} f^{12}\left(\frac{\omega}{3},\, \omega'\right) = Q^{24} e^{-\frac{8\eta\omega}{3}}\, \sigma^{12}\left(\frac{2\omega}{3}\right), \\
L^3 = L^3\left(\frac{\omega}{9},\, \omega'\right) = Q^{24} f^3\left(\frac{\omega}{9},\, \omega'\right) \\
\quad = Q^{24} e^{-\frac{20\eta\omega}{9}}\, \sigma^3\left(\frac{2\omega}{9}\right)\sigma^3\left(\frac{4\omega}{9}\right)\sigma^3\left(\frac{8\omega}{9}\right)\cdot \sigma^3\left(\frac{2\omega}{3}\right),
\end{cases}
$$

folglich wird nach Gleichung (213)

$$
(216)\qquad \frac{x^4}{L^3} = L^6 + 9L^3 + 27 = \frac{e^{-\frac{4\eta\omega}{9}}\, \sigma^9\left(\frac{2\omega}{3}\right)}{\sigma^3\left(\frac{2\omega}{9}\right)\sigma^3\left(\frac{4\omega}{9}\right)\sigma^3\left(\frac{8\omega}{9}\right)}.
$$

Ferner ist

$$
\prod_{\alpha=0}^{\alpha=2}\left[\wp\left(\frac{2^\alpha\cdot 2\omega}{9}\right) - \wp\left(\frac{2^\alpha\cdot 6\omega}{9}\right)\right] = -\frac{e^{\frac{4\eta\omega}{3}}}{\sigma^6\left(\frac{2\omega}{3}\right)},
$$

$$
\prod_{\alpha=0}^{\alpha=2}\left[\wp\left(\frac{2^\alpha\cdot 2\omega}{9}\right) - \wp\left(\frac{2^\alpha\cdot 4\omega}{9}\right)\right] = -\frac{e^{\frac{8\eta\omega}{9}}\, \sigma^3\left(\frac{2\omega}{3}\right)}{\sigma^3\left(\frac{2\omega}{9}\right)\sigma^3\left(\frac{4\omega}{9}\right)\sigma^3\left(\frac{8\omega}{9}\right)};
$$

deshalb wird

$$
(217)\quad \begin{cases}
L^3 = \dfrac{Q^{24}}{\prod\limits_{\alpha=0}^{\alpha=2}\left[\wp\left(\frac{2^\alpha\cdot 2\omega}{9}\right) - \wp\left(\frac{2^\alpha\cdot 6\omega}{9}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{2^\alpha\cdot 2\omega}{9}\right) - \wp\left(\frac{2^\alpha\cdot 4\omega}{9}\right)\right]}, \\
L^6 + 9L^3 + 27 = \prod\limits_{\alpha=0}^{\alpha=2} \dfrac{\wp\left(\frac{2^\alpha\cdot 2\omega}{9}\right) - \wp\left(\frac{2^\alpha\cdot 4\omega}{9}\right)}{\wp\left(\frac{2^\alpha\cdot 2\omega}{9}\right) - \wp\left(\frac{2^\alpha\cdot 6\omega}{9}\right)}.
\end{cases}
$$

§ 33.

Theorie der f-Gleichung, wenn n die Form $6l$ hat.

Die Transformation 6ten Grades kann dadurch ausgeführt werden, dass man die Transformation 3ten Grades mit der Transformation 2ten Grades combinirt. Setzt man also

$$
x = \frac{Q\left(\frac{\omega}{3},\, \omega'\right)}{Q(\omega,\, \omega')}, \quad y = \frac{Q\left(\frac{\omega}{6},\, \omega'\right)}{Q\left(\frac{\omega}{3},\, \omega'\right)}, \quad L = \frac{Q\left(\frac{\omega}{6},\, \omega'\right)}{Q(\omega,\, \omega')} = xy,
$$

so wird nach den Gleichungen (190) und (204)

$$
(218)\quad x^{24} + 18x^{12} + 216\gamma_3 x^6 - 27 = 0, \quad y^{24} - 12\overline{\gamma_2}\, y^8 + 16 = 0,
$$

wobei nach Gleichung (207a)

$$\overline{\gamma^2} = \frac{\gamma_2(-37x^{10} + 54\gamma_3 x^4 - 129x^{-2})}{3(x^{18} + 18\gamma_3 x^{12} - 3x^6)}$$

wird. Dieser Werth ist in die Gleichung

$$L^{24} - 12\overline{\gamma_2}x^{16}L^8 + 16x^{24} = 0$$

einzusetzen und dann x zu eliminiren. Dadurch erhält man eine Gleichung 12^{ten} Grades für L^{24}. Es hat aber keinen Zweck, diese Gleichung wirklich zu bilden, weil sie nicht einfach genug wird. Im Gegentheil zeigt sich auch hier wieder die Nothwendigkeit, andere Hülfsgrössen neben f in die Transformationstheorie einzuführen.

Die Schwierigkeiten, welche schon bei der Transformation 6^{ten} Grades auftreten, kehren natürlich in erhöhtem Masse bei der Transformation $6p^{\text{ten}}$ Grades wieder.

Diese Schwierigkeiten lassen sich aber, wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, beseitigen durch die Benutzung von Ausdrücken, welche ähnlich gebildet sind wie die Grösse f, und deren Eigenschaften deshalb auch mit den hier entwickelten Untersuchungen in naher Beziehung stehen. Die eingehendere Behandlung dieses Gegenstandes muss aber einer späteren Mittheilung vorbehalten bleiben.

Hannover, im April 1885.*)

*) Die Citate, welche sich auf die Abhandlung: „*Ueber die elliptischen Normalcurven von der n^{ten} Ordnung und zugehörige Modulfunctionen n^{ter} Stufe*“ von Herrn Klein beziehen, sind während des Druckes hinzugefügt.

Neue Untersuchungen im Gebiete der elliptischen Functionen.

Von

F. Klein in Leipzig.

Vor nun anderthalb Jahren richtete ich im Anschluss an meine Vorlesungen die Uebungen meines Seminars auf die Theorie der elliptischen Functionen, insbesondere der elliptischen Modulfunctionen, um so eine Reihe von Problemen, die mir von meiner früheren Beschäftigung mit der genannten Theorie her geläufig waren, zur Bearbeitung und gleichförmigen Erledigung zu bringen. Von den Untersuchungen, welche aus diesem Anlasse entstanden sind, haben einige wenige in den Mathematischen Annalen Aufnahme gefunden (vergl. Morera: *Ueber einige Bildungsgesetze in der Theorie der Theilung und der Transformation der elliptischen Functionen* (Bd. 25) und zwei Aufsätze von Pick in Bd. 25 und 26: *Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen*); die anderen sind in den Schriften der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften erschienen oder werden binnen kurzem als Dissertationen veröffentlicht werden. Es ist Gefahr vorhanden, dass diese letzteren Arbeiten der Beachtung des mathematischen Publicums mehr oder minder entgehen, und es schien mir also zweckmässig, an gegenwärtiger Stelle ein zusammenhängendes Referat über dieselben zu erstatten. —

Ich will dabei den Gesammtstoff von vorneherein auf zwei Abschnitte vertheilen. — Einmal nämlich handelte es sich um die weitere Durchführung jenes Programms einer reinen Theorie der elliptischen Modulfunctionen, welches sich aus meinen Untersuchungen in den Bänden 14 und 15 dieser Annalen entwickelt hat, andererseits aber um die Aufgabe, die betreffenden Ueberlegungen mit der eigentlichen Theorie der elliptischen Functionen, insbesondere mit den Fundamentalformeln, wie sie Weierstrass in seinen Vorlesungen zu geben pflegt, in Verbindung zu bringen.

In ersterer Hinsicht muss ich voranstellen, dass in der Note „*Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen*“, welche ich im December

1879 der Münchener Akademie vorlegte*) und auf die ich mich wiederholt zu beziehen habe, nur ein *Theil* des in Rede stehenden Programms niedergelegt ist. Ich beschränke mich dort durchaus auf Modulfunctionen im engeren Sinne, d. h. auf Functionen des Periodenverhältnisses ω, während die weitergehende Untersuchung durchaus verlangt, Modul*formen*, d. h. homogene Functionen der Perioden ω_1, ω_2 in Betracht zu ziehen. Man kann sich das Verhältniss etwa in der Weise vorstellen, dass die Riemann'schen Methoden, welche ich damals voranstellte, (die Construction und Discussion der Fundamentalpolygone etc.) die zuerst erforderliche Vorarbeit leisten, während die feinere Ausbildung der Betrachtungen und die Durchführung auch in complicirten Fällen der formentheoretischen Behandlung vorbehalten bleiben muss, — beide beherrschend aber die gruppentheoretische Auffassung (die Stufeneintheilung etc.) das oberste Eintheilungsprincip abgiebt. Ich möchte mit Rücksicht hierauf insbesondere auf die Hurwitz'sche Abhandlung im 18. Bande der Mathematischen Annalen verweisen (*Grundzüge einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen etc.*). Man beachte namentlich, wie dort (in § 9 des ersten Theiles) der Uebergang von der Modulfunction der ersten Stufe, die ich J nenne, zu den Modulformen derselben Stufe, d. h. zu g_2 und g_3, gefunden wird, indem $\frac{dJ}{d\omega}$ als Durchgangspunkt dient.

Die ersten Arbeiten, über welche ich nunmehr zu berichten habe, machen übrigens von dem Begriffe der Modulform nur beiläufigen Gebrauch und basiren dementsprechend in der Hauptsache auf der Discussion algebraischer Functionen im Riemann'schen Sinne.

Ich referire zunächst über die Untersuchungen von Hrn. Fricke**). Bekanntlich ergiebt die Betrachtung der Kreisbogendreiecke der ω-Ebene und der aus ihnen gebildeten Fundamentalpolygone, dass für $n = 3, 4, 5$ sich sämmtliche Modulfunctionen der zugehörigen Stufe rational je durch einen Hauptmodul darstellen lassen, welcher, wenn man J als gegeben ansieht, beziehungsweise mit einer der durch die regulären Körper definirten Irrationalitäten, nämlich der Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaeder-Irrationalität, coincidirt. Denselben Ansatz habe ich dann in meinen früheren Arbeiten auch noch für die Fälle $n = 7$ und $n = 11$ in Anwendung gebracht, wobei sich aber eine steigende Complication einstellte, so dass die Leistungsfähigkeit der Methode auf kleine Stufenzahlen beschränkt erscheint. Um so wünschenswerther musste es sein, die kleinen Werthe von n nun auch sämmtlich in dem

*) Dieselbe ist in Bd. 17 dieser Annalen wieder abgedruckt.

**) Siehe meine noch öfter zu nennende Notiz in den Berichten der k. sächs. Ges. d. Wiss. vom 2. März 1885: „*Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen*".

angedeuteten Sinne discutirt zu sehen. Dies ist, was Herr Fricke für $n = 6, 8, 16$ und neuerdings auch bei $n = 10$ ausgeführt hat.*) Es handelt sich dabei selbstverständlicherweise in jedem Falle um Definition solcher einfachster algebraischer Functionen der Invariante J, durch welche sich alle anderen Functionen derselben Stufe rational darstellen lassen. Herr Fricke hat dabei seine Aufgabe so gefasst, dass er es unternahm, alle Moduln der genannten Stufen, welche in der ausgedehnten hierher gehörigen Litteratur als wesentlich vorkommen, explicit auf die Fundamentalgrössen zurückzuführen. So finden sich hier in die modernen Anschauungen eingeordnet insbesondere jene Relationen über dritte und fünfte Theilwerthe der Thetafunctionen, welche man im Anschlusse an den Gaussischen Nachlass neuerdings vielfach behandelt hat.

Ich wende mich ferner zu den Untersuchungen der Herren Friedrich und Fiedler**). Dieselben beziehen sich auf die Theorie der *Modulargleichungen* in dem allgemeinen Sinne, wie ich dieselbe in meiner soeben genannten Münchener Note skizzirt habe, und knüpfen an eine dort gegebene Bemerkung an, vermöge deren bei zweckmässiger Wahl der zu Grunde zu legenden Moduln Ueberlegungen *invariantentheoretischer Natur* bei Aufstellung der Modulargleichungen am Platze sind. Herr Friedrich hat in diesem Sinne die Modulargleichungen der regulären Körper behandelt. Es seien λ, a, o, η die Benennungen für Doppelverhältniss, Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaeder-Irrationalität; mit λ', a', o', η' bezeichnen wir die transformirten Werthe. Die linke Seite der Modulargleichung muss dann eine solche ganze rationale Function von λ und λ', etc., sein, dass sie bei gewissen linearen Substitutionen, denen λ und λ' simultan zu unterwerfen sind, bis auf einen Factor ungeändert bleibt. Hieraus nun leitet man durch rein algebraische Ueberlegungen ab, dass die linke Seite der Modulargleichung eine ganze Function einiger charakteristischer Verbindungen von λ, λ' etc. sein wird, wodurch die wirkliche Berechnung der Modulargleichungen auch bei höheren Transformationsgraden auf die Auswerthung relativ weniger Zahlencoefficienten zurückgeführt ist. Herr Friedrich giebt — unter Beschränkung auf solche Transformationsgrade, welche beziehungsweise zu 2, 3, 4, 5 relativ prim sind — für λ, a, o, η die Durchführung dieser Theorie und als Beleg jeweils eine Zahl ausgerechneter Beispiele. Dabei liegt ein interessanter Vergleichspunkt in dem Umstande, dass die Modulargleichungen für λ, λ' in den Fällen $n = 3$ und $n = 5$ schon in Jacobi's Fundamenten auftreten, wo sie

*) Die betreffenden Resultate sollen im Zusammenhange in der demnächst erscheinenden Dissertation d. Verf. veröffentlicht werden.

**) Vergl. wieder die schon genannte Note in den Berichten d. k. sächs. Ges. d. W. oder auch die bezüglichen, demnächst erscheinenden Dissertationen.

„non sine calculo prolixo“ abgeleitet werden (wie Jacobi dies selbst ausdrückt), während jetzt die empirische Berechnung je eines Zahlencoefficienten genügt. — Ganz ähnliche Bemerkungen sind hinsichtlich der Arbeit des Herrn Fiedler am Platze. Es handelt sich bei Herrn Fiedler nicht um Modulargleichungen im engeren Sinne, sondern um *Modularcorrespondenzen* und zwar insbesondere um diejenigen, welche zwischen $x = \sqrt[8]{\lambda}$, $y = \sqrt[8]{1-\lambda}$ einerseits und den transformirten Werthen dieser Grössen, die x', y' heissen mögen, bestehen. In meiner wiederholt genannten Münchener Note hatte ich die Frage offen gelassen, wie man eine solche Correspondenz in jedem Falle algebraisch vollständig darzustellen habe, so dass hier in der Theorie eine wesentliche Lücke blieb, welche erst durch die neueren Untersuchungen von Herrn Hurwitz ausgefüllt worden ist*). An letztere Untersuchungen anknüpfend leitet Herr Fiedler den Satz ab, dass im Falle des von ihm betrachteten Modulsystems zur Darstellung der Modularcorrespondenz ausser den selbstverständlichen Relationen $x^8 + y^8 = 1$, $x'^8 + y'^8 = 1$ immer eine Gleichung genügt, sobald der Transformationsgrad n (den Herr Fiedler der Einfachheit halber durchweg als ungerad voraussetzt) entweder selbst von der Gestalt $8\varkappa + 7$ ist oder einen in ungerader Potenz vorkommenden Primfactor von der Gestalt $8\varkappa + 7$ hat. Er entwickelt ferner, dass man diese eine Gleichung immer so auswählen kann, dass sie bei gewissen ternären linearen Substitutionen, denen einerseits x, y, andererseits (und zwar gleichzeitig) x', y' zu unterwerfen sind, ungeändert erhalten bleibt, und zeigt endlich, dass in Folge der genannten Eigenschaft die linke Seite der Gleichung als ganze Function bestimmter, aus x, y, x', y' zusammengesetzter Ausdrücke sich aufbauen lässt. Die einfachste hierher gehörige Gleichung ist die bekannte, welche Gützlaff für den 7ten Transformationsgrad gab:

$$xy + x'y' = 1;$$

Herr Fiedler steigt mit den von ihm durchgerechneten Beispielen bis zu den Transformationsgraden 55, 71, 79 auf, ohne dabei übermässig lange numerische Rechnungen zu gebrauchen.

Dem Gegensatze entsprechend, der soeben zwischen Modulfunctionen und Modulformen gefunden wurde, treten an Seite der Modulargleichungen die *Multiplicatorgleichungen*. Unter einem *Multiplicator* verstehe ich überhaupt einen Quotienten, dessen Zähler der transformirte Werth einer Modulform ist, während der Nenner durch den anfänglichen Werth der Modulform gegeben wird. Der Multiplicator ist also zunächst Modul*function* und dementsprechend stellen sich die Coefficienten der Multiplicatorgleichung zuvörderst ebenfalls als Modul-

*) Siehe insbesondere dessen Mittheilung in den Göttinger Nachrichten von 1883: „*Zur Theorie der Modulargleichungen*“.

functionen dar. Wenn wir dann aber hinterher mit einer geeigneten Potenz der im Nenner des Multiplicators stehenden Modulform heraufmultipliciren, so verwandelt sich die Multiplicatorgleichung in eine solche, *welche den transformirten Werth einer Modulform von den gegebenenen Werthen irgendwelcher anderer Modulformen abhängig macht*. Eben hierin nun erblicke ich die innere Bedeutung der Multiplicatorgleichungen.

Dem Gesagten zufolge giebt es so viele Multiplicatorgleichungen, als es Modulformen giebt, für die eine Transformationstheorie existirt. Die Jacobi'schen Multiplicatorgleichungen, sowie die anderen, die ich Multiplicatorgleichungen erster Stufe nenne*), sind nur die ersten einfachen Beispiele.

Herr Biedermann**) hat nun insbesondere diejenigen Multiplicatorgleichungen untersucht, welche durch Betrachtung der *Theilwerthe der Weierstrass'schen σ-Function* erwachsen. Ich verstehe unter letzteren, wenn s eine beliebig gegebene Zahl bezeichnet, die folgenden Grössen:

$$\sigma_{\lambda\mu}(\omega_1, \omega_2) = -e^{\frac{-(\lambda\eta_1+\mu\eta_2)(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)}{2s^2}} \cdot \sigma\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{s}, \omega_1, \omega_2\right),$$

wo dann, unter n den Transformationsgrad, unter a, b, c, d vier ganze Zahlen von der Determinante $ad - bc = n$ verstanden, als Wurzeln der Multiplicatorgleichung die folgenden Quotienten genommen werden müssen:

$$x_{\lambda\mu} = \frac{\sigma_{\lambda\mu}(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2)}{\sigma_{\lambda\mu}(\omega_1, \omega_2)}.$$

Indem Herr Biedermann die Zahl s insbesondere gleich 2, 3, 4 setzt und dann, der Einfachheit halber, den Transformationsgrad n zu 2, bez. zu 3, relativ prim nimmt, bestimmt er mit Hülfe der zugehörigen in der ω-Ebene gelegenen Fundamentalpolygone die Form der entstehenden Multiplicatorgleichungen und ist dadurch in der Lage, für niedere Transformationsgrade die Schlussformeln fast ohne Rechnung hinzuschreiben. Die Bedeutung dieser Untersuchungen soll wieder nicht nur in der Erledigung eines einzelnen Falles beruhen, sondern in dem methodischen Fortschritte, der mit ihnen für alle ähnlichen Probleme, insbesondere auch für die Theorie der Jacobi'schen Multiplicatorgleichungen, gegeben erscheint. —

Indem ich mich nunmehr zum zweiten Theile meines Referates

---

*) Vergl. die wiederholt genannte Abhandlung von Hurwitz in Bd. 18 dieser Annalen, sowie die einschlägigen Arbeiten von Kiepert, insbesondere die hier unmittelbar vorausgehende zusammenfassende Darstellung des Letzteren.

**) Berichte der k. sächs. Ges. d. Wiss. vom 4. Mai 1885. (Der Inhalt dieser Note soll wieder in einer Dissertation besonders ausgeführt werden).

wende, gedenke ich zunächst der Untersuchungen des Herrn Nimsch. Die Perioden ω_1, ω_2, η_1, η_2 der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung lassen sich bekanntlich, wie Herr Bruns zuerst hervorhob*), aus den Invarianten g_2, g_3 durch hypergeometrische Reihen berechnen. Inzwischen fehlte es bislang an einer zusammenhängenden Darstellung der Theorie unter Heranziehung derjenigen Anschauungen, welche Riemann der Theorie der hypergeometrischen Functionen zu Grunde gelegt hat**). Eben hier hat Herr Nimsch eingesetzt und den Gegenstand so weit gefördert, dass seine Untersuchungen, die demnächst (als Dissertation) publicirt werden sollen, mit einer Tabelle numerischer Werthe abschliessen.

Ich erwähne ferner die Untersuchungen von Herrn Molien***). Die achte Einheitswurzel, welche in der Theorie der unendlich vielen Formen der Function Θ auftritt, kann bekanntlich vom Weierstrass'schen Standpunkte aus auf die Aenderungen zurückgeführt werden, welche die achte Wurzel aus der Discriminante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ bei linearer Transformation der Perioden erfährt. Statt $\sqrt[8]{\Delta}$ wird man dann lieber gleich $\sqrt[24]{\Delta}$ in Betracht ziehen, welches in gewissem Sinne die eigentliche fundamentale Grösse ist, die freilich ihrerseits (wie Jacobi gelegentlich in den Fundamenten bemerkt) durch Heranziehen einer Transformation dritter Ordnung auf die Θ-Function und also wieder auf $\sqrt[8]{\Delta}$ zurückgeführt werden kann. Herr Molien hat nun den Factor, um welchen sich $\sqrt[24]{\Delta}$ bei linearer Transformation der Perioden ändert, in der Weise bestimmt, dass er von der Euler'schen Reihenentwickelung für $\prod(1-q^{2r})$ ausging und auf diese das Cauchy'sche Verfahren der Reihenvergleichung anwandte†). Die Gestalt, welche Herr Molien den Schlussformeln giebt, entspricht genau derjenigen, welche Stephen Smith bei der Transformation der Θ-Functionen zur Geltung bringt††) und die in mancher Hinsicht der von Hermite ge-

*) *Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung* (Dorpater Festschrift 1875); vergl. auch meine Darstellung in Bd. 14 dieser Annalen, p. 124—126 daselbst.

**) *Beiträge zur Theorie der durch die Gaussische Reihe darstellbaren Functionen.* Es ist übrigens bemerkenswerth, dass Riemann in dieser Abhandlung (cf. pag. 72 der Werke) unter den rationalen Transformationen, welche unter Umständen eine gegebene P-Function in eine neue P-Function überführen, bereits folgende angiebt: $y = \frac{4}{27}\,\frac{(1-x+x^2)^3}{x^2(1-x)^2}$, die genau dem Uebergange vom Doppelverhältnisse $\lambda = x$ zur absoluten Invariante $J = y$ entspricht, so dass man annehmen darf, Riemann habe die Abhängigkeit der ω_1, ω_2 von J ihrem Wesen nach sehr wohl gekannt.

***) Berichte d. k. sächs. Ges. d. W. vom 12. Januar 1885.

†) Cauchy im Bulletin de la Société Philomatique von 1817.

††) Reports of the British Association for the Advancement of Science, Bd. 35 (1865): *Report VI on the Theory of Numbers* (cf. insbesondere p. 329).

wählten Form vorzuziehen sein dürfte. Ich will übrigens nicht unerwähnt lassen, dass eben die Aenderungen von $\sqrt[24]{\Delta}$ in neuerer Zeit auch von anderer Seite untersucht worden sind, so von Hrn. Weber im 6^{ten} Bande der Acta Mathematica auf arithmetischem Wege und von Herrn Kiepert in dem hier vorausgehenden Aufsatze vermöge der Hermite'schen Methode.*)

Herr Engel hat eine andere Specialfrage zur Beantwortung gebracht**). Abel bemerkt in seinem *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*, dass zwischen den n^{ten} Theilwerthen der von ihm betrachteten elliptischen Functionen lineare Identitäten bestehen, deren Coefficienten n^{te} Einheitswurzeln sind, eine Behauptung, welche dann später von den Herren Sylow und Kronecker ausführlich begründet und weiter verfolgt worden ist***). Man wird fragen, was aus diesen Relationen wird, wenn man durchweg die Weierstrass'schen Functionen $p(u)$, $p'(u)$ einführt. Man könnte hier Complicationen erwarten; indess sind die Formeln, welche Herr Engel findet, ebenso einfach wie die früheren, auf die älteren Functionen bezüglichen. Schreiben wir der Kürze halber $p_{\lambda\mu}$, $p'_{\lambda\mu}$ für $p\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$, $p'\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ und ε für $e^{\frac{2i\pi}{n}}$, so lauten die von Herrn Engel gefundenen Relationen für $\lambda = 0, 1, \ldots, (n-1)$:

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^{2\lambda\mu}}{p'_{\lambda\mu}} = 0, \quad \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^{2\lambda\mu}\cdot p_{\lambda\mu}}{p'_{\lambda\mu}} = 0. -$$

Ich habe nunmehr über meine eigene Abhandlung Bericht zu erstatten, die unter dem Titel: *Ueber die elliptischen Normalcurven n^{ter} Ordnung und zugehörige Moduln der n^{ten} Stufe* im 14^{ten} Bande der Abhandlungen der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften erschienen ist (Mai 1885) und die insofern hierher zu rechnen ist, als dieselbe

---

*) Vom Standpunkte einer reinen Theorie der elliptischen Functionen aus liegt die Schwierigkeit (oder das Charakteristische) der in Rede stehenden Untersuchungen darin, dass $\sqrt[24]{\Delta}$ und $\sqrt[8]{\Delta}$ keine *eindeutigen* Functionen von ω_1, ω_2 sind, sondern nur *unverzweigte* Functionen der Grössen, welche erst durch eine willkürliche Festsetzung (durch Ziehen eines Querschnittes im Gebiete der ω_1, ω_2) zu eindeutigen Functionen gemacht werden können. Bei $\sqrt[12]{\Delta}$ ist es noch anders und es kann also die elegante Behandlung, welche Herr Hurwitz in seiner öfter genannten Abhandlung (Bd. 18 der Annalen, siehe insbesondere p. 564—566 daselbst) der $\sqrt[12]{\Delta}$ zu Theil werden lässt, nicht ohne Weiteres auf die anderen Wurzeln übertragen werden.

**) Berichte der k. sächs. Ges. d. Wiss. vom 31. Juli 1884.

***) Sylow in den Verhandlungen der Akademie von Christiania, 1864 und 1871, Kronecker in den Berliner Monatsberichten, 1875 und 1876.

aus Seminarvorträgen entstand, die ich im Winter 1884—85 gehalten habe*). Es handelt sich in derselben um eine Wiederaufnahme derjenigen Ideen, die ich in einer der Münchener Akademie vorgelegten Note vom Juli 1880 skizzirt habe**) und die Herr Bianchi sodann für $n=3$ und $n=5$ eingehend verfolgt hat***). Die elliptische Normalcurve n^{ter} Ordnung d. h. die Curve n^{ter} Ordnung vom Geschlecht 1 des Raumes von $(n-1)$ Dimensionen, ist dabei nur das Gegenbild für das planmässige Operiren mit solchen n-gliedrigen σ-Producten, deren Residuensumme derselben Constanten gleich ist (so dass der Quotient irgend zweier Producte doppeltperiodisch ist). Indem ich die Curve auf verschiedene Coordinatensysteme beziehe, werden charakteristische Gleichungen derselben und in den Coefficienten dieser Gleichungen ausgezeichnete Modulfunctionen gewonnen. Der Uebergang von einem Coordinatensysteme zum anderen lässt sodann einfache Beziehungen zwischen den eingeführten Modulsystemen erkennen. Es kann hier nicht die Absicht sein, über die Einzelheiten der betreffenden Untersuchungen, welche im Princip die ganze Transformationstheorie der elliptischen Functionen umfassen, Bericht zu erstatten. Ich bemerke also nur, erstlich, dass ich mich auf ungerade n beschränke, sodann, dass die Modulformen n^{ter} Stufe (n ungerade) z_α, A_α, deren Eigenart ich bereits in einer vorläufigen Note in Band 17 dieser Annalen zur Sprache brachte†) und deren Interesse darin ruht, dass sie sich für $n=3, 5, 7, 11$ an jene einfachsten Grössen anschliessen, deren Existenz die functionentheoretische Methode ergeben hatte, nunmehr in gleichförmiger und sozusagen nothwendiger Weise gewonnen werden, wobei sich zugleich die Mittel darbieten, um andere Grössen der Theilungs- und Transformationstheorie (z. B. die Theilwerthe $p_{\lambda\mu}$, $p'_{\lambda\mu}$) mit ihnen in Verbindung zu setzen. Hier benutze ich denn auch jene Theilwerthe der σ-Function, deren Definition soeben gegeben wurde, und die, für ungerade s, Modulformen von der Stufe s^2 sind.

Eine naheliegende Aufgabe, betreffs derer ich in Band 17 der Annalen bereits einige Andeutungen machte††), die ich aber in meiner

---

*) Siehe auch meine vorläufige Mittheilung in den Berichten der k. sächs. Ges. d. Wiss. vom 14. November 1884: *Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe.*

**) *Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung* (wieder abgedruckt in Band 17 dieser Annalen).

***) *Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung*, Band 17 der Math. Annalen.

†) *Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Function.*

††) Indem ich nämlich die „Curven" der z_α, A_α in Betracht zog, ihre Ordnung bestimmte etc. Siehe meine vorgenannte Note: *Ueber gewisse Theilwerthe der ϑ-Function.*

Abhandlung nicht weiter in Betracht gezogen habe, ist die, den Zusammenhang der z_α, A_α mit der Invariante J, bez. g_2, g_3 genauer zu studiren. Es geschieht dies vielleicht am zweckmässigsten derart, dass die Ansätze verallgemeinert werden, die ich in den Bänden 14, 15 dieser Annalen für $n = 5, 7, 11$ gegeben habe. Die Moduln z_α etc. erscheinen dann schliesslich als die Lösungen bestimmter *Formenprobleme**), deren Coefficienten sich aus g_2, g_3 aufbauen. Inzwischen dürfte eine Durchführung dieses Gedankens schwierig sein. Einfacher ist es jedenfalls, zunächst die Grösse A_0 von g_2, g_3 durch die Multiplicatorgleichung erster Stufe abhängig zu machen (wegen dieser Gleichung siehe oben), dann A_0 zu adjungiren und zuzusehen, wie sich unter dieser Voraussetzung die z_α, bez. die A_α berechnen, was der Theorie zufolge durch Wurzelzeichen gelingen muss. In zwei neuerdings erschienenen Noten hat Herr Morera den hiermit bezeichneten Gedanken wenigstens in allgemeinen Zügen durchgeführt**).

Ich kann dieses Referat nicht schliessen, ohne die Untersuchungen wenigstens genannt zu haben, welche Herr Hurwitz im Zusammenhange mit meinen eigenen Bestrebungen neuerdings ebenfalls in den Berichten der k. sächs. Ges. d. Wiss. veröffentlicht hat***). Die Zwecke, welche Herr Hurwitz bei ihnen verfolgt, sind durch die Titel der Arbeiten hinreichend angedeutet. Ich möchte aber ausdrücklich auf die Methode aufmerksam machen, deren sich der Verf. zur Erreichung seiner Zielpunkte bedient, insofern dieselbe an sich hervorragendes Interesse beanspruchen dürfte. Dieselbe besteht darin, die *überall endlichen Integrale*, welche zur n^{ten} Stufe gehören, als Functionen von ω wirklich aufzustellen und eingehend zu discutiren. —

Zum Schlusse will ich noch einer anderen Arbeit gedenken, die, aus meinen Seminarübungen hervorgegangen, allerdings nicht direct die Theorie der elliptischen Modulfunctionen aber doch die eng verwandte Lehre von den Irrationalitäten der regulären Körper betrifft. In seiner Dissertation†) entwickelt Herr Fischer vielseitige Methoden, um das Elementardreieck des Ikosaeders auf die anderen von den

*) Wegen dieser Ausdrucksweise siehe meine *Vorlesungen über das Ikosaeder etc.* (Leipzig 1884), insbesondere p. 123—126 daselbst.

**) *Zur Transformation und Theilung der elliptischen Functionen*, Berichte d. k. sächs. Ges. d. Wiss. vom 1. Juni 1885; *Intorno alla risoluzione di certe equazioni modulari*, Rendiconti del Istituto Lombardo, ser. 2, vol. 18, fasc. 13 (1885).

***) Berichte vom 15. Dec. 1884: *Ueber Relationen zwischen Classenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante*, sowie Berichte vom 4. Mai 1885: *Ueber die Classenzahlrelationen und Modularcorrespondenzen primzahliger Stufe.*

†) *Conforme Abbildung sphärischer Dreiecke auf einander mittelst algebraischer Functionen* (Leipzig, 1885).

Symmetriebögen derselben Configuration umgrenzten sphärischen Dreiecke conform abzubilden, was jedesmal mit Hülfe algebraischer Functionen gelingen muss. Insbesondere ist es interessant, dass die algebraischen Functionen in gewissen Fällen rational werden, wo dann die Bestimmung der Coefficienten der rationalen Functionen in ähnlicher Weise durch Hülfsmittel der Invariantentheorie abgekürzt werden kann, wie dies in der Theorie der Modulargleichungen in den oben besprochenen Fällen gelang.

Leipzig, den 17. September 1885.

Ueber Collineationen und Correlationen, welche Flächen 2. Grades oder cubische Raumcurven in sich selbst transformiren.

Von

Rudolf Sturm in Münster i./W.

Seit den Aufsätzen über quadratische Formen von Hermite im Journal für Mathematik Bd. 47 ist eine ziemlich umfangreiche Litteratur über die Transformation quadratischer Formen in sich selbst vermittelst linearer Substitutionen erschienen.*)

Doch verfolgen die Verfasser mehr algebraische oder zahlentheoretische Zwecke als geometrische. Am meisten findet die Geometrie Berücksichtigung in den Abhandlungen der Herren Frahm und Voss, insbesondere bei letzterem, welcher alle auf die lineare Transformation einer Curve oder Fläche 2. Grades in sich bezüglichen Hauptresultate ermittelt hat und bei dem auch der Correlation gleiche Rücksicht zu theil wird, während sie sonst gegenüber der Collineation stets zurücktritt.

Eine rein geometrische Behandlung hat — etwa abgesehen von den Specialfällen der Polarcorrelation (in Bezug auf eine Basisfläche 2. Grades) und des Nullsystems — die Transformation der Curven oder Flächen 2. Grades in sich selbst vermittelst Collineation oder Correlation noch nicht erfahren, und es dürfte daher eine von allem algebraischen Apparate freie Untersuchung über diese Transformation nicht überflüssig sein.**) Der erste Theil der nachfolgenden Abhandlung unternimmt dieselbe für *die Flächen 2. Grades*, indem für den einfacheren Fall der Kegelschnitte eine Mittheilung der Resultate genügend erschien.

*) Cayley, Journ. f. Math. Bd. 50; Philos. Mag. 4. Ser. Bd. 6; Bachmann, Journ. f. Math. Bd. 71, 76; Selling, ebenda Bd. 77; Rosanes, Bd. 80; Frobenius, Bd. 77, 82, 84; Frahm, Habilitationsschrift (über eine Classe von linearen Transformationen, Tübingen 1873); Voss, zur Theorie der orthogonalen Substitutionen, Math. Ann. Bd. 13, S. 320; gelegentliche Bemerkungen von F. Klein in verschiedenen Aufsätzen.

**) Wenn im Folgenden bisweilen Coordinaten angewendet werden, so geschieht es nur, um die erhaltenen Resultate zu bestätigen.

Es kommt darauf an, zu ermitteln, *ob und welche Bedingungen nothwendig sind, damit eine Collineation oder Correlation eine Fläche 2. Grades in sich selbst transformirt, welches System dann die in sich transformirten Flächen erzeugen.* Daran schliesst sich die Aufsuchung involutorisch sich entsprechender Flächen, die auch Herr Voss aufgefunden hat, und andere naheliegende Fragen. Die speciellen Fälle der perspectiv- und der geschaart involutorischen Collineation, der Polarcorrelation und des Nullsystems werden besonders behandelt.

Im zweiten Theile, der wenig Beziehungen zum ersten hat, wird dieselbe Frage hinsichtlich *der cubischen Raumcurve* behandelt, was wohl ein noch gar nicht in Angriff genommenes Problem sein dürfte.

Erster Theil.

I.

1. Eine Fläche 2. Grades $\mathfrak{A}^2$ sei gegeben; die beiden Ebenen E, E' durchschneiden sie in den Kegelschnitten $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{a}'^2$; E, E' seien ihre Pole und F, F' zwei beliebige Punkte der Fläche. Wenn dann D, D' die Schnitte von $EF, E'F'$ bez. mit E, E', A, B die Schnitte von $\mathfrak{a}^2$ mit der Polare von D, A', B' die von $\mathfrak{a}'^2$ mit der Polare von D' und E, E' zwei beliebige Punkte bez. von $\mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}'^2$ sind, so wird durch die räumliche Collineation, in welcher den Punkten A, B, C, E, F die Punkte A', B', C', E', F' entsprechen, die Fläche $\mathfrak{A}^2$ in sich selbst transformirt. Denn in dieser Collineation sind dann auch D, D' entsprechend und weil in E, E' sich A, B, C, D und A', B', C', D' correspondiren, so thun es auch die Kegelschnitte $\mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}'^2$*) und in Folge dessen auch die Tangentialkegel $E\mathfrak{a}^2, E'\mathfrak{a}'^2$; die Fläche, welche der zum ersten Raume gerechneten $\mathfrak{A}^2$ im zweiten entspricht, muss also den Kegel $E'\mathfrak{a}'^2$ längs $\mathfrak{a}'^2$ tangiren und durch F' gehen, weil $\mathfrak{A}^2$ den Kegel $E\mathfrak{a}^2$ längs $\mathfrak{a}^2$ berührt und durch F geht; da aber $\mathfrak{A}^2$ jenes auch thut und eine Fläche 2. Grades dadurch eindeutig bestimmt ist, so sind beide Flächen identisch.

Lassen wir C' die Curve $\mathfrak{a}'^2$ durchlaufen, sodann E' alle möglichen Lagen im Raume und F' alle möglichen Lagen auf $\mathfrak{A}^2$ einnehmen, so erhalten wir *die ∞^6 Collineationen, durch welche die gegebene Fläche* 2. *Grades in sich selbst übergeht;* wie die algebraischen Untersuchungen sie ergeben haben.

Ersetzen wir die gestrichenen Elemente durch ihre in Bezug auf

---

*) Staudt, Geometrie der Lage, Nr. 264; Reye, Geometrie der Lage, Abth. II, zweiter Vortrag.

$\mathfrak{A}^2$ polaren, so ergiebt sich *dasselbe Resultat auch für die Correlationen* (*Reciprocitäten*).

Nun giebt es ∞^9 Flächen 2. Grades und ∞^{15} Collineationen oder Correlationen; also muss eine Collineation oder Correlation entweder eine endliche Zahl von Flächen 2. Grades, oder, falls für die Transformation einer Fläche 2. Grades in sich i Bedingungen nothwendig sind, wenn sie diese erfüllt, sofort ∞^i Flächen in sich transformiren. Dies wird sich in den vier Fällen — denn bei Collineation wie Correlation haben wir je zwei Fälle — verschiedenartig gestalten.

2. *Diese beiden Fälle unterscheiden sich dadurch, dass bei dem einen jede der beiden Geradenschaaren einer in sich transformirten Fläche 2. Grades in sich selbst, bei dem zweiten in die andere übergeht.* Herr Klein hat wohl zuerst auf diese beiden Fälle aufmerksam gemacht;*) bei Herrn Voss ergeben sie sich aus den eigentlichen und uneigentlichen orthogonalen Substitutionen.

Es seien $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$ sechs Gerade der einen Schaar von $\mathfrak{A}^2$, $l_1, \ldots l_6$ sechs Gerade aus der andern.

Wir lassen den zum ersten Raum gerechneten Punkten:

$$g_1 l_4,\; g_1 l_5,\; g_2 l_4,\; g_2 l_5,\; g_3 l_6$$

die Punkte, bez. Ebenen:

$$g_4 l_1,\; g_4 l_2,\; g_5 l_1,\; g_5 l_2,\; g_6 l_3,$$

oder die Punkte, bez. Ebenen:

$$l_1 g_4,\; l_1 g_5,\; l_2 g_4,\; l_2 g_5,\; l_3 g_6$$

im zweiten entsprechen**); dann entsprechen bei der dadurch festgelegten Collineation, resp. Correlation den Geraden $g_1, g_2, g_3, l_4, l_5, l_6$ im ersten Falle die Geraden $g_4, g_5, g_6, l_1, l_2, l_3$, im zweiten aber die Geraden $l_1, l_2, l_3, g_4, g_5, g_6$, also dort jede der beiden Schaaren sich selbst, hier jede der andern. Lässt man jede der sechs letzteren Geraden ihre ∞^1 Lagen in ihrer Schaar einnehmen, *so erhält man in allen vier Fällen ∞^6 lineare Transformationen.*

Sagen wir im ersten, bez. zweiten Falle: *die Fläche werde auf die erste, bez. zweite Art in sich selbst transformirt.*

3. Sowohl bei der Collineation, als bei der Correlation ergiebt sich auf einer Fläche 2. Grades $\mathfrak{A}^2$, die durch dieselbe in sich transformirt wird, eine eindeutige Punktbeziehung. Jedem Punkte X der Fläche $\mathfrak{A}^2$ als Punkt des ersten Raumes entspricht der ihm durch die Collineation im zweiten entsprechende X', bez. der Berührungspunkt X' der Ebene ξ', welche dem X durch die Correlation correspondirt

*) Math. Annalen Bd. 4 S. 412 und 622.

**) Staudt, Geometrie der Lage Nr. 329; Reye, Geometrie der Lage 2. Aufl. Abth. II S. 26.

(polar ist). Ist ξ die Berührungsebene von X, so entsprechen sich bei der Collineation auch ξ und ξ', bei der Correlation auch ξ und X'.

Entsprechende Punkte der $\mathfrak{A}^2$ in der genannten Punktbeziehung durchlaufen gleichzeitig Kegelschnitte. Projicirt man deshalb entsprechende Punkte aus dem Punkte $O \equiv Q'$ von $\mathfrak{A}^2$, so erhält man zwei concentrische quadratisch verwandte Bündel. Es seien O', Q die dem Scheitel entsprechenden Punkte, $g \equiv h'$, $l \equiv m'$ die durch den Scheitel gehenden Geraden von $\mathfrak{A}^2$, denen g', h, l', m entsprechen. Bei der Transformation erster Art gehören $g \equiv h'$, g', h zu der einen, $l \equiv m'$, l', m zur andern Schaar, bei der Transformation zweiter Art $g \equiv h'$, l', m zur einen, $l \equiv m'$, g', h zur andern. Die Hauptstrahlen der beiden Bündel sind:

$$g,\ l,\ OQ; \qquad h',\ m',\ Q'O'$$

und ihnen sind bez. homolog bei der ersten Art die Hauptebenen:

$$(m',\ Q'O'),\ (h',\ Q'O')\ (h',\ m'); \quad (l,\ OQ),\ (g,\ OQ),\ (g,\ l),$$

bei der zweiten die Hauptebenen:

$$(h',\ Q'O'),\ (m',\ Q'O'),\ (h',\ m'); \quad (g,\ OQ),\ (l,\ OQ),\ (g,\ l).$$

Im ersten Falle liegt demnach keiner der Hauptstrahlen in seiner homologen Hauptebene. Im zweiten dagegen thun es $g \equiv h'$, $l \equiv m'$; wir erhalten so in den beiden durch den Scheitel gehenden Geraden von $\mathfrak{A}^2$ zwei sich selbst entsprechende Strahlen der beiden quadratisch verwandten Bündel.

4. Zwei concentrische quadratisch verwandte Bündel haben 4 sich selbst entsprechende Strahlen.*) Zu diesen gehören also im zweiten Falle die eben erwähnten Strahlen, welche nicht zu sich selbst entsprechenden Punkten der eindeutigen Punktbeziehung auf $\mathfrak{A}^2$ führen: der Strahl $g \equiv h'$ verbindet den Punkt gg' als Punkt von g' und den Punkt hh' als Punkt von h je mit seinem entsprechenden Punkt auf g', bez. h'; und ähnliches gilt für $l \equiv m'$. Die beiden andern sich selbst entsprechenden Strahlen aber gehen nach sich selbst entsprechenden Punkten der Punktbeziehung auf $\mathfrak{A}^2$, und im ersten Falle thun dies alle vier sich selbst entsprechenden Strahlen.

Diese beiden Arten „projectiver Figuren“ auf der Fläche 2. Grades und die unterscheidende Eigenschaft, dass die der ersten Art 4, die der zweiten nur 2 Coincidenzpunkte haben, hat vor einiger Zeit Herr Zeuthen**) gefunden. Er leitet die Coincidenzpunkte in folgender Weise ab.

Bei zwei projectiven Figuren der ersten Art ist jede der beiden Regelschaaren in sich projectiv und enthält demnach zwei sich selbst

*) Reye, Zeitschr. für Math. Bd. 11 S. 300.

**) Math. Ann. Bd. 18 S. 33, insb. § II.

entsprechende Geraden g_1, g_2, bez. l_1, l_2. *Die 4 Eckpunkte des durch diese 4 Geraden gebildeten Vierseits sind die Coincidenzpunkte.*

Bei zwei projectiven Figuren der zweiten Art ist jede der beiden Regelschaaren in beiderlei Sinne zu der andern projectiv; dadurch wird in jeder von ihnen, z. B. der der l, eine Projectivität hervorgerufen, in der je zwei Gerade einander entsprechen, welche als Gerade des zweiten, bez. ersten Raumes (oder wenn man sich auf die Fläche beschränken will, der zweiten, bez. ersten Figur) der nämlichen Geraden der andern Schaar entsprechen, insofern diese dem ersten oder zweiten Raume (Figur) zugerechnet wird. Seien l_1, l_2 die Coincidenzgeraden dieser Projectivität und g_1, g_2 die beiden Geraden der andern Schaar, denen sie folglich in beiderlei Sinne oder involutorisch entsprechen; *so entspricht dann in dem durch diese 4 Geraden gebildeten windschiefen Vierseite jede der beiden Gegenecken $g_1 l_1$, $g_2 l_2$ sich selbst, während die beiden anderen $g_1 l_2$, $g_2 l_1$ sich gegenseitig und zwar in beiderlei Sinne entsprechen.*

II.

5. Wir müssen nun die beiden Fälle der Collineation und Correlation getrennt behandeln.

Bei einer Collineation, welche eine gegebene Fläche 2. Grades auf die erste Art in sich selbst transformirt, seien die vier sich selbst entsprechenden Punkte $g_1 l_1, g_1 l_2, g_2 l_2, g_2 l_1$ mit A, B, C, D bezeichnet. Sie sind natürlich die Ecken des sich selbst entsprechenden Tetraeders der Collineation, das wir *das Haupttetraeder der Collineation* nennen wollen.*)

Die sich selbst entsprechende Fläche geht durch eins $ABCD$ der drei windschiefen Vierseite, welche von dessen Kanten gebildet werden.

Liegt nun eine beliebige Collineation vor, so fragt es sich, ob dann eine sich selbst entsprechende Fläche 2. Grades vorhanden ist. Jeder Fläche 2. Grades, welche durch eins der drei windschiefen Vierseite der Kanten des Haupttetraeders gelegt ist, entspricht im andern Raume eine Fläche durch das nämliche Vierseit, und wir erhalten so eine Projectivität im Büschel durch dieses Vierseit. Die sich selbst entsprechenden Elemente derselben sind aber die beiden Ebenenpaare.

Also wird durch eine beliebige Collineation keine allgemeine Fläche 2. Grades auf die erste Art in sich selbst transformirt.

6. *Wenn aber eine allgemeine Fläche 2. Grades durch eine Collineation auf die erste Art in sich transformirt wird, so geschieht dies für alle Flächen des Büschels, welcher dasjenige Kantenvierseit des Haupt-*

*) Mit einer leichten Modification der Bezeichnung des Herrn Reye: Geom. der Lage, Abth. II S. 138 der 2. Aufl.

tetraeders zur Basis hat, durch das jene Fläche geht*); denn die obige Projectivität hat dann drei sich selbst entsprechende Elemente.

Eine solche Collineation ist durch eine einfache Beziehung zwischen zwei der 6 *Invarianten* charakterisirt. Bekanntlich hat jedes der 6 Doppelverhältnisse, welche auf allen Verbindungslinien entsprechender Punkte einer räumlichen Collineation durch diese Punkte und die Schnitte mit je zwei der vier Ebenen des Haupttetraeders $ABCD$ gebildet werden, einen constanten Werth. Seien $\alpha \equiv BCD$, $\beta \equiv CDA$, $\gamma \equiv DAB$, $\delta \equiv ABC$ diese 4 Ebenen und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ ihre Schnitte mit irgend einer Verbindungslinie XX', so sind

$$\lambda_{\alpha\beta} = (XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}), \quad \lambda_{\alpha\gamma} = (XX'\mathfrak{A}\mathfrak{C}), \quad \lambda_{\alpha\delta} = (XX'\mathfrak{A}\mathfrak{D})$$

die 3 unabhängigen von diesen Invarianten, die 3 übrigen sind

$$\lambda_{\beta\gamma} = \lambda_{\alpha\gamma} : \lambda_{\alpha\beta}, \quad \lambda_{\gamma\delta} = \lambda_{\alpha\delta} : \lambda_{\alpha\gamma}, \quad \lambda_{\delta\beta} = \lambda_{\alpha\beta} : \lambda_{\alpha\delta}.\text{**)}$$

Sei nun $\mathfrak{A}^2$ eine durch eine Collineation auf die erste Art in sich transformirte Fläche 2. Grades, $ABCD$ das auf ihr befindliche Kantenvierseit des Haupttetraeders und X, X' seien irgend zwei auf ihr gelegene entsprechende Punkte; so ist:

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = CD(X, X', CB, DA), \quad (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C}) = AB(X, X', CB, DA);$$

da aber $ABCD$ und X, X' auf derselben Fläche 2. Grades $\mathfrak{A}^2$ liegen, so ist:

$$CD(X, X', CB, DA) = AB(X, X', CB, DA);$$

also ist:

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C});$$

oder:

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\delta\gamma};$$

oder wenn wir nur die unabhängigen Invarianten benutzen wollen:

$$\lambda_{\alpha\beta} \cdot \lambda_{\alpha\delta} = \lambda_{\alpha\gamma}.$$

Also eine der 3 Bedingungen:

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C}), \quad (XX'\mathfrak{A}\mathfrak{C}) = (XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}),$$
$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{D}) = (XX'\mathfrak{C}\mathfrak{B}),$$

---

*) Vgl. z. B. Frahm a. a. O. S. 5; Voss a. a. O. S. 353; Rosanes a. a. O. S. 67.

**) Die Invarianz von $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ z. B. sieht man synthetisch leicht in folgender Weise ein: YY' sei zunächst eine XX' treffende Gerade; die Schnittlinien der Ebene (XX', YY') mit α, β seien a, b und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1$ die Schnittpunkte von YY' mit α, β oder a, b. Nun sind XX', YY', a, b Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projectiven Punktreihen auf $XY, X'Y'$; demnach tangiren alle 6 Geraden denselben Kegelschnitt und auch auf XX', YY' entstehen durch die vier andern projective Würfe, oder: $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (YY'\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1)$. Sind XX', YY' windschief, so schaltet man eine beide treffende ZZ' ein, denn solcher giebt es in dem Complexe aller Verbindungslinien entsprechender Punkte einfach unendlich viele.

mit denen beziehlich:

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{D}) = (XX'\mathfrak{B}\mathfrak{C}), \quad (XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (XX'\mathfrak{C}\mathfrak{D}),$$
$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{C}) = (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{B})$$

äquivalent sind, *hat eine Collineation zu erfüllen, damit sie eine allgemeine Fläche 2. Grades auf die erste Art in sich selbst transformire, und dann sofort einen ganzen Büschel.*

Ersichtlich folgt auch umgekehrt aus:

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C})$$

oder

$$CD\,(X, X', CB, AD) = AB\,(X, X', CB, AD),$$

dass die durch $ABCD$ und X gelegte Fläche 2. Grades auch X' enthält und daher sich selbst entspricht.

III.

7. Gehen wir zu dem Falle *einer Collineation* über, *welche eine Fläche 2. Grades $\mathfrak{A}^2$ auf die zweite Art in sich selbst transformirt.* Die Punkte $g_1 l_1$, $g_1 l_2$, $g_2 l_2$, $g_2 l_1$ (Nr. 4) seien mit A, E, C, F bezeichnet. A und C entsprechen sich, wie gesagt, selbst; g_1 und l_1, g_2 und l_2, E und F entsprechen sich gegenseitig in beiderlei Sinn; es entsprechen demnach die Geraden AC, EF und die Ebenen $g_1 l_1$, $g_2 l_2$, welche $\mathfrak{A}^2$ in A, C tangiren, sich selbst; während $g_1 l_2$, $g_2 l_1$, die in E, F tangiren, sich wiederum gegenseitig in beiderlei Sinne correspondiren. Auf der Geraden EF sind die beiden durch entsprechende Punkte gebildeten projectiven Punktreihen in Involution, da E und F sich doppelt entsprechen; also entsprechen sich alle correspondirenden Punkte auf EF in beiderlei Sinne und dasselbe gilt dann für die Ebenen durch AC. Sind nun B, D die Doppelpunkte der Involution auf EF, so ist $ABCD$ das Haupttetraeder. Liegt X in einer Ebene durch AC, so muss X' in der zu jener gepaarten Ebene der Involution liegen; da nun diese beiden Ebenen zu $AC(B, D)$ oder δ, β harmonisch sind, so sind, wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ dieselbe Bedeutung haben, wie in Nr. 6, X, X' zu $\mathfrak{D}, \mathfrak{B}$ harmonisch. *Mithin erhalten wir für die Collineation die Bedingung, dass die Invariante* $(XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D})$ *den Werth* -1 *hat.* Aber sie muss noch eine zweite Bedingung erfüllen. Liegen X, X' auf der sich selbst entsprechenden Fläche, so ist ähnlich wie oben:

$$AE\,(X, X', AF, EC) = CF\,(X, X', FA, CE),$$

oder wenn $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ die Schnitte von XX' mit $AC\,(E, F)$ sind:

$$(XX'\mathfrak{C}\mathfrak{E}) = (XX'\mathfrak{F}\mathfrak{A}),$$

weil $EAF \equiv \gamma$, $ECF \equiv \alpha$.

Folglich ist: $(XX'\mathfrak{C}\mathfrak{E}) = (X'X\mathfrak{A}\mathfrak{F})$; d. h. X, X'; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ sind in Involution, und da nun nach Obigem $AC(X, X')$ und $AC(E, F)$ zu $AC(B, D)$ oder δ, β harmonisch sind, so sind X, X' und $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ und also auch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ harmonisch. *Und als zweite Bedingung für die Collineation erhalten wir, dass auf allen Verbindungslinien XX' entsprechender Punkte das bekanntlich**) *constante Doppelverhältniss* $(\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D})$ *den Werth* -1 *hat.*

Demnach führt eine beliebige Collineation keine allgemeine Fläche 2. Grades auf die zweite Art in sich selbst über.

8. *Werden aber die beiden Bedingungen:*

$$(XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = -1, \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = -1$$

erfüllt (oder eins der fünf analogen Paare von Bedingungen, die sich auf die andern Kanten des Haupttetraeders beziehen), *so gehen sofort* ∞^2 *Flächen 2. Grades in sich selbst über, welche zugleich ein Netz und ein Gewebe bilden.***)

Wegen der ersten Bedingung sind die Ebenen durch die Kante AC des Haupttetraeders, sowie die Punkte auf der Gegenkante BD involutorisch entsprechend. Sei nun E, F ein beliebiges Paar der Involution auf BD, so entsprechen sich AE und AF, CE und CF involutorisch, und wir haben nur noch zu beweisen, dass die durch das Vierseit $AECF$ und einen beliebigen Punkt X gelegte Fläche 2. Grades auch X' enthält; denn dann coincidirt sie mit der entsprechenden, die ja auch durch $AECF$ geht. $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ mögen dieselbe Bedeutung haben wie vorhin; so sind $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ zu X, X' harmonisch wegen der ersten Bedingung, zu $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ wegen der Involution auf AC, zu $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ wegen der zweiten Bedingung; also sind XX', $\mathfrak{E}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ in Involution, demnach: $(XX'\mathfrak{C}\mathfrak{E}) = (XX'\mathfrak{F}\mathfrak{A})$ oder: $AE(X, X', AF, EC) = CF(X, X', FA, CE)$.

Als Constituenten der verschiedenen Büschel $(AECF)$ benutzt man je die beiden Ebenenpaare; das eine (EFA, EFC) oder (γ, α) ist fest, das andere (ACE, ACF) erzeugt eine Involution, also einen Flächenbüschel 2. Ordnung; mithin entsteht durch die sämmtlichen Büschel ein Netz. Es ist zugleich ein Gewebe, constituirt durch das feste Punktepaar (A, C) und die Schaar der Punktepaare (E, F).

9. *Aus den beiden Bedingungen:*

$$(XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = -1, \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = -1$$

folgt eine dritte, durch die wir also beliebig eine von ihnen ersetzen können.

Wir setzen zur Abkürzung: $\frac{X\mathfrak{A}}{X'\mathfrak{A}} = \mathfrak{a}$, $\frac{X\mathfrak{B}}{X'\mathfrak{B}} = \mathfrak{b}$, etc.; dann ist $\mathfrak{b} + \mathfrak{d} = 0$; ferner:

*) Reye, Geometrie der Lage, Abth. II, S. 138 der 2. Aufl.

**) Voss, a. a. O. S. 353, 371.

$$-1 = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = \frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{b}} \cdot \frac{\mathfrak{c}-\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}-\mathfrak{d}},$$

oder:

$$2(\mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{d}) + (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})(\mathfrak{b} + \mathfrak{d}) = 0;$$

also:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{d} = 0$$

oder:

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = -\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}};$$

d. h.

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = -(XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C});$$

was sich von der einzigen Bedingung des vorigen Falls (Nr. 6) nur durch das Minuszeichen unterscheidet. Diese bewirkte, dass die Projectivität der entsprechenden Flächen im Büschel $(ABCD)$ in Identität übergeht. *Unsere jetzige Bedingung bewirkt, dass* diese Projectivität Involution wird und also *jede zwei entsprechende Flächen des Büschels* $(ABCD)$ *sich in beiderlei Sinne entsprechen.*

Eine Fläche des Büschels ist durch eine Gerade der einen Schaar individualisirt, z. B. die Gerade, welche die Punkte $X \equiv Z'$ und $Y \equiv W'$ auf AB und CD verbindet. Die beiden ihr entsprechenden Flächen sind dann durch $X'Y'$ und ZW bestimmt.

In Folge unserer Bedingung ist:

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = -(XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C}) = -(YY'\mathfrak{D}_1\mathfrak{C}_1);$$

oder, da $XX' \equiv AB$, $YY' \equiv CD$ ist:

$$(XX'BA) = -(YY'CD);$$

ebenso:

$$(ZZ'BA) = -(WW'CD).$$

Aus beiden folgt durch Division, weil $X \equiv Z'$, $Y \equiv W'$:

$$(ABX'Z) = (DCY'W);$$

dies bedeutet aber, dass $X'Y'$ und ZW auf derselben Fläche durch $ABCD$ liegen, in der sich demnach die beiden entsprechenden Flächen derjenigen, von der wir ausgingen, vereinigen.

10. Gehen wir wieder zu der durch 2 Bedingungen bestimmten Collineation zurück. *Der Büschel* $(ABCD)$ *hat mit dem Netze der sich selbst entsprechenden Flächen das Ebenenpaar* $\alpha\gamma$ *gemein. Also befinden sich beide in demselben Flächengebüsche, das ebenfalls in sich dual ist. Jeder Fläche dieses Gebüsches entspricht eine gewisse andere Fläche desselben in beiderlei Sinne.**)

Sei $\mathfrak{A}^2$ eine Fläche des Gebüsches; wir verbinden sie mit zwei Flächen $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{C}^2$ des Büschels $(ABCD)$ durch Büschel; diese schneiden das Netz in den Flächen $\mathfrak{D}^2$, $\mathfrak{E}^2$, welche mit dem Ebenenpaare $(\alpha\gamma)$

*) Voss, a. a. O. S. 370.

in demselben Büschel sich befinden. Sind $\mathfrak{B}_1^2$, $\mathfrak{C}_1^2$ die entsprechenden Flächen in $(ABCD)$, so gehören $\mathfrak{B}_1^2$, $\mathfrak{C}_1^2$, $\mathfrak{D}^2$, $\mathfrak{E}^2$ zu einem Netze, da die Büschel $(\mathfrak{B}_1^2, \mathfrak{C}_1^2)$ und $(\mathfrak{D}^2, \mathfrak{E}^2)$ das Paar $(\alpha\gamma)$ gemein haben; also haben auch $(\mathfrak{B}_1^2, \mathfrak{D}^2)$ und $(\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{E}^2)$ eine Fläche gemein, welche der $\mathfrak{A}^2$ in beiderlei Sinne entspricht, da $\mathfrak{B}_1^2$, $\mathfrak{C}_1^2$, $\mathfrak{D}^2$, $\mathfrak{E}^2$ den $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{C}^2$, $\mathfrak{D}^2$, $\mathfrak{E}^2$ so entsprechen.

11. Nehmen wir das Haupttetraeder $ABCD$ zum Coordinatentetraeder, so dass α, β, γ, δ die Gleichungen $x_1 = 0, \ldots x_4 = 0$ haben; dann ist die Beziehung zwischen den Coordinaten entsprechender Punkte:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = a_{11} x_1 : a_{22} x_2 : a_{33} x_3 : a_{44} x_4.$$

Einer Fläche des Büschels $(ABCD)$ $x_1 x_3 + \lambda x_2 x_4 = 0$, $y_1 y_3 + \lambda y_2 y_4 = 0$ entsprechen, je nachdem sie zum ersten (x_i) oder zweiten Raume (y_i) gerechnet wird, die Flächen:

$$a_{22}\, a_{44}\, y_1 y_3 + \lambda a_{11}\, a_{33}\, y_2 y_4 = 0,$$
$$a_{11}\, a_{33}\, x_1 x_3 + \lambda a_{22}\, a_{44}\, x_2 x_4 = 0.$$

Die beiden Bedingungen: $(XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = -1$, $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = -(XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C})$ sind ausgedrückt durch die Coefficienten-Relationen: $a_{22} = -a_{44}$, $a_{11} a_{33} = -a_{22} a_{44}$*); man sieht, wie in Folge der letztern jene beiden Flächen sich in: $y_1 y_3 - \lambda y_2 y_4 = 0$ vereinigen.

Das Netz der sich selbst entsprechenden Flächen ist:

$$x_2^2 - \lambda x_4^2 + \mu x_1 x_3 = 0,$$

und das Gebüsch der sich involutorisch entsprechenden Flächen, welches das Netz umfasst:

$$x_2^2 - \lambda x_4^2 + \mu x_1 x_3 + \nu x_2 x_4 = 0.$$

IV.

12. Betrachten wir noch in Kürze die bekannten speciellen Fälle der Collineation.

Wir haben zunächst die *„Collineation mit Axen"*, bei welcher alle Verbindungslinien XX' entsprechender Punkte zwei feste Geraden (Axen) u, v so in U, V treffen, dass das Doppelverhältniss $(XX'UV)$ einen constanten Werth hat. Ist er -1, dann hat man die geschaartinvolutorische Collineation.**) *Bei jeder Collineation mit Axen geht jede der ∞^3 Flächen 2. Grades, die durch die Axen gelegt sind, in sich selbst über und zwar auf die erste Art;* in der Schaar, welche sich auf

*) Im vorigen Falle (Nr. 6) ist $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C})$ äquivalent mit: $a_{11} a_{33} = a_{22} a_{44}$.

**) Reye, Geometrie der Lage, Abth. II, 17. Vortrag der 2. Aufl.

u, v stützt, geht jede Gerade in sich selbst über, in der andern Schaar im Allgemeinen nur die Axen. *Jede gegebene Fläche 2. Ordnung kann durch* ∞^3 *solche Collineationen* (unter denen sich ∞^2 geschaart-involutorische befinden) *in sich transformirt werden*, indem nach der Wahl der Axen noch das Doppelverhältniss freisteht.

Eine geschaart-involutorische Collineation transformirt noch auf eine andere, als die eben besprochene Weise, Flächen 2. Grades in sich selbst. Wenn zwei Gerade u, v Polaren in Bezug auf eine Fläche 2. Grades sind*), so schneidet jede Gerade, welche u, v trifft, die Fläche in zwei zu den Treffpunkten mit u, v harmonischen Punkten. Daraus folgt, dass durch die geschaart-involutorische Collineation, von welcher u, v die Axen (Involutionsaxen) sind, die Fläche in sich selbst transformirt wird, und man sieht, dass *jede gegebene Fläche 2. Grades durch* ∞^4 *geschaart-involutorische Collineationen in dieser Weise in sich transformirt wird, und dass jede gegebene geschaart-involutorische Collineation* ∞^5 *Flächen 2. Grades in sich transformirt,* die ein in sich duales lineares System 5. Stufe bilden. *Auch diese Transformationen sind erster Art.* — Es ist bekannt, dass, wenn eine Homologie (perspective Collineation) eine allgemeine Fläche 2. Grades in sich transformirt, dann Centrum und Ebene der Homologie Pol und Polarebene für die Fläche sein müssen; also ist die Homologie harmonisch oder involutorisch und *keine andere Homologie kann eine Fläche 2. Grades in sich transformiren, als die involutorische. Diese Transformation ist zweiter Art,* da entsprechende Geraden sich schneiden. *Jede gegebene Fläche 2. Grades wird durch* ∞^3 *Homologien in sich transformirt, und jede involutorische Homologie transformirt* ∞^6 *Flächen 2. Grades in sich.*

13. Sehen wir zu, wie für diese speciellen Fälle die Bedingungen erfüllt werden. Für jede Collineation mit Axen u, v giebt es ∞^4 sich selbst entsprechende Tetraeder, alle, welche u, v zu Gegenkanten haben. Im Falle der allgemeinen Collineation mit Axen hat das Kantenvierseit des Tetraeders, durch das eine sich selbst entsprechende Fläche geht, diese Axen zu Gegenseiten: A, B liegen auf u, C, D auf v; alle XX' treffen u, v: in U, V; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ fallen nach V, $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ nach U und $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B})$, $(XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C})$ werden beide 1 und daher gleich. Sollen aber bei der geschaart-involutorischen Collineation u, v Polaren für eine sich selbst entsprechende Fläche sein, so sind sie die Diagonalen AC, BD eines der genannten Kantenvierseite; also fallen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ nach V, $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ nach U und die beiden Invarianten $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B})$, $(XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C})$ werden gleich, weil $(XX'UV) = -1$.

Bei der Homologie hat man ∞^6 sich selbst entsprechende Tetraeder mit einer festen Ecke D im Centrum und A, B, C beliebig in

*) Staudt, Geometrie der Lage Nr. 318.

der Ebene δ der Homologie. Weil alle XX' durch D gehen, so fallen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nach D, $\mathfrak{D}$ aber fällt in den Schnitt U mit δ. Die Bedingung: $(\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = -1$ wird also stets erfüllt; die andere aber: $(XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = -1$ nur dann, wenn $(XX'DU) = -1$, d. h. nur bei der involutorischen Homologie.

14. In Bezug auf den Kegelschnitt gilt:

Jeder gegebene Kegelschnitt wird durch ∞^3 *Collineationen in sich selbst transformirt. Eine beliebige Collineation zweier Felder derselben Ebene transformirt keinen allgemeinen Kegelschnitt in sich selbst. Transformirt aber eine Collineation einen Kegelschnitt in sich, so transformirt sie* ∞^1 *Kegelschnitte, welche sich doppelt berühren mit einer Seite des Hauptdreiecks (sich selbst entsprechenden Dreiecks) als Berührungssehne und den beiden andern als Tangenten*.) Sind* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *die Schnitte irgend einer Verbindungslinie entsprechender Punkte* X, X' *mit den Seiten des Hauptdreiecks, also* $(XX'\mathfrak{B}\mathfrak{C})$, $(XX'\mathfrak{C}\mathfrak{A})$, $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ *die drei Invarianten, so müssen im vorliegenden Fall zwei von diesen Invarianten gleich sein.*

V.

15. *Es sei nun eine Correlation betrachtet, welche eine Fläche 2. Grades* $\mathfrak{A}^2$ *auf die erste Art in sich transformirt.* Die Ecken des Vierseits der sich selbst entsprechenden Geraden g_1, g_2, l_1, l_2 von $\mathfrak{A}^2$ seien, wie in Nr. 5, mit A, B, C, D bezeichnet. Jedem dieser Punkte entspricht seine Berührungsebene in beiderlei Sinne; ebenso entsprechen sich die Diagonalen AC, BD in beiderlei Sinne. Also ist $ABCD$ das Vierseit, in dem sich die Kernflächen der Correlation durchschneiden**). Nennen wir dieses Vierseit *das Hauptvierseit der Correlation* und das zugehörige Tetraeder *das Haupttetraeder.*

Umgekehrt, wenn eine beliebige Correlation vorliegt, so legen wir durch das Hauptvierseit $ABCD$ derselben eine Fläche 2. Grades; die ihr im zweiten Raume durch die Correlation entsprechende Fläche muss gleichfalls durch das Vierseit gehn, weil dessen Seiten sich selbst entsprechen. In der Projectivität, die wiederum in dem Büschel $(ABCD)$ entsteht, correspondirt jede der beiden ausgearteten Flächen, von denen die eine aus dem Ebenenpaare (β, δ) und dem Punktepaare (A, C), die andere aus (α, γ) und (B, D) besteht, der andern. Folglich erhalten wir zwei allgemeine sich selbst entsprechende Flächen, und damit ein anderes Resultat als bisher:

Jede Correlation transformirt auf die erste Art zwei allgemeine

---

*) Hermite, a. a. O. S. 312; Klein, Math. Ann. Bd. IV, S. 601; Frahm, a. a. O. S. 3; Rosanes, a. a. O. S. 67.

**) Schröter, Journ. f. Math. Bd. 77, S. 105 B.

Flächen in sich selbst. Dieselben gehören zu dem Büschel (oder der Schaar) der beiden Kernflächen).*

16. Die Projectivität im Büschel ($ABCD$) ist aber eine Involution; denn die beiden ausgearteten Mitglieder desselben, die „Ebenen-Punkt-Paare" (β, δ; A, C), (α, γ; B, D) entsprechen sich ersichtlich in beiderlei Sinne. Da dies für den Beweis der Involution genügt, so ist dieselbe auch dargethan für den etwaigen Fall eines Nullsystems, bei dem ja die Kernflächen nicht existiren. Sonst aber kann man auch diese benutzen; auch sie entsprechen sich in beiderlei Sinne; denn die Ebenen, welche einem und demselben Punkt der Punkt-Kernfläche, insofern er zum ersten oder zweiten Raume gerechnet wird, durch die Correlation im andern entsprechen, berühren beide die Ebenen-Kernfläche.

*In dem Büschel der Kernflächen entsprechen sich also bei jeder Correlation zwei Flächen stets involutorisch.**)*

Sind demnach X', Y die beiden Pole derselben Ebene $\xi \equiv \eta'$, so liegen dieselben stets auf derselben Fläche des Büschels der Kernflächen, derjenigen, welche zu der von $\xi \equiv \eta'$ berührten in der Involution gepaart ist, und ebenso tangiren die beiden Polarebenen eines Punktes dieselbe Fläche dieses Büschels.

Trifft die Gerade, welche die beiden Pole X', Y verbindet, — Wechselstrahl nach Herrn Schröter,***) — die Ebenen des Haupttetraeders $ABCD$ in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$; so sind X', Y; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ in Involution.

Auf jedem Wechselstrahle einer (nicht involutorischen) Correlation sind die beiden verbundenen Pole und die Schnittpunktspaare mit den beiden Ebenenpaaren durch das Hauptvierseit in Involution; wozu es selbstverständlich einen dualen Satz giebt.

17. Als Doppelelemente der Involution *sind die beiden sich selbst entsprechenden Flächen harmonisch sowohl zu den Kernflächen als auch zu den Ebenen-Punkt-Paaren.*

Die Harmonicität zu den letzteren lässt sich noch anders aussprechen.

Wenn zwei Flächen 2. Grades $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$, die sich in einem windschiefen Vierseite durchschneiden, zu den Ebenenpaaren ihres Büschels harmonisch sind, so heisst das: die Polarebenen A irgend eines Punktes nach ihnen sind harmonisch. Eine Gerade g, welche die beiden Doppellinien der Ebenenpaare (oder die Diagonalen des Vierseits) in U, V trifft, schneide $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ in A_1, A_2; B_1, B_2. Die Polarebenen von A_1 nach den beiden Ebenenpaaren gehen bez. durch die Doppellinien und treffen g in U, V; die Polarebene nach $\mathfrak{A}^2$ ist die Tangentialebene

*) Voss, a. a. O. S. 364, 370.

**) Voss, an der eben angeführten Stelle.

***) a. a. O. S. 132.

und trifft g in A_1; die Polarebene von A_1 nach $\mathfrak{B}^2$ trifft g im vierten harmonischen Punkte von A_1 nach B_1, B_2, nach Vor. aber im vierten harmonischen Punkt zu A_1 nach U, V; letzterer ist aber, da g den Büschel in einer Involution mit U, V als Doppelpunkten schneidet, der Punkt A_2. Demnach sind A_1, A_2 harmonisch zu B_1, B_2. Also:

Wenn zwei sich in einem windschiefen Vierseite durchschneidende Flächen 2. Grades zu den beiden Ebenenpaaren ihres Büschels harmonisch sind, so werden sie von jeder Geraden, welche die beiden Diagonalen des Vierseits trifft, harmonisch geschnitten; wobei dann von den beiden Schnittpunkte-Paaren stets eins und nur eins reell ist.

Umgekehrt, wenn zwei sich in einem Vierseite durchschneidende Flächen 2. Grades von irgend einer beide Diagonalen des Vierseits treffenden Geraden harmonisch geschnitten werden, so sind sie zu den Ebenenpaaren ihres Büschels harmonisch und werden von jeder die Diagonalen treffenden Geraden harmonisch geschnitten.

Verbinde ferner g_1 die Punkte U_1, V_1, welche zu U nach A, C und zu V nach B, D harmonisch sind, so ist dieselbe bekanntlich Polare von g nach allen Flächen des Büschels; da A_1, A_2 nach $\mathfrak{B}^2$ conjugirt sind, so sind die Polarebenen von A_1, A_2, B_1, B_2 nach $\mathfrak{B}^2$ bez. g_1 (A_2, A_1, B_1, B_2); weil g_1 auch Polare von g nach $\mathfrak{A}^2$ ist, so sind die vier Ebenen Tangentialebenen von g_1 an $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$; also haben wir eine Gerade g_1, von welcher an die beiden Flächen 4 harmonische Berührungsebenen kommen; und demnach gilt dies für jede AC, BD treffende Gerade. *Folglich besteht die duale Eigenschaft zugleich.*

Zu jeder Fläche $\mathfrak{A}^2$ giebt es ∞^4 Flächen $\mathfrak{B}^2$, die sich zu ihr in dieser Beziehung befinden: durch jedes der ∞^4 auf $\mathfrak{B}^2$ befindlichen Vierseite geht eine. Also ist die Beziehung für jede der beiden Flächen, wenn die andere gegeben ist, eine fünffache Bedingung. Nennen wir zwei Flächen 2. Grades in dieser Beziehung *harmonisch-zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt.*

Sie bilden das eine räumliche Analogon zu je zwei der „vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitte", welche in § 54 der ersten, § 53 der zweiten Auflage der Steiner-Schröter'schen Vorlesungen behandelt werden; denn je zwei dieser Kegelschnitte berühren sich doppelt und werden, wie leicht aus den dortigen Betrachtungen hervorgeht, von jedem Strahle durch den Berührungspol (Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten nach Steiner und Chasles) in vier harmonischen Punkten geschnitten (und erhalten aus jedem Punkte der Berührungssehne vier harmonische Tangenten).*) Das zweite räumliche Analogon

*) Dass zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte von allen Strahlen durch den Berührungspol nach constantem Doppelverhältniss geschnitten werden, folgt aus Chasles' Sections coniques Nr. 471 oder wird mit Hilfe der Homologie

bilden *zwei harmonischzugeordnete Flächen 2. Grades mit conischer Berührung*, d. h. zwei Flächen 2. Grades, die sich so längs eines Kegelschnitts tangiren, dass irgend ein Strahl aus dem Berührungspole und in Folge dessen jeder solche sie harmonisch schneidet (und jede Gerade in der Ebene des Tactionskegelschnitts ihnen vier harmonische Berührungsebenen zusendet)**).

Zu jeder gegebenen Fläche 2. Grades giebt es ∞^3 andere, welche ihr harmonisch-zugeordnet sind mit conischer Berührung; so dass diese Beziehung für jede der beiden Flächen, wenn die andere gegeben ist, eine sechsfache Bedingung ist.

18. Nun können wir das obige Resultat auch so aussprechen:

Die beiden Flächen 2. Grades, welche durch eine Correlation gleichzeitig in sich transformirt werden, sind harmonisch-zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt.

Ehe die Umkehrung besprochen wird, muss klargestellt werden, ob *beliebige zwei Flächen 2. Grades* $\mathfrak{C}^2$, $\mathfrak{D}^2$, *die sich in einem Vierseite* $ABCD$ *durchschneiden,* stets Punkt- und Ebenen-Kernfläche einer Correlation sind. Wir legen von einem beliebigen Punkte P der $\mathfrak{C}^2$ eine der ∞^1 Tangentialebenen Π' an $\mathfrak{D}^2$, und lassen nun den Punkten A, B, C, D, P aus dem ersten Raume die Ebenen DAB, ABC, BCD, CDA und Π' im zweiten correspondiren. Die Geraden AB, BC, CD, DA entsprechen sich selbst und der Ebene DAB aus dem ersten Raume entspricht der Punkt $(CDA,\ DAB,\ ABC)$, d. i. A im zweiten, etc.; die Diagonalen AC, BD entsprechen sich involutorisch. Das Vierseit $ABCD$ ist das Hauptvierseit der Correlation, und, da P mit Π' incidirt, so gehört P der Punkt- und Π der Ebenen-Kernfläche an, welche demnach mit den gegebenen Flächen coincidiren. Weil Π' ∞^1 Lagen einnehmen kann, so *sind* $\mathfrak{C}^2$, $\mathfrak{D}^2$ *für* ∞^1 *Correlationen die Kernflächen.*

Nun seien $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ zwei Flächen 2. Grades, welche harmonisch-zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt sind; $\mathfrak{C}^2$, $\mathfrak{D}^2$ seien zwei zu ihnen harmonische Flächen ihres Büschels. Dann geht in jeder Correlation, für welche $\mathfrak{C}^2$, $\mathfrak{D}^2$ die Kernflächen sind, jede der beiden Flächen $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ in sich selbst über.

Demnach giebt es ∞^2 Correlationen, durch welche zwei Flächen 2. Grades, die harmonisch-zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt sind, gleichzeitig in sich transformirt werden und zwar auf die erste Art.

---

bewiesen. Die Uebertragung auf zwei Flächen 2. Grades mit conischer Berührung d. h. die sich längs eines Kegelschnitts tangiren, ist selbstverständlich.

**) In Bezug auf die beiden räumlichen Analoga zu zwei sich doppeltberührenden Kegelschnitten sehe man Herrn Schröter's Oberflächen 2. Ordnung S. 699.

VI.

19. Lassen wir aber $\mathfrak{C}^2$ mit einer der beiden gegebenen Flächen, etwa mit $\mathfrak{B}^2$, zusammenfallen, so vereinigt sich auch $\mathfrak{D}^2$ mit $\mathfrak{B}^2$. Wir haben auch jetzt ∞^1 Tangentialebenen Π' aus einem beliebigen Punkt P von $\mathfrak{B}^2$ an $\mathfrak{B}^2$ und also ∞^1 Correlationen. Aber nur wenn Π' in P selbst die $\mathfrak{B}^2$ berührt, erhalten wir die Polarcorrelation (Polarsystem), für welche $\mathfrak{B}^2$ Basisfläche ist. Dass dieselbe $\mathfrak{B}^2$ in sich selbst transformirt, ist evident. Wir haben noch zu zeigen, dass durch sie auch $\mathfrak{A}^2$ in sich übergeht. In der That, wenn g die Gerade ist, die von einem beliebigen Punkte A_1 von $\mathfrak{A}^2$ ausgeht und die Diagonalen des Durchschnitts-Vierseits $ABCD$ von $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ trifft, so ist, wie in Nr. 17 sich ergab, die Polarebene von A_1 nach $\mathfrak{B}^2$ die Berührungsebene von $\mathfrak{A}^2$ im zweiten Schnitte von g.

Bewegt sich A_1 auf einer Geraden a_1 von $\mathfrak{A}^2$, so durchläuft der Berührungspunkt A_2 der polaren Tangentialebene die Gerade a_2, welche in der Regelschaar (a_1, AC, BD) zu a_1 in Bezug auf AC, BD harmonisch ist; also gehören a_1 und a_2 zur selben Schaar auf $\mathfrak{A}^2$.

Demnach ist jede von zwei Flächen 2. Grades $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$, welche harmonisch-zugeordnet sind mit Vierseits-Durchschnitt, zu sich selbst polar in Bezug auf die andere und zwar auf die erste Art, so dass jede der beiden Geradenschaaren in sich selbst übergeht.

20. Damit findet meine Mittheilung in diesen Annalen Bd. 25, S. 236 eine nothwendige Ergänzung, auf die ich schon in einer Schlussbemerkung derselben hingewiesen habe.

Es giebt zwei wesentlich verschiedene Weisen, wie eine Fläche $\mathfrak{A}^2$ zu sich selbst polar sein kann in Bezug auf eine andere $\mathfrak{B}^2$: entweder sind $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{B}^2$ zu einander harmonisch-zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt oder harmonisch-zugeordnet mit conischer Berührung: der letztere Fall ist a. a. O. allein besprochen. *In jenem Falle ist die Transformation von $\mathfrak{A}^2$ in sich selbst von der ersten, in diesem von der zweiten Art* (vergl. a. a. O. Nr. 7).

In beiden Fällen ist dann auch $\mathfrak{B}^2$ zu sich selbst polar in Bezug auf $\mathfrak{A}^2$.

Hält man die eine Fläche, etwa $\mathfrak{B}^2$, fest, so ist im ersten Falle das System der Flächen $\mathfrak{A}^2$, die nach $\mathfrak{B}^2$ zu sich selbst polar sind oder nach denen $\mathfrak{B}^2$ zu sich selbst polar ist, das System 4. Stufe der Flächen $\mathfrak{A}^2$, welche zu $\mathfrak{B}^2$ harmonisch-zugeordnet sind mit Vierseits-Durchschnitt; im zweiten Falle erhält man das System 3. Stufe der Flächen $\mathfrak{A}^2$, die zu $\mathfrak{B}^2$ harmonisch-zugeordnet sind mit conischer Berührung. Letzteres ist nicht in ersterem enthalten. Beide Systeme sind in sich dual. Ueber das System 3. Stufe bringt meine kürzliche Note einige weitere Mittheilungen.

21. In dieser Note wurde auch gezeigt, dass, wenn $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ harmonisch-zugeordnet sind mit conischer Berührung, zwei Punkte A_1, A_2 von $\mathfrak{A}^2$, von denen jeder zu der Berührungsebene α_2, α_1 des andern nach $\mathfrak{B}^2$ polar ist, sowie auch die beiden Berührungsebenen α_1, α_2 einander entsprechen in der involutorischen Homologie (Nr. 12), für welche der Berührungspol und die „Berührungsebene" von $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ Centrum und Ebene sind. *Jede der ∞^3 Polarcorrelationen, durch welche eine Fläche $\mathfrak{A}^2$ in sich selbst auf die zweite Art transformirt wird, ist je mit einer der ∞^3 involutorischen Homologien, welche dasselbe leisten, verbunden.*

Aber ebenso, wenn $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ harmonisch-zugeordnet sind mit Vierseits-Durchschnitt und A_1 und α_2, A_2 und α_1 von $\mathfrak{A}^2$ polar sind nach $\mathfrak{B}^2$, so sind auch A_1 und A_2, α_1 und α_2 entsprechend in der geschaart-involutorischen Collineation, von welcher die Diagonalen des Durchschnitts-Vierseits die Axen sind. *Und es ist jede der ∞^4 Polarcorrelationen, welche $\mathfrak{A}^2$ in sich selbst transformiren auf die erste Art, verbunden mit je einer der ∞^4 geschaart-involutorischen Collineationen, welche dasselbe leisten und polare Geraden von $\mathfrak{A}^2$ zu Axen haben.* (Nr. 12).

22. Der Beweis in Nr. 1 der erwähnten Note wird bei zwei sich in einem Vierseite durchschneidenden Flächen $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ dadurch illusorisch, dass dann p' mit p identisch wird und auf die gemeinsame Tangentialebene nicht geschlossen werden kann. Es ist vielmehr zu schliessen: Zwei Flächen 2. Grades, von denen eine zu sich selbst polar ist nach der andern, durchschneiden sich entweder in einem Vierseite oder tangiren sich conisch; in beiden Fällen hat dann der Beweis der harmonischen Eigenschaft zu folgen.

Zwischen den beiden Systemen 4. und 3. Stufe der Basisflächen $\mathfrak{B}^2$ — die wir nun als Flächen $\mathfrak{B}_1{}^2$, $\mathfrak{B}_2{}^2$ unterscheiden wollen — für die Polarcorrelationen, welche $\mathfrak{A}^2$ in sich selbst überführen, besteht folgende Beziehung. Seien b_1, b_2 zwei Polaren nach $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}_1{}^2$ die zu $\mathfrak{A}^2$ harmonisch-zugeordnete Fläche durch dasjenige Vierseit auf $\mathfrak{A}^2$, von dem b_1, b_2 die Diagonalen sind. Auf jedem Strahle, welcher b_1, b_2 trifft, sind die Schnitte mit $\mathfrak{B}_1{}^2$ harmonisch sowohl zu denen mit $\mathfrak{A}^2$, als zu denen mit b_1, b_2, folglich sind sie die Doppelpunkte der durch die beiden letzteren Paare bestimmten Involution. Mithin ist $\mathfrak{B}_1{}^2$ mit der in Nr. 8 der Note gewonnenen Fläche B^2 identisch, d. i. mit dem Orte der nach $\mathfrak{A}^2$ genommenen Pole B der Ebenen β, längs deren Schnittcurven mit $\mathfrak{A}^2$ diese Fläche von solchen Flächen $\mathfrak{B}_2{}^2$ berührt wird, welche b_1 und deshalb auch b_2 tangiren. Die Ebenen β umhüllen die Polarfläche von $\mathfrak{B}_1{}^2$ ($\equiv \mathsf{B}^2$) nach $\mathfrak{A}^2$, also nicht, wie früher behauptet wurde, eine von $\mathfrak{B}_1{}^2$ verschiedene Fläche, sondern $\mathfrak{B}_1{}^2$ selbst auf Grund der jetzigen Resultate; so dass die Worte „von ihr verschiedene" am Schlusse der Nr. 8 und der betreffende Theil des Beweises zu tilgen sind.

23. Ich muss zum Schlusse dieser Bemerkungen über Polarcorre-

lationen noch erwähnen, dass ich bei der Abfassung der Note an die Abhandlung des Herrn H. Thieme*): „Ueber die Flächen 2. Grades, für welche zwei Flächen 2. Grades zu einander polar sind,“ mich leider nicht erinnert habe. Derselbe findet hinsichtlich der 8 Basisflächen P, zu denen sein Problem führt**), dass jede von ihnen ihre eigene Polarfläche ist nach jeder der 7 andern, dass sie in zwei Gruppen von je 4 zerfallen, derartig, dass (unter Anwendung meiner Terminologie) irgend zwei Flächen aus derselben Gruppe harmonisch-zugeordnet sind mit Vierseits-Durchschnitt, irgend zwei aber aus verschiedenen Gruppen harmonisch-zugeordnet sind mit conischer Taction. *Es sind demnach dort in der That die beiden Arten gefunden, wie eine Fläche 2. Grades zu sich selbst polar sein kann nach einer andern.* Es wird dann weiter gezeigt, dass, wenn eine beliebige Fläche $\mathfrak{A}^2$ als eine der P gewählt wird, vermittelst irgend eines ihrer Polartetraeder die 7 andern gefunden werden: vier sind die der gegebenen harmonisch-zugeordneten, welche sie bez. längs ihrer Schnitte mit den Ebenen des Tetraeders berühren, die drei andern sind die der $\mathfrak{A}^2$ harmonisch-zugeordneten, welche durch ein Vierseit auf $\mathfrak{A}^2$ gehen, dessen Seiten die 4 Schnitte von $\mathfrak{A}^2$ mit zwei Gegenkanten des Tetraeders verbinden und von dem also diese Kanten die Diagonalen sind. Lässt man das Polartetraeder alle möglichen Lagen einnehmen, so erhält man durch die 4 einen und die 3 andern Flächen die beiden Systeme 3. und 4. Stufe der Flächen $\mathfrak{B}_1^2$, $\mathfrak{B}_2^2$. Die Stufenzahlen 3, 4 hat jedoch Herr Thieme noch nicht ermittelt.

24. In Nr. 19 ergab sich, dass es ∞^1 Correlationen giebt, welche $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ in sich transformiren und deren Kernflächen sich in $\mathfrak{B}^2$ (oder $\mathfrak{A}^2$) vereinigen; und nur eine von ihnen ist, wie gesagt, Polarcorrelation. *In der That können die beiden Kernflächen einer räumlichen Correlation identisch werden, ohne dass dieselbe in eine Polarcorrelation übergeht;* während in der Ebene Identität der Kerncurven Polarcorrelation zur Folge hat***).

*) Dissertation von Breslau 1877; auch abgedruckt in der Zeitschrift für Math. Bd. 22, S. 377.

**) Dieselben und ihre Haupteigenschaften behandelt auch Herr d'Ovidio (Giornale di Matematiche Bd. 10 (1872) S. 313). Dort ist auch das analoge Problem auf der Geraden und in der Ebene besprochen. Das ebene Problem ist schon vorher in zwei kurzen Bemerkungen von Steiner und Cremona und dann eingehender von den Herren Rosanes (De polarium reciprocarum theoria observationes, Dissertation von Breslau, 1865) und Schröter (Steiner'sche Vorlesungen über synth. Geom. an der in Nr. 17 erwähnten Stelle) behandelt. An beiden Orten wird auch die Eigenschaft der 4 Kegelschnitte gewonnen, dass jeder seine eigene Polarcurve ist in Bezug auf jeden der 3 andern.

***) Man sehe auch Battaglini in Bd. 12 der Memorie della R. Accademia dei Lincei (1882): Sulle forme quaternarie bilineari (auf welchen mir hier nicht zugänglichen Aufsatz mich Herr Klein aufmerksam gemacht hat).

Macht man das Haupttetraeder einer Correlation (deren Hauptvierseit $ABCD$ ist) zum Coordinatentetraeder in derselben Weise wie in Nr. 11, so ist die Beziehung zwischen den Coordinaten x_i, y_i conjugirter Punkte der beiden Räume:

$$a_{13}x_1y_3 + a_{24}x_2y_4 + a_{31}x_3y_1 + a_{42}x_4y_2 = 0;$$

dem Punkte x_i entspricht also die Ebene:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = a_{31}x_3 : a_{42}x_4 : a_{13}x_1 : a_{24}x_2,$$

dem Punkte y_i aber die Ebene:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = a_{13}y_3 : a_{24}y_4 : a_{31}y_1 : a_{42}y_2.$$

Nehmen wir nun an, dass $a_{13} : a_{24} = a_{31} : a_{42} (= k)$, so sind die beiden Kernflächen:

$$x_1x_3 + kx_2x_4 = 0, \quad k\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4 = 0;*)$$

das sind aber Punkt- und Tangentialgleichung der nämlichen Fläche. Nur wenn auch $a_{13} = a_{31}$, haben wir Polarcorrelation. Die beiden in sich transformirten Flächen sind:

$$x_1x_3 + kx_2x_4 = 0, \quad x_1x_3 - kx_2x_4 = 0.$$

25. *Unter den ∞^2 Correlationen, welche die Flächen 2. Grades $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$, die harmonisch-zugeordnet sind mit Vierseits-Durchschnitt, auf die erste Art in sich transformiren* (Nr. 18), *befinden sich auch zwei Nullsysteme.*

Wenn durch ein Nullsystem eine Fläche 2. Grades in sich transformirt wird, so geht von der einen Regelschaar derselben jede Gerade in sich selbst über, ist ein Leit- oder Nullstrahl des Nullsystems und die Fläche ist Träger einer in dem zugehörigen linearen Complexe befindlichen Regelschaar; *von der andern Schaar entsprechen nur zwei Strahlen sich selbst, die übrigen entsprechen sich involutorisch.*

In der That, ist P ein Punkt der Fläche, so berührt auch seine Nullebene dieselbe und enthält, da sie mit ihm incidirt, die eine der beiden in ihm sich schneidenden Geraden der Fläche. Diese ist demnach ein sich selbst entsprechender Strahl des Nullsystems. Von den so bei 5 Punkten der Fläche sich ergebenden sich selbst entsprechenden Strahlen müssen mindestens drei der nämlichen Schaar angehören; woraus folgt, dass jeder Strahl dieser Schaar sich selbst correspondirt.

∞^2 *Nullsysteme*, nämlich jedes, dessen linearer Complex die eine oder andere Regelschaar der Fläche enthält, *transformiren die Fläche in sich selbst. Und jedes Nullsystem transformirt ∞^6 Flächen 2. Grades in sich*, denn so viele Regelschaaren enthält ein linearer Complex.

---

*) Wofern $a_{13} + a_{31} \gtrless 0$; denn es ist durch $a_{13} + a_{31}$ dividirt; verschwindet diese Grösse, so ist die Correlation ein Nullsystem, bei dem ja die Gleichungen der Kernflächen Identitäten sind.

Sei $g_1 l_1 g_2 l_2$ das Durchschnitts-Vierseit der beiden harmonisch-zugeordneten Flächen $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$. Jede Correlation (und also auch jedes Nullsystem), bei der diese 4 Geraden sich selbst entsprechen und welche die eine der beiden Flächen in sich transformirt, transformirt nach Nr. 16, 17 auch die andere in sich. Wenn nun bei einem Nullsysteme, welches dies thut, auf $\mathfrak{A}^2$ alle Geraden aus der Schaar der g sich selbst entsprechen, so gilt dies auf $\mathfrak{B}^2$ für die Schaar der l. Denn wären auch hier alle g sich entsprechend, so würde, wenn g', g'' die beiden durch einen Punkt von l_1 gehenden Geraden g auf $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ sind, die Nullebene dieses Punktes die 3 Geraden l_1, g', g'' enthalten, also in ihm beide Flächen berühren; was bei einem beliebigen Punkte von l_1 nicht der Fall ist. Ist demnach g_3, l_3 je eine dritte Gerade in jeder der beiden Schaaren von $\mathfrak{A}^2$, so liefern die beiden linearen Complexe $(g_1, l_1, g_2, l_2, g_3)$, $(g_1, l_1, g_2, l_2, l_3)$ die beiden Nullsysteme. Das eine transformirt jede Gerade g von $\mathfrak{A}^2$ und jede Gerade l von $\mathfrak{B}^2$, das andere jede Gerade l von $\mathfrak{A}^2$ und jede Gerade g von $\mathfrak{B}^2$ in sich selbst.*) —

Betrachten wir das erste Nullsystem und die Fläche $\mathfrak{A}^2$; es seien A_1 und α_2 ein Punkt derselben und seine Nullebene; beide sind mit derselben g incident; A_2 sei der Berührungspunkt von α_2; so sind die durch A_1 und A_2 gehenden Geraden l harmonisch zu den sich selbst entsprechenden l_1, l_2, also auch A_1, A_2 harmonisch zu gl_1, gl_2.

Mit jedem der ∞^2 Nullsysteme, die eine gegebene Fläche 2. Grades in sich transformiren, ist demnach, in ähnlicher Weise wie bei den Polarcorrelationen (Nr. 21), *eine der ∞^2 geschaart-involutorischen Collineationen verbunden, die dies thun, deren Axen aber Gerade der Fläche sind, nicht Polaren.* (Nr. 12 Anfang).

VII.

26. Wir haben jetzt *die Transformation einer Fläche 2. Grades $\mathfrak{A}^2$ in sich selbst durch eine Correlation auf die zweite Art* zu untersuchen. Wir bezeichnen, wie in Nr. 7, die Punkte $g_1 l_1$, $g_1 l_2$, $g_2 l_2$, $g_2 l_1$ mit A, E, C, F. Die Punkte A, C haben dann in beiderlei Sinne die Ebenen $g_1 l_1$, $g_2 l_2$, die in ihnen $\mathfrak{A}^2$ tangiren, zu entsprechenden,

*) Es besteht ein Satz: *Wenn die einen Regelschaaren G, G' zweier Flächen 2. Grades einem linearen Complexe Γ angehören, so thun es auch die beiden andern L, L'.* Die lineare Congruenz, welche durch G und eine beliebige Gerade g_1' von G' bestimmt ist, befindet sich in Γ und hat deshalb mit G' noch eine zweite Gerade g_2' gemein; ihre Leitlinien, zwei Gerade l_1, l_2 von L, treffen also g_1', g_2'. Durch L und l_1', l_2', zwei Gerade von L', ist ein zweiter linearer Complex Λ bestimmt; zu ihm gehört die Congruenz (l_1, l_2, l_1', l_2'); deren Directricen sind g_1', g_2' und folglich gehört die ganze Schaar L' zu ihr und also auch zu Λ, welcher demnach L und L' umfasst.

den Punkten E, F entsprechen die Ebenen $l_1 g_2$, $l_2 g_1$ doppelt, die Geraden AC und EF entsprechen sich gegenseitig doppelt. Auf der Geraden EF haben wir in den Punkten E, F zwei doppelt conjugirte Punkte, also eine Involution doppelt conjugirter Punkte und in Folge dessen auch eine Involution doppelt conjugirter Ebenen um AC. Es seien B, D die Doppelpunkte der ersteren Involution und demnach $AC(B, D)$ die Doppelebenen der letzteren, welche den B, D in beiderlei Sinne entsprechen. Demnach entspricht jede der 4 Geraden AB, BC, CD, DA sich selbst und wir haben in $ABCD$ das Hauptvierseit der Correlation. Da nun im Allgemeinen keine der beiden Diagonalen des Hauptvierseits eine Involution doppelt conjugirter Punkte trägt, so folgt:

Bei einer beliebigen Correlation giebt es keine allgemeine Fläche 2. Grades, die durch sie auf die zweite Art in sich transformirt wird.

27. *Liegt aber auf einer der beiden Diagonalen, BD, des Hauptvierseits einer Correlation ein Paar und in Folge dessen eine Involution doppelt conjugirter Punkte*, was eine einfache Bedingung für die Correlation ist; so liefert jedes Paar E, F derselben mit A, C verbunden zwei Geradenpaare AE, AF; CE, CF, die sich in beiderlei Sinne entsprechen; denn E und A haben in beiderlei Sinne ACF und DAB zu entsprechenden Ebenen, so dass der AE die Schnittlinie AF in beiderlei Sinne correspondirt. *In dieser Correlation treten also zu den Diagonalen AC, BD, die sonst das einzige Paar (nicht vereinigter) in beiderlei Sinne sich entsprechender Geraden sind,*) noch ∞^1 Paare involutorisch sich entsprechender Geraden.*

Jeder Fläche 2. Grades durch eines dieser Vierseite $AECF$ entspricht durch die Correlation eine durch das nämliche Vierseit gehende andere. In der Projectivität, die so im Büschel entsteht, entsprechen die degenerirten Flächen wiederum nicht sich selbst; also liefert jeder von diesen Büscheln zwei allgemeine sich selbst entsprechende Flächen.

*Durch die vorliegende specielle Correlation werden demnach ∞^1 Flächen 2. Grades in sich selbst transformirt und zwar auf die zweite Art.**)*

Dieses System 1. Stufe von Flächen 2. Grades ist in sich dual.

Durch jeden Punkt gehen, jede Ebene tangiren zwei Flächen desselben.

Denn die sämmtlichen Büschel durch die verschiedenen Vierseite geben, wie in Nr. 8, ein Netz, das zugleich ein Gewebe ist. Ein beliebiger Punkt P bestimmt darin einen Büschel, der ein Ebenenpaar enthält, da es im Netze einen ganzen Büschel von Ebenenpaaren giebt.

---

*) Schröter, Journ. f. Math. Bd. 77, S. 140.

**) Voss, a. a. O. S. 371.

Folglich berührt eine Ebene nur zwei Flächen des Büschels; ist sie die eine Polarebene von P (nach der Correlation), so entspricht dann jede der beiden von ihr berührten Flächen des Büschels sich selbst, da sie durch das sich selbst entsprechende Vierseit geht und zugleich einen Punkt enthält und seine Polarebene tangirt. — Jede der beiden Flächen tangirt dann auch die andere Polarebene von P.

28. Aus ähnlichen Gründen, wie in Nr. 16, ist die Projectivität in jedem der Büschel $(AECF)$ eine Involution. Die beiden sich selbst entsprechenden Flächen sind deshalb harmonisch-zugeordnet.

Ferner entspricht jeder Fläche des Netzes dieser Vierseit-Büschel eine andere Fläche, je aus demselben Vierseit-Büschel, in beiderlei Sinne. Wir haben, wie im allgemeinen Falle (Nr. 16), *im Büschel des Hauptvierseits* $ABCD$ eine Involution. Weil dieser Büschel mit dem Netze die Fläche $BD(A, C)$ gemein hat, so *befinden sich Büschel und Netz in demselben Gebüsche* und analog wie in Nr. 10 kann man beweisen, dass *jede Fläche dieses Gebüsches einer andern desselben in beiderlei Sinne entspricht;**) nur dass hier $\mathfrak{D}^2$, $\mathfrak{E}^2$ nicht sich selbst entsprechen, sondern bez. ihnen doppelt entsprechende Flächen $\mathfrak{D}_1^2$, $\mathfrak{E}_1^2$ haben, was aber am Beweise nichts ändert.

Bemerken wir den Unterschied, dass hier das System 3. Stufe der sich involutorisch entsprechenden Flächen nur ein System 1. Stufe von sich selbst entsprechenden Flächen enthält, im analogen Falle der Collineation aber ein System 2. Stufe, hingegen die Collineation zwei Bedingungen, die Correlation nur eine zu erfüllen hat.

Benutzt man dasselbe Coordinatentetraeder wie in Nr. 24, so ist der jetzige Specialfall charakterisirt durch:

$$a_{42} = a_{21}.$$

Das quadratische System der sich selbst entsprechenden Flächen ist:

$$2\sqrt{-a_{13}a_{31}}\,\tau x_1 x_3 + a_{21}(x_2^2 - \tau^2 x_4^2) = 0;$$

das Gebüsche der sich involutorisch entsprechenden Flächen ebenso wie in Nr. 11:

$$x^2 - \lambda x_4^2 + \mu x_1 x_3 + \nu x_2 x_4 = 0. \text{ —}$$

Die vorliegende specielle Correlation hat noch folgende leicht zu beweisende Eigenschaften.

Der tetraedrale Complex der Wechselstrahlen**) zerfällt in die beiden speciellen linearen Complexe (Strahlengewinde, wie ich vor einiger Zeit vorgeschlagen habe, diese Complexe zu nennen), welche die Diagonalen AC, BD bez. zu Axen haben; der erste, bez. zweite dieser Complexe stellt ferner den (sonst allgemeinen) linearen Complex

*) Voss, ebenda.

**) Schröter, Journal f. Math. Bd. 77, S. 105 B.

der Geraden dar, welche Involutionen doppelt conjugirter Ebenen, bez. Punkte tragen.*)

29. Bei der *Polarcorrelation* kann jedes der ∞^4 auf der Basisfläche $\mathfrak{A}^2$ befindlichen Vierseite $ABCD$ als Hauptvierseit angesehen werden und sogar beide Diagonalen (und demnach alle Geraden) tragen eine Involution doppelt conjugirter Punkte (und Ebenen). Es sei E, F ein Paar der Involution auf BD; sind dann G, H die Doppelpunkte der Involution $(B, D; E, F)$, so sind G und ACH Pol und Polarebene nach $\mathfrak{A}^2$. Die Fläche $\mathfrak{B}^2$, die der $\mathfrak{A}^2$ harmonisch-zugeordnet ist mit conischer Berührung längs des Schnitts von ACH und also nach $\mathfrak{A}^2$ zu sich selbst polar ist, geht gerade durch das Vierseit $AECF$; denn die beiden Geraden, welche die gemeinsame Berührungsebene von $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ in A aus $\mathfrak{B}^2$ ausschneidet, müssen, weil G und ACH auch nach $\mathfrak{B}^2$ polar sind, zu G und H harmonisch sein, aber auch zu B und D, weil BD durch den Berührungspol G geht. Folglich sind sie AE, AF, und ebenso wird $\mathfrak{B}^2$ von BCD in CE, CF geschnitten. Demnach ist $\mathfrak{B}^2$ die eine der durch $AECF$ gehenden in sich selbst transformirten Flächen, ACG liefert die andere. So führt jede Ebene durch AC oder BD zu einer $\mathfrak{B}^2$, die nach $\mathfrak{A}^2$ zu sich selbst polar ist. Man kann sich leicht überzeugen, dass nicht ∞^5, sondern nur ∞^3 Flächen sich ergeben. —

30. In der Ebene findet man ohne Mühe folgende Resultate: *Bei jeder Correlation zweier Felder derselben Ebene werden zwei Kegelschnitte in sich selbst transformirt; sie befinden sich in dem Büschel (der Schaar) der beiden Kerncurven;**) sie sind harmonisch-zugeordnet und harmonisch zu den beiden Kerncurven. Die übrigen Curven des Büschels entsprechen sich involutorisch ***) Dass zwei Kegelschnitte harmonisch-zugeordnet sind, ist sowohl Bedingung dafür, dass einer und deshalb jeder von ihnen zu sich selbst polar ist nach dem andern, als auch dafür, dass beide zugleich durch die nämliche Correlation und dann sofort durch ∞^1 Correlationen in sich selbst transformirt werden.*

Zweiter Theil.

I.

31. Für die analoge Untersuchung über die *cubische Raumcurve* ist die Figur eines gewissen zu zwei Punkten A, C der Curve und ihren Tangenten a, c gehörigen Tetraeders, das Herr Schröter†) als

*) Math. Ann. Bd. 19, S. 461 Abschn. II.

**) Voss, a. a. O. S. 364.

***) Ebenda und S. 358 Anm.

†) Math. Ann. Bd 25, S. 293.

das Schmiegungstetraeder der beiden Punkte (*und ihrer Tangenten*) bezeichnet und als wichtige Figur für Raumcurven überhaupt, insbesondere für cubische Raumcurven hervorgehoben hat, von Werth. A, C sind zwei Ecken desselben, die beiden andern sind die Schnitte B, D der Tangenten a, c mit den Schmiegungsebenen γ, α von C, A. Die Ebenen desselben sind demnach die beiden Schmiegungsebenen α, γ und die Ebenen, welche ihre Tangenten a, c je mit dem Osculationspunkte C, A der andern verbinden. Zwei Gegenkanten sind also die beiden Tangenten AB, CD, zwei weitere die Sehne AC und die Schnittlinie $\alpha\gamma$ der Schmiegungsebenen; das dritte Paar AD, CB wird gebildet von den beiden Schmiegungsstrahlen der Punkte A, C, von denen jeder die Tangente des andern Punktes trifft; wenn wir dabei mit Herrn Schubert*) unter *Schmiegungsstrahl* eines Punktes einer Raumcurve jeden Strahl verstehen, der durch den Punkt in dessen Schmiegungsebene gezogen ist, also bei der cubischen Raumcurve jeden durch den Punkt gehenden Nullstrahl des der Curve zugehörigen Nullsystems.

Die Figur des Schmiegungstetraeders ist in sich dual. Sie tritt auch schon in älteren Aufsätzen auf. Das Coordinatentetraeder, das zu der einfachsten Form der Möbius'schen parametrischen Darstellung der cubischen Raumcurve führt, die Herr Cremona**) gefunden hat, ist ein Schmiegungstetraeder der Curve. Von zwei solchen Schmiegungsstrahlen, wie AD, CB, zu zwei Punkten A, C der Curve gehörig und jeder die Tangente des andern treffend, beweist weiter Herr Cremona***), dass jede Sehne der cubischen Raumcurve, welche den einen trifft, auch dem andern begegnet und dass die beiden Treffpunkte conjugirt sind in Bezug auf die Curve d. h. harmonisch zu den Schnitten der Sehne mit der Curve. Er nennt sie *associirte Geraden* der Curve. Es ergiebt sich unmittelbar, dass jede geschaart-involutorische Collineation, welche zwei associirte Geraden der cubischen Raumcurve zu Axen hat, die Curve in sich selbst transformirt.

32. *Wird ein Schmiegungstetraeder $ABCD$ gegeben, mit der genaueren Festsetzung, dass A und C die Punkte der Curve, AB, CD die Tangenten in ihnen sind, aus der dann folgt, dass ABD, CDB die Schmiegungsebenen von A, C sind, und ausserdem noch ein Punkt E*

*) Kalkül der abzählenden Geometrie § 25. — Herr Schröter nennt am oben a. O. $\alpha\gamma$ einen Schmiegungsstrahl.

**) Annali di Matematica ser. I, Bd. I (1858) S. 164, 278. — Vergl. auch Joachimsthal Journ. f. Math. Bd. 56, S. 44 und Salmon-Fiedlers Raumgeometrie Bd. II. Nr. 99 in der 3. Auflage.

***) Journ. f. Math. Bd. 58, S. 138, Nr. 14; Nouv. Ann. de math. Ser. II, Bd. 1, S. 287, 366, 436 Nr. 6. Vergl. auch Reye, Geom. der Lage, Abth. II, S. 108 der 2. Aufl.; Schröter, Oberflächen 2. Ordn. S. 263.

oder eine Schmiegungsebene, so ist die cubische Raumcurve eindeutig bestimmt. Wir stellen uns irgend eine cubische Raumcurve, welche in der vorgeschriebenen Weise $ABCD$ zum Schmiegungstetraeder hat, und die beiden Kegel 2. Grades vor, welche sie aus A, C projiciren. Der erstere wird von der Schmiegungsebene ABD seines Scheitels A längs der Tangente AB berührt,*) und da CD ihn auf AC tangirt, so wird er auch von ACD längs AC berührt.**) Also gehört dieser Kegel (A) einem gewissen Büschel sich längs zweier Kanten berührender Kegel 2. Grades an. Ebenso wird der Kegel (C) von CDB längs CD, von CAB längs CA berührt. Jeder Kegel des einen Büschels mit jedem des andern geschnitten liefert eine Curve aus dem *Systeme 2. Stufe (Bündel) von Curven, welche $ABCD$ in der obigen Weise zum Schmiegungstetraeder haben.* Der Punkt E bestimmt aus jedem Büschel einen Kegel und somit eine Curve aus dem Bündel. Die duale Betrachtung ergiebt die andere Behauptung.***)

33. Es sei eine cubische Raumcurve gegeben und $ABCD$, $A'B'C'D'$ seien zwei Schmiegungstetraeder derselben, gehörig zu A, C; AB, CD, bez. A', C'; $A'B', C'D'$, und E, E' zwei beliebige Punkte der Curve. Die Collineation, in der den Punkten A, B, C, D, E die Punkte A', B', C', D', E' correspondiren, transformirt die Curve in eine andere, welche $A'B'C'D'$ in derselben Weise zum Schmiegungstetraeder hat und durch E' geht, also mit der gegebenen identisch ist. Entsprechen aber in einer Correlation den Punkten A, B, C, D, E die Ebenen $A'B'D'$, $A'B'C'$, $C'D'B'$, $C'D'A'$ und die Schmiegungsebene von E', so geht die Curve über in eine andere (in den Torsus einer andern), welche $A'B'C'D'$ in derselben Weise zum Schmiegungstetraeder hat und die genannte Schmiegungsebene osculirt, also ebenfalls mit der gegebenen identisch ist.

Lässt man nun A', C', E' die gegebene Curve durchlaufen, so folgt, dass *jede cubische Raumcurve durch ∞^3 Collineationen oder Correlationen in sich selbst transformirt werden kann.*

Da es nun ∞^{12} cubische Raumcurven giebt, so wird, wenn eine Collineation oder Correlation i Bedingungen erfüllen muss, um eine cubische Raumcurve in sich überzuführen, jede, welche dieselben erfüllt, ∞^i cubische Raumcurven in sich transformiren.

Auf einer cubischen Raumcurve, welche durch Collineation oder Correlation in sich selbst übergeht, entsteht stets eine Projectivität von Punkten, in welcher entsprechende Punkte der Collineation sich

*) Vergl. Schröter, Oberflächen 2. Ordnung S. 262.

**) Cremona, a. zuerst a. O.

***) Vergl. auch Staudt, Beitr. zur Geom. der Lage Nr. 464, wo bewiesen wird, dass durch 3 Punkte und die Tangenten und Schmiegungsebenen von zweien die cubische Raumcurve eindeutig bestimmt ist.

ebenfalls correspondiren, bei der Correlation aber ein Punkt der Curve als dem ersten Raume angehörig und der Osculationspunkt der ihm im zweiten correspondirenden Schmiegungsebene sich entsprechen.

II.

34. Die sich selbst entsprechenden Punkte A, C dieser Projectivität sind nun bei der Collineation zwei Ecken des Haupttetraeders (Nr. 5), die zugehörigen Tangenten, die sich ebenfalls selbst entsprechen, zwei Kanten desselben und zwar nothwendig zwei windschiefe AB, CD und die Schmiegungsebenen zwei Ebenen desselben, also da die Schmiegungsebene des einen Punktes den andern nicht enthalten kann, die Ebenen ABD, CDB.*) *Demnach ist das Haupttetraeder der Collineation für eine cubische Raumcurve, welche durch dieselbe in sich transformirt wird, ein Schmiegungstetraeder.*

Betrachten wir nun einen der 12 Bündel von cubischen Raumcurven, welche das Haupttetraeder $ABCD$ einer gegebenen Collineation zum Schmiegungstetraeder haben, also etwa, wie bisher, den, für welchen A, C die Punkte der Curve und AB, CD die zugehörigen Tangenten sind. Die beiden Kegelbüschel (A), (C), welche die Curven aus A, C projiciren, gehen durch die Collineation in sich selbst über, denn z. B. einem Kegel, der ABD und ACD längs AB und AC tangirt, entspricht ein eben so beschaffener Kegel. In einer sich selbst entsprechenden cubischen Raumcurve müssen also sich selbst entsprechende Kegel (A) und (C) einander schneiden. Die sich selbst entsprechenden Elemente der Projectivität im Büschel (A) sind aber im allgemeinen die ausgearteten (ABD, ACD) und (ABC, ABC); und dasselbe gilt in (C).

Also transformirt eine beliebige Collineation keine allgemeine cubische Raumcurve in sich selbst.

35. *Geschieht dies aber*, so existirt in jedem der beiden Büschel (A), (C) noch ein drittes sich selbst entsprechendes Element, und alle entsprechen sich deshalb selbst.

Alle ∞^2 cubischen Raumcurven gehen dann in sich selbst über, welche das Haupttetraeder der Collineation in derselben Weise zum Schmiegungstetraeder haben wie die Curve, die n. V. in sich transformirt wird.

Die Collineation hat dann zwei Bedingungen zu genügen. Zwei entsprechende Punkte X, X' müssen beide sowohl auf einem Kegel (A), als auf einem Kegel (C) liegen. Jenes führt zu:

$$AB(X, X', C, D) = AC(X, X', D, B)$$

oder:

$$(XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C}) = (XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}),$$

*) Staudt, Beiträge zur Geom. der Lage Nr. 514.

wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, wie im ersten Theil, die Schnitte von XX' mit den Ebenen $BCD, \ldots$ des Haupttetraeders sind; dieses zu:

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}).$$

Also hat die Collineation die Doppelbedingung:

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C}) = XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D})$$

oder eine der 11 *analogen zu erfüllen, wenn sie eine und dann sofort einen ganzen Bündel von cubischen Raumcurven in sich transformiren soll.*

Die 12 Fälle ergeben sich aus den 6 Combinationen von A, B, C, D (oder $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$) zu je zweien und den dann noch möglichen 2 Permutationen der beiden übrigen.

Aus: $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C})$ folgt nach Nr. 6, dass *die Collineation sämmtliche Flächen des Büschels $(ABCD)$ in sich selbst überführt.* Jede dieser Flächen wird von allen ∞^2 in sich transformirten cubischen Raumcurven in A, C osculirt, denn jede der Curven tangirt in A, C die beiden Geraden AB, CD der Fläche und die Schmiegungsebene des Berührungspunktes ist die Tangentialebene der Fläche. Folglich enthält die durch einen beliebigen Punkt der Curve gelegte Fläche des Büschels die Curve ganz, so dass *auf jeder Fläche des Büschels ∞^1 Curven des Bündels liegen, welche einen Büschel sich doppelt berührender Curven bilden.*

Die 3 *Büschel sich selbst entsprechender Flächen*, die in diesem Falle sich ergeben haben, haben zu je zweien keine Fläche gemein. Ihre Flächen sind die einzigen in sich transformirten.

Durch jede der ∞^2 in sich transformirten cubischen Raumcurven gehen demnach drei in sich transformirte Flächen 2. Grades; die aber nicht demselben Büschel angehören; sie haben zu je zweien noch gemeinsam AC, AB, CD.

36. Das Haupttetraeder $ABCD$ sei in derselben Weise wie in Nr. 11 zum Coordinatentetraeder gewählt; so erhalten wir die ∞^2 cubischen Raumcurven, welche $ABCD$ als zu A, C; AB, CD gehöriges Schmiegungstetraeder haben, als Schnitte der Kegel:

$$x_2 x_3 - \lambda x_4^2 = 0, \quad x_1 x_4 - \mu x_2^2 = 0;$$

woraus wir, mit Herrn Cremona*), die parametrische Darstellung:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \mu \lambda^2 \omega^3 : \lambda \omega^2 : 1 : \omega,$$

ableiten; jedes Werthepaar (λ, μ) giebt eine Curve. Hieraus folgt:

$$x_1 x_3 = \lambda \mu x_2 x_4;$$

d. h. alle Curven des Bündels mit constantem Producte $\lambda\mu$ liegen auf derselben Fläche durch das Vierseit $ABCD$.

---

*) a. in Nr. 31 zuerst a. O.

Ist wiederum wie in Nr. 11 die Beziehung zwischen den Coordinaten x_i, y_i entsprechender Punkte:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = a_{11} x_1 : a_{22} x_2 : a_{33} x_3 : a_{44} x_4,$$

so entspricht dem Punkte ω der Curve (λ, μ) der Punkt mit den Coordinaten $a_{11} \mu \lambda^2 \omega^3$, $a_{22} \lambda \omega^2$, a_{33}, $a_{44} \omega$; er gehört derselben Curve an und diese coincidirt dann, wegen Nr. 32, mit ihrer entsprechenden, wenn es ein ω' giebt, so beschaffen, dass:

$$\mu \lambda^2 \omega'^3 : \lambda \omega'^2 : 1 : \omega' = a_{11} \mu \lambda^2 \omega^3 : a_{22} \lambda \omega^2 : a_{33} : a_{44} \omega.$$

Dies erfordert die beiden Gleichungen:

$$a_{44}^3 = a_{11} a_{33}^2, \quad a_{44}^2 = a_{22} a_{33}$$

oder die drei mit zweien äquivalenten:

$$a_{11} a_{44} = a_{22}^2, \quad a_{22} a_{33} = a_{44}^2, \quad a_{11} a_{33} = a_{22} a_{44}.$$

Dieselben sind von λ, μ unabhängig. Werden sie erfüllt, so gehen alle Curven des Bündels in sich selbst über. Die Uebereinstimmung dieser Doppelbedingung mit der von Nr. 35 ist leicht zu verificiren; und ebenso sieht man unmittelbar, dass sie bewirken, dass die Flächen der drei Büschel:

$$x_2 x_3 - \lambda x_4^2 = 0, \quad x_1 x_4 - \mu x_2^2 = 0, \quad x_1 x_3 - \nu x_2 x_4 = 0$$

in sich selbst transformirt werden.

37. In Nr. 31 wurde bemerkt, dass *jede geschaart-involutorische Collineation, welche zwei associirte Geraden einer cubischen Raumcurve zu Axen hat, die Curve in sich selbst transformirt.*

Auch umgekehrt sind stets die Axen einer geschaart-involutorischen Collineation, welche eine cubische Raumcurve in sich selbst transformirt, zwei associirte Geraden derselben.

Denn die entsprechenden Punkte auf der Curve bilden eine Involution und ihre Verbindungslinien eine Regelschaar, zu deren Leitschaar die Axen u, v gehören. Jede wird demnach von der Curve einmal getroffen: in A, bez. C, und die Tangenten a, c an die Curve in A, C sind Gerade der Regelschaar (mit drei vereinigten von den 4 harmonischen Punkten); sie treffen also auch v, u: in B, D. Die Ebenen au, cv haben je drei in A, bez. C zusammenfallende Schnitte mit der Curve (zwei auf a, einen auf u z. B.), osculiren sie also dort; mithin sind u, v Schmiegungsstrahlen und da sie a, bez. c treffen, associirte Geraden.

Auch die Fläche der Regelschaar wird von der Curve in A, C osculirt. Sie geht durch die Collineation ebenfalls in sich selbst über, aber auf die im Anfang von Nr. 12 besprochene Weise.

Jede cubische Raumcurve wird demnach durch ∞^2 geschaart-involutorische Collineationen in sich transformirt.

Jede geschaart-involutorische Collineation hingegen transformirt ∞^6 *cubische Raumcurven in sich selbst.*

Denn wir können A, C beliebig auf den Axen u, v annehmen und a, c einen beliebigen Strahl von A nach v, bez. von C nach u. Ist dann $B \equiv av$, $D \equiv bu$, so gehen alle ∞^2 cubischen Raumcurven, welche $ABCD$ als zu A, C; AB, CD gehöriges Schmiegungstetraeder haben, durch die Collineation in sich selbst über.

Da hier alle Geraden XX' die u, v treffen: in U, V, so ist, wenn $ABCD$ wieder eins der ∞^4 Haupttetraeder ist (A, D auf u, B, C auf v), $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C} \equiv U$, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{D} \equiv V$; also geht die Doppelbedingung von Nr. 35 über in die einfache: $(XX'VU) = (XX'UV)$, welche erfüllt wird, weil $(XX'UV) = -1$.

Dass durch keine nicht involutorische Collineation mit Axen (Nr. 12), so wie auch durch keine Homologie — auch nicht die involutorische — eine Raumcurve in sich transformirt werden kann, ist leicht einzusehen.

III.

38. Der Fall der Correlation ist wesentlich schwieriger. *Wenn durch eine Correlation eine cubische Raumcurve in sich selbst übergeht* und dabei dem zum ersten Raume gerechneten Punkte X desselben die Schmiegungsebene $\mathfrak{x}'$ im zweiten entspricht, so entspricht der Tangente und der Schmiegungsebene von X die Tangente und der Osculationspunkt von $\mathfrak{x}'$. Die vereinigten Punkte A, C der nach Nr. 33 Schluss auf der Curve entstehenden Projectivität sind dann solche Punkte, denen, wenn sie zum ersten Raume gerechnet werden, je ihre eigene Schmiegungsebene im zweiten correspondirt. Folglich entspricht jedem dieser Punkte, als Punkt des zweiten Raums, auch die eigene Schmiegungsebene im ersten, und jede der Tangenten sich selbst. Mithin sind A, C und ihre Tangenten zwei Ecken und Seiten des Hauptvierseits der Correlation (Nr. 15) und zwar sind, da keine der beiden Schmiegungsebenen den andern Punkt enthält und zwei Tangenten einer cubischen Raumcurve immer windschief sind, A, C zwei Gegenecken und die Tangenten zwei Gegenseiten AB, CD. Also ist $ABCD$ dieses Vierseit und ABD, CDB, welche A, C in der Correlation entsprechen, sind die Schmiegungsebenen von A, C. *Mithin ist das Tetraeder des Hauptvierseits $ABCD$ der Correlation das zu den Punkten A, C und den Tangenten AB, CD gehörige Schmiegungstetraeder der Curve.* Seiten des Vierseits sind die beiden Tangenten und die beiden Schmiegungsstrahlen.

39. *Ist nun eine Correlation gegeben und $ABCD$ ihr Hauptvierseit, so ist zu untersuchen, ob es in einem der vier Bündel von cubischen Raumcurven, welche $ABCD$ zum Schmiegungstetraeder haben,* das zu

A und C und AB, CD, oder zu A, C; AD, CB oder zu B, D; BC, DA oder zu B, D; BA, DC gehört, *sich selbst entsprechende Curven giebt.* Wir wollen den *ersten Bündel* ins Auge fassen.

Statt die Curven durch die Kegel (A) und (C) und also punktweise zu erzeugen, können wir sie auch durch Schmiegungsebenen erzeugen vermittelst je zweier Kegelschnitte, die in den gemeinsamen Schmiegungsebenen ABD und CDB oder γ, α*) liegen. Die Kegelschnitte (α) bilden in α einen Büschel sich doppelt berührender Kegelschnitte mit CB als Berührungssehne und CD, BD als gemeinsamen Tangenten. Ebenso haben die Kegelschnitte (γ) in γ die Gerade AD zur Berührungssehne und AB, BD zu gemeinsamen Tangenten. Die Büschel (A) und (α), (C) und (γ) sind ersichtlich je zu einander perspectiv. Legt man nun von den verschiedenen Punkten der Geraden BD, die für alle (α) und (γ) gemeinsame Tangente ist, je die zweite Tangente an einen Kegelschnitt (α) und einen (γ), so geben die Verbindungsebenen dieser zweiten Tangenten die Schmiegungsebenen der cubischen Raumcurve, die aus diesen beiden Kegelschnitten (α), (γ) entsteht. Es fragt sich, wie gewinnt man aus einem Kegelpaar (A), (C) das Kegelschnittpaar (α), (γ), welches die nämliche Raumcurve liefert.

X sei der Punkt, durch den wir die cubische Raumcurve und die beiden Kegel bestimmt denken wollen. Die Kante AX treffe α in X_α; dieser bestimmt einen Kegelschnitt $(\alpha)_1$, die Spur des Kegels (A); x_α sei die Tangente desselben in X_α, also die Spur der längs AXX_α den Kegel (A) berührenden Ebene in α. Der Schnittpunkt von x_α mit BD sei D_1; so ist AD_1 die Spur derselben Tangentialebene in der Ebene ABD oder γ. Ebenso treffe CX die Ebene γ in X_γ; durch diesen gehe der Kegelschnitt $(\gamma)_1$, der in X_γ von x_γ berührt werde, welche die Spur der den Kegel (C) längs CXX_γ berührenden Ebene in γ ist, während ihre Spur in CBD oder α die Gerade CB_1 ist, wenn B_1 wieder der Schnitt von x_γ mit BD ist. Die beiden Tangentialebenen schneiden sich in der Tangente an die cubische Raumcurve in X, folglich sind $Y_\alpha \equiv (x_\alpha, CB_1)$ und $Y_\gamma \equiv (x_\gamma, AD_1)$ die Spuren dieser Tangente in α, γ. Der von den Spuren der Schmiegungsebenen einer cubischen Raumcurve in einer festen Schmiegungsebene eingehüllte Kegelschnitt ist zugleich der Ort der Spuren der Tangenten in dieser Ebene. Demnach sind die beiden durch Y_α, bez. Y_γ gehenden Kegelschnitte (α), (γ) die gesuchten.

40. *Man kann sich auf die Punkte X einer Ebene durch AC beschränken*, um den ganzen Curvenbündel herzustellen. *Ist dann Z*

*) α und γ sind also im Folgenden, sofern nicht direct anderes gesagt ist: die den Ecken A, C gegenüberliegenden Ebenen des Tetraeders $ABCD$, und demnach γ die Schmiegungsebene von A, α die von C.

der Schnittpunkt dieser Ebene mit BD, so bewegen sich X_α und X_γ auf CZ und AZ.

Nun hat man für einen Büschel sich doppelt berührender Kegelschnitte den Satz: Ist durch den einen Berührungspunkt eine Gerade gezogen, so gehen die verschiedenen Tangenten an die Kegelschnitte in deren zweiten Schnitten mit dieser Geraden alle durch denselben festen Punkt auf der Tangente des andern gemeinsamen Berührungspunktes; derselbe ist vom Berührungspol (Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten) durch die Berührungssehne und jene Gerade harmonisch getrennt. Wir benutzen zum Beweise den Büschel in α, in dem ja CZ durch den einen Berührungspunkt C gezogen ist. X_α liegt auf CZ und (α) sei, wie oben, der durch ihn gehende Kegelschnitt, seine Tangente $x_\alpha \equiv D_1 X_\alpha$ treffe die andere gemeinsame Tangente CD in K. Da DD_1K dem (α) umgeschrieben ist, so laufen DX_α, CD_1, KB in einen Punkt O zusammen; das vollständige Viereck $ACX_\alpha O$ zeigt, dass D_1 *harmonisch ist zu* D *in Bezug auf* B *und* Z. *Demnach bleibt* D_1 *fest, und ebenso bleibt* B_1 *fest im vierten harmonischen Punkte zu* B *in Bezug auf* D *und* Z. Folglich bewegen sich Y_α und Y_γ auf den festen Geraden CB_1, AD_1. Wir gewinnen dadurch das Resultat:

Die Tangenten aller Curven unseres Curvenbündels in den dritten Schnitten mit einer Ebene durch die beiden gemeinsamen Punkte stützen sich auf zwei Schmiegungsstrahlen dieser Punkte und erzeugen also eine lineare Congruenz.

Die Schmiegungsebenen der Curven in diesen Punkten gehen alle durch den Punkt Z nach dem bekannten Satze, dass der Schnittpunkt der Schmiegungsebenen von 3 Punkten der Curve in deren Ebene liegt.

Also sind $Y_\alpha Z$, $Y_\gamma Z$ *die Tangenten an die beiden Curven* (α), (γ) *in* Y_α, Y_γ.

Man kann leicht weiter beweisen, dass sämmtliche Tangenten der Curven des Bündels einen tetraedralen Complex erzeugen.*)

Bewegt man nun in der festen Ebene ACZ den Punkt X auf einer Geraden g, so wird seine Tangente $XY_\alpha Y_\gamma$ eine Regelschaar (g, AD_1, CB_1) beschreiben**); Y_α, Y_γ also werden sich projectiv auf CB_1, AD_1 bewegen, und da diese Geraden je durch einen der Berührungspunkte der Büschel (α), (γ) gehen, so werden diese Büschel projectiv mit je den durch Y_α, Y_γ gehenden Kegelschnitten als entsprechenden.

---

*) Ein analoges Resultat habe ich Journal f. Math. Bd. 79 S. 107 gefunden für die cubischen Raumcurven, welche durch 4 gegebene Punkte gehen und eine gegebene Gerade zweimal treffen.

**) Die Schmiegungsebene beschreibt daher einen Kegel 2. Grades, so dass der Punkt X und seine Schmiegungsebene Feld und Bündel erzeugen, die quadratisch verwandt sind.

Legt man demnach von einem festen Punkte R auf BD je die zweiten Tangenten an zwei entsprechende Kegelschnitte, so ergeben sich projective Strahlbüschel um R in den Ebenen α, γ. Die Verbindungsebenen entsprechender Strahlen, also die dritten Schmiegungsebenen von R (ausser α, γ) an die cubischen Raumcurven, welche durch die verschiedenen Punkte X von g bestimmt werden, umhüllen einen Kegel 2. Grades.

Der Punkt X in ACZ und die dritte Schmiegungsebene ξ aus R auf BD an die durch ihn bestimmte Raumcurve des Bündels bestimmen sich gegenseitig eindeutig. Demnach sind das Punktfeld in ACZ und der Ebenenbündel aus R dadurch in eine eindeutige quadratische Verwandtschaft gebracht.

Liegt R in Z, so ist die Schmiegungsebene ξ immer die in X selbst osculirende.

41. Wir nennen die feste Ebene ACZ, je nachdem sie zum ersten oder zweiten Raume gehört, σ oder τ'; die ihr in der vorgelegten Correlation entsprechenden Pole, die beide auf BD liegen, seien S', T. Wir denken den obigen Punkt R in T fallend; dann sei X' der Pol der Schmiegungsebene ξ. Er liegt in $\tau' \equiv ACZ$ und ist der dritte Schnitt dieser Ebene mit der Curve des Bündels, welche der durch X gehenden und von ξ osculirten Curve, insofern sie zum ersten Raume gehört, im zweiten correspondirt. Da, wenn ξ einen Kegel 2. Grades umhüllt, X' einen Kegelschnitt beschreibt; *so befinden sich die beiden Felder, welche in ACZ von X und X' — den beiden Punkten, in denen diese feste Ebene zwei in der Correlation entsprechende Curven unseres Bündels zum dritten Male schneidet, — beschrieben werden, in eindeutiger quadratischer Verwandtschaft.*

Das Dreieck ACZ ist für beide Felder das Hauptdreieck, derartig, dass den Ecken A, C, Z die Seiten AZ, CZ, AC in beiderlei Sinne corespondiren.

Zunächst ist klar, dass wir von X' zu X auf die nämliche Weise gelangen, wie von X zu X'; nur dass S' an Stelle von T tritt. Also genügt es, darzuthun, dass wenn X nach Z fällt, oder in einen beliebigen Punkt von AZ, X' jeder beliebige Punkt von AC sein kann, bez. nach A fällt. Wenn X nach Z fällt, so zerfällt die cubische Raumcurve in AB, CD, BD; die dritte Schmiegungsebene ξ aus T (oder S') ist jede beliebige Ebene durch BD; ihr Pol X' also jeder beliebige Punkt von AC.

Fällt zweitens X beliebig auf die Linie AZ, so fällt X_a nach Z, x_a nach $D_1Z \equiv BD$, also Y_a nach B_1 und der durch Y_a bestimmte Kegelschnitt (α) ist das Paar der gemeinsamen Tangenten (CD, BD); die an ihn aus dem Punkte T (oder S') auf BD kommende zweite Tangente fällt ebenfalls nach BD; und wie auch die zweite Tangente

aus T an den Kegelschnitt (γ) liege, die beide verbindende Ebene $\mathfrak{x}$ ist γ oder DAB und ihr Pol X' ist A.

42. Wenn nun zwei in dieser quadratischen Verwandtschaft entsprechende Punkte X, X' (die ausserhalb des Hauptdreiecks liegen) sich vereinigen, so fallen auch zwei entsprechende Curven zusammen.

Jedem Strahle durch A, zum X-Felde gerechnet, entspricht, abgesehen von AZ, ein Strahl durch C im X'-Felde. Beide bewegen sich projectiv und der durch ihren Schnittpunkt erzeugte Kegelschnitt $\mathfrak{K}_A$ ist der Ort der Punkte X', die je mit ihrem entsprechenden X auf einer Geraden durch A liegen. Man findet leicht, dass dieser Kegelschnitt die Geraden AZ, CZ in A, C tangirt. Der analog für C construirte Kegelschnitt $\mathfrak{K}_C$ thut dasselbe. Eine Coincidenz von X und X' muss auf beiden Kegelschnitten liegen. Dieselben haben aber im Allgemeinen ausser den Berührungspunkten A, C keinen Punkt gemein. Demnach erhalten wir zunächst das negative Resultat:

Durch eine beliebige Correlation wird keine (allgemeine) cubische Raumcurve in sich transformirt.

43. *Fallen aber die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}_A, \mathfrak{K}_C$ in einen $\mathfrak{K}$ zusammen*, so vereinigt sich jeder Punkt X desselben mit seinem entsprechenden X', da nur so X, X' sowohl mit A, als mit C in gerader Linie liegen; und umgekehrt, wenn X' sich mit X vereinigt, so ist dieser Punkt beiden Kegelschnitten $\mathfrak{K}_A, \mathfrak{K}_C$ gemeinsam, so dass sie coincidiren.

Alle ∞^1 Curven des Bündels, die durch einen Punkt von $\mathfrak{K}$ gehen, coincidiren mit ihren entsprechenden.

Da $\mathfrak{K}$ die beiden Geraden AZ, CZ in A, C tangirt, so tangirt er auch die Ebenen ADB, CDB, welche von ACZ in AZ, CZ geschnitten werden, und liegt deshalb auf einer gewissen Fläche $\mathfrak{A}^2$ des Büschels $(ABCD)$; und da alle Curven des Bündels alle Flächen dieses Büschels und demnach auch $\mathfrak{A}^2$ in A, C osculiren, *so liegen die sich selbst entsprechenden Curven*, weil sie überdies $\mathfrak{K}$ treffen, *auf dieser Fläche $\mathfrak{A}^2$ des Büschels durch das Hauptvierseit und bilden auf ihr einen Büschel.*

Jedem Strahle durch Z in der Ebene ACZ, als zum X-Felde gehörig, correspondirt ein ebenfalls durch Z gehender Strahl im X'-Felde. Diese Strahlen müssen in unserem Falle sich vereinigen, da sie $\mathfrak{K}$, der nicht durch Z geht, in demselben Punkte treffen. Demnach liegen zwei entsprechende Punkte X, X' stets auf einer Geraden durch Z; die so auf jedem Strahle durch Z entstehende Projectivität ist eine Involution, da Z und der Schnitt mit AC sich in beiderlei Sinne entsprechen; die Doppelpunkte sind die Schnitte mit $\mathfrak{K}$. *Also ist in unserm Falle die quadratische Verwandtschaft der X- und X'-Felder in ABZ*

*eine Hirst'sche**) *quadratische Inversion.* Und weil nun jede zwei correspondirenden Punkte X, X' involutorisch sich entsprechen, so *entsprechen sich auch jede zwei correspondirenden cubischen Raumcurven des Bündels involutorisch.*

Wir können als Kennzeichen dieses Falles angeben, dass irgend einmal zwei entsprechende Curven des Bündels von einer Ebene durch AC in zwei dritten Punkten getroffen werden, welche mit der Spur Z der Geraden BD in der Ebene in gerader Linie liegen; es geschieht dies dann für jede zwei entsprechenden Curven und jede Ebene durch AC, und die beiden dritten Schmiegungsebenen, die von einem beliebigen Punkte auf BD an zwei entsprechende Curven gelegt sind, schneiden sich in einer AC treffenden Geraden. Denn wenn X, X' mit Z in gerader Linie liegen, so haben wir auf dieser eine Involution und die Doppelpunkte geben uns zwei weitere gemeinsame Punkte von $\mathfrak{K}_A$ und $\mathfrak{K}_C$, u. s. f.

Jede Gerade, welche AC, BD und die eine von zwei entsprechenden Curven des Bündels trifft, trifft auch die andere, und die beiden Treffpunkte mit den Curven sind conjugirt in Bezug auf die Fläche, welche die sich selbst entsprechenden Curven trägt.

44. Wir suchen aber noch nach einem einfacheren Kennzeichen, zu dem uns eine andere Betrachtung führen soll.

Es lässt sich nämlich darthun, dass *bei jeder Correlation den sämmtlichen cubischen Raumcurven des betrachteten Bündels, welche auf einem Kegel (A) oder (C) sich befinden, Curven entsprechen, die auf demselben Kegel (C) oder (A) liegen.*

Bewegt man X in der festen Ebene ACZ auf einer Geraden durch A, so dass man auf demselben Kegel (A) bleibt; so bleibt X_α fest, folglich auch Y_α (Nr. 39), mithin auch der durch Y_α bestimmte Kegelschnitt (α), demnach auch die zweite Tangente an ihn aus T, d. h. die Schnittlinie der Schmiegungsebene $\mathfrak{x}$ mit α oder CBD; folglich bewegt sich X' auf einer Geraden, die durch C, den Pol von CBD, geht, und die durch X' bestimmte Curve also auf dem durch diese Gerade bestimmten Kegel (C).

Es sei nun insbesondere der Kegel (A) das Ebenenpaar (ACD, ABD) der gemeinsamen Tangentialebenen. Der Schnitt mit ACZ (ausser AC) ist AZ; X_α fällt dann nach Z und Y_α nach B_1; der durch Y_α bestimmte Kegelschnitt (α) ist das Paar der gemeinsamen Tangenten CD, BD; die zweite Tangente aus T an ihn ist also BD, mithin bewegt sich X' auf AC; dadurch wird im Büschel (C) die Doppelebene CAD bestimmt [das Ebenenpaar (CAB, CDB) ist bestimmt durch irgend einen Punkt seiner zweiten Schnittkante BZ mit ABZ]. Ebenso würden wir,

*) Annali di Matematica ser. I Bd. 7 S. 49.

wenn wir den Punkt X' auf AZ laufen liessen, um (ACD, ABD) zu bestimmen, durch die X die Doppelebene CAD erhalten; es träte nur S' an Stelle von T.

Daraus folgt, dass dem Kegel (ACB, ACB), durch X oder X' bestimmt, der Kegel (CAB, CDB), durch X' oder X bestimmt, entspricht.

Es sind also jedem Kegel (A), von Curven des Bündels erfüllt, zwei Kegel (C) zugeordnet, welche bez. die den Curven auf (A) entsprechenden Curven tragen, je nachdem man die Curven auf (A) zum ersten oder zweiten Raume rechnet. Dadurch entsteht im Büschel (C) eine Projectivität; vereinigte Elemente derselben sind im Allgemeinen nur die Ebenenpaare (CAD, CAD), (CAB, CDB), welche, wie eben gezeigt, den (ACD, ABD), (ACB, ACB) in beiderlei Sinne correspondiren.

Hat jedoch die Projectivität in (C) ein drittes vereinigtes Element, d. h. *entspricht irgend einem allgemeinen Kegel von (A) in beiderlei Sinne derselbe allgemeine Kegel in (C), so entspricht jedem Kegel (A) ein Kegel (C) in beiderlei Sinne.*

Die eine beliebige Curve des Bündels projicirenden Kegel $(A)_1$, $(C)_1$ sind im Allgemeinen nicht entsprechende. Zu welchem Raume wir die Curve auch rechnen, die eine, wie die andere entsprechende Curve liegen auf dem $(A)_1$ entsprechenden Kegel (C) und auf dem $(C)_1$ entsprechenden Kegel (A), sind also identisch. *Alle Curven des Bündels entsprechen sich involutorisch.*

Sind aber $(A)_1$, $(C)_1$ entsprechend in der jetzigen Beziehung, so fällt die Curve mit ihrer entsprechenden zusammen; *die Paare der entsprechenden Kegel liefern die ∞^1 sich selbst entsprechenden Curven.*

Das Erzeugniss 4. Ordnung der beiden projectiven Kegelbüschel besteht aus den Ebenen ACD, ABC und einer Fläche 2. Grades, welche die sich selbst entsprechenden Curven trägt.

Wir können das obige Kriterium auch so aussprechen: Es seien X', Y die beiden Pole einer Ebene $\xi \equiv \eta'$. Liegen sie auf einem allgemeinen Kegel (C), so befinden sich die beiden Curven p'^3, r^3 des Bündels, die der von $\xi \equiv \eta'$ osculirten $p^3 \equiv r'^3$ entsprechen und die bez. durch X', Y gehen, auf jenem Kegel (C); derselbe entspricht dem Kegel (A), welcher $p^3 \equiv r'^3$ enthält, in beiderlei Sinne, und *unser Fall liegt vor.*

Aber es lässt sich zeigen, dass dann X', Y auch auf demselben Kegel (A) liegen. Je nachdem sie nämlich auf einem Kegel (C) oder einem Kegel (A) liegen, hat man, durch eine ähnliche Ueberlegung wie in Nr. 35:

$$(X'Y\mathfrak{D}\mathfrak{C}) = (X'Y\mathfrak{B}\mathfrak{D}), \quad \text{bez.} \quad (X'Y\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (X'Y\mathfrak{B}\mathfrak{D}).$$

Aber eine dieser Bedingungen zieht die andere nach sich, denn nach

Nr. 16 sind bei jeder Correlation auf jedem Wechselstrahle X', Y; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ in Involution; also ist:

$$(X'Y\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (YX'\mathfrak{C}\mathfrak{D}) = (X'Y\mathfrak{D}\mathfrak{C}).$$

Demnach können wir eine dieser beiden Bedingungen als Kriterium für unsern Fall annehmen.

Da dann X', Y gleichzeitig auf einem Kegel (A) und einem Kegel (C) liegen, so fallen die beiden Curven p'^3 und r^3 zusammen.

Nach dem Pascal'schen Satze lässt sich aber das Liegen von X', Y auf einem Kegel (A) oder (C) dahin aussprechen, dass *die Schnittlinien* (ACX', ABY), (ABX', ACY) *auf einer Ebene durch* AD *liegen, bez. die Schnittlinien* (CAX', CDY), (CDX', CAY) *in einer Ebene durch* CB.

Wenn also bei einer Correlation, von welcher $ABCD$ das Hauptvierseit ist und X', Y irgend ein Paar zu derselben Ebene gehöriger Pole sind, von den eben erwähnten Lagenbeziehungen die eine eintritt, so tritt auch die andere ein; beide treten dann bei allen solchen Paaren wie X', Y ein, und die so beschaffene Correlation transformirt jede Curve des Bündels, für welche $ABCD$ das zu A, C; AB, CD gehörige Schmiegungstetraeder ist, in eine andere Curve des Bündels involutorisch um (*d. h. so, dass die beiden Curven sich in beiderlei Sinne entsprechen*); *ein Büschel in diesem Bündel enthält lauter in sich selbst transformirte Curven, welche von einer durch das Hauptvierseit gehenden Fläche 2. Grades getragen werden. Die in der Involution dieses Büschels* (Nr. 16) *ihr entsprechende Fläche wird von den Torsen dieser Curven eingehüllt.*

Fasst man die 3 andern Bündel (Nr. 38) ins Auge, so erhält die Bedingung drei andere Formen.

Also eine der 4 *Bedingungen*:

$$\left.\begin{array}{llll} (ACX', ABY) & \textit{und} & (ABX', ACY) & \textit{mit}\ AD \\ (ACX', ADY) & \textit{und} & (ADX', ACY) & \textit{mit}\ AB \\ (BDX', BAY) & \textit{und} & (BAX', BDY) & \textit{mit}\ BC \\ (BDX', BCY) & \textit{und} & (BCX', BDY) & \textit{mit}\ BA \end{array}\right\} \textit{in einer Ebene}$$

(von denen jede durch eine äquivalente ersetzt werden kann), *muss von der Correlation erfüllt werden, wenn sie eine und dann* ∞^1 *cubische Raumcurven in sich transformiren soll.*

46. Wir wollen die hauptsächlichsten Resultate noch analytisch bestätigen. Wir nehmen $ABCD$ als Coordinatentetraeder in derselben Weise wie in Nr. 36 (und 11) und erhalten die Curven des Bündels, der von Nr. 39 ab ins Auge gefasst wurde, dargestellt durch:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \mu\,\lambda^2\omega^3 : \lambda\,\omega^2 : 1 : \omega.$$

Die Gleichung der Ebene durch die 3 Punkte $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ der Curve (λ, μ) ist:

$$x_1 - \mu\lambda(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) - \mu\lambda^2\Theta_1\Theta_2\Theta_3 x_3 + \mu\lambda^2(\Theta_1\Theta_2 + \Theta_1\Theta_3 + \Theta_2\Theta_3)x_4 = 0;$$

also die der Schmiegungsebene in Θ:

$$x_1 - 3\mu\lambda\Theta x_2 - \mu\lambda^2\Theta^3 x_3 + 3\mu\lambda^2\Theta^2 x_4 = 0.$$

Also sind ihre Coordinaten

$$1, \; -3\mu\lambda\Theta, \; -\mu\lambda^2\Theta^3, \; 3\mu\lambda^2\Theta^2.$$

Der Punkt R auf BD habe die Coordinaten $0, \varrho, 0, 1$; so haben wir für die dritte Schmiegungsebene von ihm an die Curve (λ, μ) und den Parameter Θ ihres Osculationspunktes:

$$\Theta = \frac{\varrho}{\lambda}.$$

Aehnlich erhält man für den dritten Schnitt einer Ebene $x_2 - \tau x_4 = 0$ durch AC und (λ, μ):

$$\omega = \frac{\tau}{\lambda}.$$

Ist $ABCD$ das Hauptvierseit der Correlation, so haben wir (Nr. 24):

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = a_{31}x_3 : a_{42}x_4 : a_{13}x_1 : a_{24}x_2;$$

also die dem Punkte $\omega = \frac{\tau}{\lambda}$ der Curve (λ, μ) entsprechende Ebene ist:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = a_{31}\lambda : a_{42}\tau : a_{13}\mu\tau^3 : a_{24}\tau^2.$$

Sei nun der obige Punkt $(0, \varrho, 0, 1)$ der Schnitt dieser Ebene mit BD, also der Pol im zweiten Raume zu der Ebene $x_2 - \tau x_4 = 0$, so ist:

$$a_{42}\tau\varrho + a_{24}\tau^2 = 0, \quad \text{oder:} \quad \varrho = -\frac{a_{24}\tau}{a_{42}};$$

mithin ist die dritte Schmiegungsebene von ihm an die Curve (λ, μ), da das Θ ihres Osculationspunktes $-\frac{a_{24}\tau}{a_{42}\lambda}$ ist:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = a_{42}^3\lambda : 3a_{42}^2 a_{24}\tau\lambda\mu : a_{24}^3\tau^3\mu : 3a_{42}a_{24}^2\tau^2\lambda\mu.$$

Wenn die Ebenen η_i und ξ_i identisch sind, so ist auch die Curve (λ, μ) mit ihrer entsprechenden identisch; denn beide haben $ABCD$ in derselben Weise zum Schmiegungstetraeder und noch eine Schmiegungsebene gemein.

Zu jener Identität ist zunächst erforderlich:

$$a_{13} : a_{31} = a_{24}^3 : a_{42}^3.$$

Nur wenn diese Bedingung (oder eine der drei analogen) erfüllt wird, transformirt die Correlation cubische Raumcurven in sich. Wird sie

erfüllt und ist k der gemeinsame Werth von $a_{24}^3 : a_{13}$, $a_{42}^3 : a_{31}$, so ist weiter nothwendig:

$$3 a_{24} a_{42} \lambda \mu = k.$$

Die ∞^1 cubischen Raumcurven des Bündels, deren λ, μ dieser Bedingung genügen, gehen in sich selbst über; sie erfüllen (Nr. 36) die Fläche:

$$3 a_{24} a_{42} x_1 x_3 = k x_2 x_4$$

durch das Hauptvierseit, und ihre Torsen umhüllen die polare Fläche: $3 k \eta_1 \eta_3 = a_{24} a_{42} \eta_2 \eta_4$ oder: $a_{24} a_{42} x_1 x_3 = 3 k x_2 x_4$. Man findet leicht, dass die obige Bedingung, die von der Correlation zu erfüllen ist, mit $(X' Y \mathfrak{A} \mathfrak{B}) = (X' Y \mathfrak{B} \mathfrak{D})$ äquivalent ist.

Die dem Punkte $\omega = \frac{\tau}{\lambda}$ der Curve (λ, μ) entsprechende Ebene war:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = a_{31} \lambda : a_{42} \tau : a_{13} \mu \tau^3 : a_{24} \tau^2.$$

Sie osculire die Curve (λ_1, μ_1) im Punkte $\Theta = -\frac{a_{24} \tau}{a_{42} \lambda_1}$; also sind ihre Coordinaten:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = a_{42}^3 \lambda_1 : 3 a_{42}^2 a_{24} \tau \lambda_1 \mu_1 : a_{24}^3 \tau^3 \mu_1 : 3 a_{42} a_{24}^2 \tau^2 \lambda_1 \mu_1.$$

Hieraus folgt, da die Proportion der zweiten und vierten Glieder von selbst erfüllt wird:

$$a_{31} \lambda = a_{42}^2 : 3 a_{24} \mu_1, \quad a_{13} \mu = a_{24}^2 : 3 a_{42} \lambda_1;$$

worin wir die Beziehung zwischen den λ, μ; λ_1, μ_1 entsprechender Curven haben. Wir sehen aber, dass μ_1 nur von λ, λ_1 nur von μ abhängt, d. i. der Satz von Nr. 44. Genügt nun die Correlation der Bedingung: $a_{13} : a_{31} = a_{24}^3 : a_{42}^3$, so gehen die obigen Gleichungen in:

$$3 a_{24} a_{42} \lambda \mu_1 = 1, \quad 3 a_{24} a_{42} \mu \lambda_1 = 1$$

über; die Vertauschbarkeit von λ_1, μ_1 mit λ, μ beweist, dass alle Curven des Bündels sich involutorisch entsprechen.

IV.

47. *Die beiden involutorischen Correlationen, Polarcorrelation (Polarsystem) und Nullsystem, erfüllen die Bedingung, von welcher die Transformirbarkeit von cubischen Raumcurven in sich selbst abhängt;* weil bei ihnen stets X' mit Y identisch ist oder, analytisch, weil $a_{13} = a_{31}$, $a_{24} = a_{42}$, bez. $a_{13} = -a_{31}$, $a_{24} = -a_{42}$; *und zwar erfüllen sie dieselbe gleich für alle vier Bündel.*

Bei der *Polarcorrelation* kann *jedes auf der Basisfläche* $\mathfrak{B}^2$ *befindliche windschiefe Vierseit ABCD* als Durchschnitt der beiden (in $\mathfrak{B}^2$) vereinigten Kernflächen angesehen werden. *Jedes liefert uns vier Bündel, und darin je einen Büschel von Curven, die in sich selbst transformirt*

werden. Betrachten wir die beiden zu den Gegenecken A, C gehörigen, deren Curven also durch diese Ecken gehen und dort die Tangentialebenen DAB und BCD der $\mathfrak{B}^2$ und also auch $\mathfrak{B}^2$ osculiren, während die Curven des einen Bündels AB, CD, die des andern AD, CB in A, C tangiren. *Die beiden Büschel der sich selbst entsprechenden Curven in diesen Bündeln liegen auf derselben Fläche* $\mathfrak{A}^{2}$*) *durch $ABCD$ und verhalten sich ungleichartig zu deren beiden Schaaren.*

48. Um die Identität der beiden tragenden Flächen zu beweisen, müssen wir zunächst die auf BD gelegenen Punkte B, D, Z, B_1, D_1 (Nr. 39, 40) genauer betrachten, zu denen wir noch den Punkt Q, der zu Z in Bezug auf B, D harmonisch ist, fügen wollen. Wir haben:

$$(DZBB_1) = -1, \quad (BZDD_1) = -1;$$

also:

$$(DZBB_1) = (BZDD_1),$$

d. h. BD, ZZ, B_1D_1 sind in Involution; demnach ist Q als zweiter Doppelpunkt derselben auch harmonisch zu Z in Bezug auf B_1, D_1.

Nun folgt aus:

$$(DZBB_1) = -1, \quad (D_1B_1QZ) = -1,$$

dass DD_1, ZB_1, BQ in Involution sind, und ebenso sind es BB_1, ZD_1, DQ.

In Nr. 39 fanden wir den Kegelschnitt (α) in α, der von den Schmiegungsebenen der durch X gehenden Curve des ersten Bündels eingehüllt wird, folgendermassen: Wir construiren die Punkte $X_\alpha \equiv (XA, CZ)$, $Y_\alpha \equiv (D_1X_\alpha, CB_1)$. Der durch Y_α gehende Kegelschnitt, welcher CD, BD in C, B tangirt, ist der verlangte (α) und seine Tangente in Y_α geht durch Z. Sie treffe CD in W_α.

Ersetzen wir den ersten Bündel durch den zweiten, so haben wir B und D, B_1 und D_1 zu vertauschen, und indem wir den analogen Kegelschnitt mit $(\alpha)^*$ bezeichnen, construiren wir:

$$Y_\alpha^* \equiv (B_1X_\alpha, CD_1); \quad W_\alpha^* \equiv (ZY_\alpha^*, CB).$$

Beweisen wir zunächst, dass die Gerade $W_\alpha W_\alpha^*$ durch Q geht.

Das vollständige Viereck $CX_\alpha Y_\alpha Y_\alpha^*$ ergiebt, weil Z, Q zu B_1, D_1 harmonisch sind, dass $Y_\alpha Y_\alpha^*$ durch Q geht; ferner ergeben die vollständigen Vierecke $CY_\alpha Y_\alpha^* W_\alpha$ und $CY_\alpha Y_\alpha^* W_\alpha^*$ wegen der Involutionen: BB_1, ZD_1, DQ; DD_1, ZB_1, BQ, dass $Y_\alpha^* W_\alpha$ durch B, $Y_\alpha W_\alpha^*$ durch D geht, und endlich liefert das vollständige Viereck $Y_\alpha Y_\alpha^* W_\alpha W_\alpha^*$ und die Harmonicität von Z, Q zu B, D die Behauptung.

---

*) Wird $ABCD$ in der bisherigen Weise zum Coordinatentetraeder gewählt und ist dann $a_{13}x_1x_3 + a_{24}x_2x_4 = 0$ die Basisfläche, so ist:

$$3a_{13}x_1x_3 = a_{24}x_2x_4$$

die Gleichung dieser Fläche.

Wenn man nun von einem beliebigen Punkte T auf BD die zweite Tangente an den Kegelschnitt (α) legt, welcher CD, BD in C, B tangirt und von ZW_α berührt wird, so ergiebt sich leicht:

$$(BDZT) = (DCW_\alpha V_\alpha),$$

wobei V_α der Schnitt jener zweiten Tangente mit DC ist; ziehen wir ebenso die zweite Tangente aus T an $(\alpha)^*$, welche BC in $V_\alpha{}^*$ treffe, so ist:

$$(DBZT) = (BCW_\alpha{}^* V_\alpha{}^*).$$

Diese zweiten Tangenten sind die Spuren der dritten Schmiegungsebenen aus T an die beiden durch X gehenden Curven der beiden Bündel in α.

Lassen wir den Punkt T in den obigen Punkt Q fallen, der zu Z harmonisch ist nach B, D, so wird: $(BDZQ) = (DBZQ)$, also auch:

$$(DCW_\alpha V_\alpha) = (BCW_\alpha{}^* V_\alpha{}^*),$$

und daraus ergiebt sich, dass auch $V_\alpha V_\alpha{}^*$ durch Q geht. Mithin fallen die beiden zweiten Tangenten zusammen, und da wir einen analogen Beweis auch für γ führen können, so ergiebt sich, dass die beiden Schmiegungsebenen ξ, ξ^* von Q an die durch X gehenden Curven unserer beiden Bündel sich vereinigen. Demnach erhalten wir folgenden Satz:

Die durch einen Punkt X gehenden Curven der beiden Bündel, welche $ABCD$ als zu A, C; AB, CD, bez. zu A, C; AD, CB gehöriges Schmiegungstetraeder haben, erhalten aus dem Punkte der Geraden BD, der durch B und D von der Ebene ACX harmonisch getrennt ist, dieselbe dritte Schmiegungsebene.

49. In der unserer jetzigen Betrachtung zu Grunde liegenden *Polarcorrelation* ist nun der Punkt Q der Pol der Ebene ACZ; also erhalten wir bei beiden Bündeln zu dem Punkte X in ACZ dieselbe Schmiegungsebene ξ (Nr. 40),*) mithin auch denselben Punkt X', also *dieselbe Hirst'sche Inversion in ACZ, denselben Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ und dieselbe tragende Fläche $\mathfrak{A}^2$ für die sich selbst entsprechenden Curven* (Nr. 43), wie oben in Nr. 47 behauptet wurde.

Da die einen Curven AB, CD, die andern AD, CB tangiren, so ist klar, dass sie sich zu den beiden Geradenschaaren von $\mathfrak{A}^2$ verschiedenartig verhalten.

Diese beiden Geradenschaaren von $\mathfrak{A}^2$ haben aber noch eine andere Beziehung zu den beiden Curvenbüscheln.

Betrachten wir dazu eine bestimmte Curve r^3 des ersten Büschels (mit AB, CD als Tangenten in A, C). Da r^3 durch eine Polarcorrelation in sich selbst übergeht, so entsteht auf ihr eine Punktinvolution,

---

*) Q ist sowohl T als S' der früheren allgemeinen Betrachtung.

in der je zwei Punkte gepaart sind, von denen jeder der Pol der Schmiegungsebene des andern ist. Die Fläche, welche die Regelschaar der Verbindungslinien gepaarter Punkte trägt, sei $\mathfrak{C}^2$. Da A, C zu ihren eigenen Schmiegungsebenen polar sind, so sind sie die Doppelpunkte der Involution und $\mathfrak{C}^2$ geht durch die Tangenten AB, CD, hat also mit der Basisfläche $\mathfrak{B}^2$ noch zwei Gerade der andern Schaar gemein; wären diese von AD, BC verschieden, so hätte r^3 mit $\mathfrak{B}^2$ noch weitere Punkte gemein ausser den 6 in A, C, da ja diese Geraden von r^3 je einmal getroffen werden. Folglich geht auch $\mathfrak{C}^2$ durch $ABCD$ und ist deshalb mit $\mathfrak{A}^2$ identisch, da beide r^3 und $ABCD$ gemeinsam haben.

Die Regelschaar auf $\mathfrak{A}^2$, *zu der die Tangenten* AB, CD *gehören, schneidet also auf jeder Curve des ersten Büschels die oben erwähnte Involution von Punkten ein, von denen jeder der Pol der Schmiegungsebene des andern ist.* Die Punkte, in denen jede Gerade dieser Schaar die $\mathfrak{B}^2$ trifft, d. h. in denen sie AD, BC trifft, sind demnach harmonisch zu den beiden Punkten auf r^3, und so entsteht auf jeder dieser Geraden durch die Curven des Büschels eine Involution, von welcher die Punkte auf AD, BC die Doppelpunkte sind; dieselben rühren von degenerirten Curven des Büschels her: jede der beiden Geraden AD, BC setzt, doppelt gedacht, mit CD, AB bez., eine solche Curve zusammen.

Die andere Regelschaar auf $\mathfrak{A}^2$ *hat zum zweiten Büschel dieselbe Beziehung.* Die Torsen der Curven beider Büschel umhüllen die Fläche, welche zu $\mathfrak{A}^2$ nach $\mathfrak{B}^2$ polar ist: für ihre Geradenschaaren erhalten wir die dualen Eigenschaften.

50. Jedes Vierseit der Basisfläche $\mathfrak{B}^2$ liefert 4 Büschel von cubischen Raumcurven, die in sich selbst übergehen. *Demnach transformirt jede Polarcorrelation* ∞^5 *cubische Raumcurven in sich selbst;* da es nun ∞^9 Polarcorrelationen und ∞^{12} cubische Raumcurven giebt, so *wird jede gegebene cubische Raumcurve durch* ∞^2 *Polarcorrelationen in sich selbst transformirt.*

Beweisen wir dies direct.

Es sei wieder $ABCD$ das zu den Punkten A, B und den Tangenten AB, CD der gegebenen Curve r^3 gehörige Schmiegungstetraeder, E ein beliebiger Punkt, ε eine beliebige Schmiegungsebene von r^3.

Wir lassen den Punkten A, B, C, D, E im ersten Raume die Ebenen $BCD, CDA, DAB, ACB, \varepsilon$ im zweiten correspondiren. Die dadurch festgelegte Correlation ist eine Polarcorrelation, da jeder Ecke von $ABCD$ die Gegenebene entspricht.*) Da nun r^3 durch

*) Staudt, Geometrie der Lage Nr. 326; Reye, Geometrie der Lage Abth. II. 9. Vortrag der 2. Aufl.

A, C, E geht, in den ersteren AB, CD tangirt, ABD, CDB osculirt, so osculirt die entsprechende Curve CDB, ABD, ε, tangirt in jenen CD, AB und geht durch C, A; d. h. sie hat $ABCD$ in derselben Weise zum Schmiegungstetraeder wie r^3 und ausserdem noch ε gemein und ist deshalb mit ihr identisch.

Solcher Schmiegungstetraeder der Curve, die auch in sich übergehen, aber derartig, dass jeder der beiden Punkte A, C in die Schmiegungsebene des andern und die beiden Tangenten in einander übergehen, haben wir ∞^1. Denn wenn bei einer Polarcorrelation, die eine cubische Raumcurve in sich überführt, einem Punkte A, seiner Tangente a und Schmiegungsebene α, als zum ersten Raume gehörig, eine Schmiegungsebene γ, ihre Tangente c und ihr Osculationspunkt C im zweiten entsprechen, so entsprechen auch den A, a, α im zweiten Raume γ, c, C im ersten; was bei der allgemeinen Correlation nicht der Fall ist. Mithin liefern jeder Punkt A der Curve und der Osculationspunkt C der ihm polaren Schmiegungsebene eins jener Tetraeder.

Bei der obigen Herstellung einer Polarcorrelation, durch welche r^3 in sich transformirt wird, können wir demnach A, E festhalten, C, ε über die Curve bewegen und erhalten die ∞^2 Polarcorrelationen, welche die Reproduction der Curve leisten.

Wie bei jeder allgemeinen, so haben wir auch bei jeder Polarcorrelation, die eine cubische Raumcurve in sich überführt, ein und nur ein Schmiegungstetraeder, das in der früher besprochenen Weise in sich übergeht, d. h. so, dass jeder der beiden Curvenpunkte in seine eigene Schmiegungsebene, jede der beiden Tangenten in sich transformirt wird. Es ist dies ein „Polartetraeder der besondern Art."*) Dasselbe tritt ja auch bei der allgemeinen Correlation (im Haupttetraeder) auf; während das gemeine Polartetraeder für die Polarcorrelation charakteristisch ist.

51. Weil bei einem *Nullsystem* jeder Punkt in seine entsprechende Ebene (Nullebene) fällt, so muss jeder Punkt einer cubischen Raumcurve, die durch ein Nullsystem in sich übergeführt wird, seine eigene Schmiegungsebene zur Nullebene haben.

Jede cubische Raumcurve wird nur durch das ihr zugehörige Nullsystem in sich selbst transformirt.

Da es nun ∞^5 Nullysteme giebt, so *muss jedes Nullsystem* ∞^7 *cubische Raumcurven in sich selbst transformiren oder zu so vielen gehören.*

Um dies direct einzusehen, benutzen wir von Staudt**) erhaltene Sätze. Staudt beweist zunächst, dass, wenn drei Punkte einer cubischen

*) Schröter, Oberflächen 2. Ordnung S. 143.

**) Beiträge zur Geometrie der Lage Nr. 485, 486.

Raumcurve ihre Nullebene in einem gegebenen Nullsystem N zur Schmiegungsebene haben, dies bei jedem Punkte der Fall ist. Sodann zeigt er, dass, wenn α, β, γ die Nullebenen von drei beliebigen Punkten A, B, C in N sind, blos in einem der Büschel $A\alpha, B\beta, C\gamma$, etwa im ersten, ein Strahl a beliebig gewählt werden kann; der Strahl b in $B\beta$ ist dann eindeutig bestimmt, wenn die cubische Raumcurve, welche durch A, B, C geht und in A, B die Geraden a, b tangirt und die Ebenen α, β osculirt (Nr. 32), auch in C die Nullebene γ zur Schmiegungsebene haben soll. Wir können uns hinsichtlich der Punkte A, B, C auf eine feste Ebene beschränken; in dieser kann jeder von ihnen ∞^2 Lagen einnehmen, und nachdem A bestimmt ist, sind für a noch ∞^1 Lagen in $A\alpha$ möglich. So erhalten wir die ∞^7 cubischen Raumcurven.

Oder: *Jedes Vierseit, in dem jede Ecke die Ebene ihres Winkels zur entsprechenden im Nullsysteme hat* und die 4 Seiten sich also selbst entsprechen, liefert (Nr. 47) in jedem der vier Bündel einen Büschel sich selbst entsprechender Curven. Eine allgemeine Correlation hat nur ein solches Vierseit, eine Polarcorrelation hat ∞^4, *ein Nullsystem besitzt* ∞^8 *solche Vierseite.* Auf jeder der ∞^6 Flächen 2. Grades, die durch N in sich transformirt werden (Nr. 25), geht jede Gerade der einen Schaar in sich selbst über, von der andern thun es nur zwei; diese mit irgend zwei von jenen bilden eins der fraglichen Vierseite. Während dann bei einer allgemeinen Correlation (und auch der Polarcorrelation) blos ein Schmiegungstetraeder einer in sich transformirten cubischen Raumcurve so in sich übergeht, wie es in Nr. 38 $ABCD$ that, gehen alle ∞^2 Schmiegungstetraeder einer cubischen Raumcurve durch ihr Nullsystem in sich selbst über; weil jeder Punkt seiner Schmiegungsebene entspricht: die Projectivität von Nr. 33, 38 wird Identität. Jede durch das gegebene Nullsystem in sich transformirte cubische Raumcurve ergiebt sich deshalb bei ∞^2 Vierseiten, und wir erhalten $\frac{\infty^8 \times \infty^1}{\infty^2}$ oder ∞^7 in sich durch N transformirte cubische Raumcurven.

52. *Jedes solche Vierseit gab*, wie gesagt, *vier Büschel in sich selbst transformirter Curven, die dann je auf einer durch das Vierseit gehenden Fläche* 2. *Grades liegen. Die beiden Trägerflächen der Büschel, die zu denselben zwei Gegenecken gehören, sind nicht identisch.**)

Der Pol (oder Nullpunkt) von ACZ ist Z; die zweite Tangente aus ihm an (α) in α ist $ZY_\alpha W_\alpha$, die von der an $(\alpha)^*$ gezogenen $ZY_\alpha^* W_\alpha^*$ verschieden ist, und ebenso in γ; so dass die beiden durch

---

*) Ihre Gleichungen, bezogen auf das mehrfach benutzte Tetraeder, sind:

$$2a_{13}x_1x_3 + a_{24}x_2x_4 = 0, \quad 3a_{13}x_1x_3 - a_{24}x_2x_4 = 0.$$

sie gehenden Schmiegungsebenen ξ, ξ^* aus Z und also auch die beiden Pole X', X'^* verschieden sind. In Nr. 48 fanden wir, dass $Y_a Y_a^*$ durch Q, der zu Z nach B_1, D_1 harmonisch ist, geht; daraus ergiebt sich leicht, dass auch die beiden erwähnten zweiten Tangenten ZY_a, ZY_a^* zu ZC und BD harmonisch sind. Durch jene zweiten Tangenten ZY_a, ZY_a^* gehen die dritten Schmiegungsebenen ξ, ξ^* von Z an die durch X gehenden Curven der beiden Bündel. Weil sie von Z kommen, haben sie beide den Punkt X selbst zum Osculationspunkte (Nr. 40). Schnittlinie $\xi\xi^*$ ist mithin ZX; ihre Verbindungsebenen mit den obigen 4 harmonischen Strahlen, also die Ebenen ξ, ξ^*, ACZ und (ZX, BD) $\equiv \Lambda$ sind harmonisch, folglich auch ihre Pole (Nullpunkte) X', X'^*, Z, $L' \equiv (ZX, AC)$. X und X', X und X'^* sind entsprechende Punkte der beiden Inversionen in ACZ, die zu den beiden Curvenbündeln gehören, aber jene conjugirt in Bezug auf $\mathfrak{K}$ und die Trägerfläche $\mathfrak{A}^2$ der sich selbst entsprechenden Curven des ersten Bündels, welche durch $\mathfrak{K}$ geht; diese ebenso conjugirt in Bezug auf $\mathfrak{A}^{2*}$. Z, auf BD, und L', auf AC gelegen, sind conjugirt zu X nach den beiden Ebenenpaaren im Büschel $(ABCD)$. *Also sind die beiden Trägerflächen* $\mathfrak{A}^2$ *und* $\mathfrak{A}^{2*}$ harmonisch zu diesen beiden Ebenenpaaren ihres Büschels oder *harmonisch-zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt.**)

Münster i/W., Anfang April 1885.

---

*) Nachdem diese Abhandlung der Redaction der Annalen übersandt war, sind zwei andere Arbeiten erschienen, welche mit ihr in Zusammenhang stehen:

1) Corr. Segre, Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale etc. (Memorie dell' Accademia delle Scienze di Torino, Ser. II, Tom. XXXVII), der die Arbeit desselben Verfassers, auf die sie sich vielfach bezieht: Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie (Memorie dell' Accademia dei Lincei. Ser. III, vol. XIX) vorangegangen war.

2) P. Del Pezzo, Sulle quadriche polari reciproche di sè stesse rispetto ad un' altra. — Sulle quadriche ad $n-1$ dimensioni polari reciproche etc. (Rendiconto dell' Accademia di Napoli. Juni, Juli 1885). Vergl. Abschnitt VI des ersten Theiles der vorliegenden Arbeit, so wie meine Note in Bd. 25, durch die Herrn Del Pezzo's Abhandlungen veranlasst zu sein scheinen. — Ich muss noch Herrn G. Veronese's grosse Abhandlung: Sopra alcune notevoli configurazioni etc. (Memorie dell' Accademia dei Lincei Ser. III, vol. IX, 1881) erwähnen, in der sich einige Berührungspunkte mit meiner Arbeit finden. [Nov. 1885].

Ausdehnung eines Dirichlet'schen Verfahrens auf die Transformation von Differentialausdrücken, wie $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ in allgemeine krummlinige Coordinaten.

Von

Franz Meyer in Tübingen.

Dirichlet hat in seinen Vorlesungen*) eine einfache Methode angegeben, den Laplace'schen Ausdruck $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ in allgemeine, orthogonale Coordinaten umzuformen.

Der Grundgedanke dieser Methode besteht darin, die Green'sche Formel, welche das Raumintegral $\iiint \Delta V\, dx\, dy\, dz$ in das Oberflächenintegral $\iint \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma$ überführt, auf ein, durch die Coordinatentransformation völlig bestimmtes Raum*element* anzuwenden.

Diesen Gedanken kann man auch einer allgemeineren Frage zu Grunde legen, z. B. der nach der Transformation des bekannten Ausdrucks $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ (und ähnlicher) in allgemeine, krummlinige Coordinaten (Nr. 1 bis 5).

Bei der Durchführung der Rechnung erweist sich als nützlich, gewisse Unbekannte dadurch zu ermitteln, dass man den Inhalt des vorliegenden Raumelementes auf doppelte Weise ausdrückt (Nr. 4).

Die Endformel ist einfach und elegant (Nr. 5).

Am Schlusse (Nr. 8) wird noch bemerkt, wie in dem, von Dirichlet behandelten Falle eine Vereinfachung insofern eintritt, als der Green'sche Satz ganz entbehrt werden, und durch die wesentliche Eigenschaft von ΔV, im Sinne von Herrn Gundelfinger,**) eine orthogonale Invariante zu sein, ersetzt werden kann.

---

*) cf. z. B. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen I, pag. 307.

**) Gundelfinger, Ueber die Transformation einer gewissen Gattung von Differentialgleichungen in krummlinige Coordinaten. Borchardt's Journ. Bd. 85.

Transformation von $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ in krummlinige Coordinaten

1. Als Hülfssatz diene der *erweiterte* Green'sche Satz*):

„Sind X, Y, Z, ω vier, innerhalb eines abgegrenzten Raumgebietes T bestimmte, endliche, stetige Functionen, deren erste Ableitungen diese Eigenschaften mit ihnen gemein haben**), so gilt die Umformung

$$(1)\quad \begin{aligned}&\iiint\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\omega\, d\mathsf{T}\\ &=\iint(X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma)\,\omega\, d\sigma\\ &-\iiint\left(X\frac{\partial\omega}{\partial x}+Y\frac{\partial\omega}{\partial y}+Z\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)d\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Dabei bedeuten α, β, γ die Winkel der äusseren Normale der Oberfläche σ von T mit den positiven Richtungen der rechtwinkligen Coordinatenaxen der x, y, z.

Im Folgenden kommt nur der Fall in Betracht, dass $\omega = 1$ und das Gebiet T sich auf ein Raumelement $d\mathsf{T}$ reducirt. Dann wird:

$$(2)\quad \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{1}{d\mathsf{T}}\iint(X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma)\,d\sigma.$$

Das Doppelintegral rechter Hand ist jetzt über die Oberfläche von $d\mathsf{T}$ hinzuerstrecken.

2. Als Raumelement $d\mathsf{T}$ wird ein solches genommen, das (für irgend drei beliebige, aber bestimmte Werthe $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$) von den drei, durch einen Punkt (x, y, z) gehenden Flächen des Systems:

$$(3)\quad \varrho_1=\varphi_1(x,y,z),\quad \varrho_2=\varphi_2(x,y,z),\quad \varrho_3=\varphi_3(x,y,z)$$

und drei, ihnen benachbarten gebildet wird.

Die φ_i stellen ganz beliebige Functionen dar, die Formeln (3) also eine Transformation der x, y, z in die allgemeinsten, krummlinigen Coordinaten. Die Umkehrung dieser Transformation laute:

$$(4)\quad x=\psi_1(\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3),\quad y=\psi_2(\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3),\quad z=\psi_3(\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3).$$

Versteht man unter $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ die Winkel, welche die im Sinne des *wachsenden* ϱ_i auf der Fläche $\varrho_i = \varphi_i(x, y, z)$ errichtete Normale mit den positiven Coordinatenrichtungen macht, so wird der Beitrag der,

---

*) cf. z. B. Clausius, Die Potentialfunction und das Potential. § 20; Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik. Vorlesung 11.

**) Auf die Einschränkung dieser Bedingungen, wie sie nach dem Vorgang von Herrn Hölder (Beiträge zur Potentialtheorie, Tübinger Dissertation, 1882) versucht werden könnte, gehe ich hier nicht ein.

auf dieser Fläche befindlichen Seitenfläche $d\sigma_i$ des Raumelementes $d\mathrm{T}$ zum Doppelintegrale in (2) der folgende:

$$(5)\qquad -d\sigma_i\,(X\cos\alpha_i+Y\cos\beta_i+Z\cos\gamma_i)\qquad (i=1,2,3).$$

Setzt man hier:

$$(6)\qquad E_{ii}=\left(\frac{\partial\varrho_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_i}{\partial z}\right)^2,\quad \mu_i=\sqrt{E_{ii}}$$

(wo der Quadratwurzel immer das positive Zeichen beigelegt werden soll), so hat man:

$$(7)\qquad \cos\alpha_i=\frac{\partial\varrho_i}{\partial x}\frac{1}{\mu_i},\quad \cos\beta_i=\frac{\partial\varrho_i}{\partial y}\frac{1}{\mu_i},\quad \cos\gamma_i=\frac{\partial\varrho_i}{\partial z}\frac{1}{\mu_i}.$$

Diese Ausdrücke (7) sind umzuformen und in (5) einzusetzen: andererseits müssen dann noch die daselbst auftretenden $d\sigma_i$ berechnet werden.

Zur Lösung der ersteren Aufgabe gehe man aus von den, vermöge (3), (4) bestehenden, viel benützten Gleichungen:

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial x}&=1=\frac{\partial x}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial\varrho_3}\frac{\partial\varrho_3}{\partial x}&&\Bigg|\ \frac{\partial\varrho_i}{\partial x},\\
\frac{\partial x}{\partial y}&=0=\frac{\partial x}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial\varrho_3}\frac{\partial\varrho_3}{\partial y}&&\Bigg|\ \frac{\partial\varrho_i}{\partial y},\\
\frac{\partial x}{\partial z}&=0=\frac{\partial x}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial z}+\frac{\partial x}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial z}+\frac{\partial x}{\partial\varrho_3}\frac{\partial\varrho_3}{\partial z}&&\Bigg|\ \frac{\partial\varrho_i}{\partial z}.
\end{aligned}\right.$$

Führt man die angedeutete Multiplication und Addition aus, und operirt analog mit den Gleichungen für $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial z}; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z}$, so resultirt, unter Einführung der, mit (6) verträglichen Bezeichnung:

$$(9)\qquad E_{ik}{}^{*)}=\frac{\partial\varrho_i}{\partial x}\frac{\partial\varrho_k}{\partial x}+\frac{\partial\varrho_i}{\partial y}\frac{\partial\varrho_k}{\partial y}+\frac{\partial\varrho_i}{\partial z}\frac{\partial\varrho_k}{\partial z}\qquad \binom{i=1,2,3}{k=1,2,3}$$

das nachstehende Formelsystem:

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\varrho_i}{\partial x}&=\frac{\partial x}{\partial\varrho_1}E_{i1}+\frac{\partial x}{\partial\varrho_2}E_{i2}+\frac{\partial x}{\partial\varrho_3}E_{i3},\\
\frac{\partial\varrho_i}{\partial y}&=\frac{\partial y}{\partial\varrho_1}E_{i1}+\frac{\partial y}{\partial\varrho_2}E_{i2}+\frac{\partial y}{\partial\varrho_3}E_{i3},\\
\frac{\partial\varrho_i}{\partial z}&=\frac{\partial z}{\partial\varrho_1}E_{i1}+\frac{\partial z}{\partial\varrho_2}E_{i2}+\frac{\partial z}{\partial\varrho_3}E_{i3}.
\end{aligned}\right.$$

Dadurch geht (5) über in:

$$(11)\qquad -\frac{\partial\sigma_i}{\mu_i}\,(R_1E_{i1}+R_2E_{i2}+R_3E_{i3}),$$

---

*) Die E_{ik} sind die wohlbekannten Coefficienten des transformirten Linienelement-Quadrats.

wenn zur Abkürzung noch gesetzt wird:

$$R_k = X\frac{\partial x}{\partial \varrho_k} + Y\frac{\partial y}{\partial \varrho_k} + Z\frac{\partial z}{\partial \varrho_k} \qquad (k=1,2,3). \tag{12}$$

3. Die Berechnung der $d\sigma_i$ in (5) wird erheblich erleichtert, wenn man den Einfluss des, rechter Hand in (2) stehenden Factors $d\mathsf{T}$ auf die weitere Entwicklung beachtet.

Der Inhalt des Parallelogramms $d\sigma_i$ ist gleich dem Product zweier anstossenden Seiten in den Sinus des eingeschlossenen Winkels, also sicher von der Form:

$$d\sigma_i = d\varrho_k\, d\varrho_l\, S_i \qquad (i,k,l=1,2,3). \tag{13}$$

Bildet man den, (5) entsprechenden Ausdruck für die, $d\sigma_i$ gegenüberliegende Seitenfläche des Raumelements $d\mathsf{T}$ (wozu man nur ϱ_i durch $\varrho_i + d\varrho_i$ zu ersetzen, und das Vorzeichen wechseln zu lassen braucht), und addirt, so kommt:

$$d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3 \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho_i}\left\{(R_1 E_{i1} + R_2 E_{i2} + R_3 E_{i3})\frac{S_i}{\mu_i}\right\} \qquad (i=1,2,3), \tag{14}$$

sodass die Formel (2) die vorläufige Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \\ &= \frac{d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3}{d\mathsf{T}} \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial \varrho_i}\left\{(R_1 E_{i1} + R_2 E_{i2} + R_3 E_{i3})\frac{S_i}{\mu_i}\right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

4. Es sind weiter in $d\mathsf{T}$ und $\frac{S_i}{\mu_i}$ die neuen Coordinaten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ einzuführen. Der Inhalt des Parallelepipedons $d\mathsf{T}$ kann doppelt ausgedrückt werden. Einmal ist er das Product aus den Längen von drei, in einem Eckpunkt zusammenstossenden Kanten, in die Determinante der Winkel, welche diese Kanten mit den Coordinatenaxen bilden.

Eine einfache Reduction ergiebt:

$$d\mathsf{T} = d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial x}{\partial \varrho_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial y}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial y}{\partial \varrho_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial z}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial z}{\partial \varrho_3} \end{vmatrix} = d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3\, D \tag{16}$$

bei ersichtlicher Abkürzung.

Andererseits ist derselbe Inhalt $d\mathsf{T}$ gleich dem Inhalt einer Seitenfläche $d\sigma_i$, multiplicirt mit der zugehörigen Höhe. Die letztere ist das Element ds_i der Normale der Fläche $\varrho_i = \varphi_i(x, y, z)$ im Punkte (x, y, z) (vom Fusspunkte an gerechnet, und dem absoluten Werthe nach):

(17) $$ds_i = \frac{d\varrho_i}{\mu_i},$$
mithin:
(18) $$d\mathsf{T} = \frac{d\sigma_i\, d\varrho_i}{\mu_i},$$
oder, mit Hülfe von (13):
(19) $$d\mathsf{T} = d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3\, \frac{S_i}{\mu_i}.$$
Die Vergleichung der beiden Werthe (16), (19) liefert für S_i den Werth:
(20) $$S_i = \mu_i D.$$
Somit geht die Formel (15) in folgende Gestalt*) über:
(21) $$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$$
$$= \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{i=3}\left[\frac{\partial}{\partial\varrho_i} D \sum_{k=1}^{k=3}\left\{\left(X\frac{\partial x}{\partial\varrho_k}+Y\frac{\partial y}{\partial\varrho_k}+Z\frac{\partial z}{\partial\varrho_k}\right)E_{ik}\right\}\right].$$

5. Um hier auf der rechten Seite vollends Alles durch die neuen Coordinaten ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 auszudrücken, wird man am besten die, nur hülfsweise eingeführten Grössen E_{ik} wieder herausschaffen.

Ordnet man nämlich auf der rechten Seite von (21) unter der zweiten Summe nach den X, Y, Z, und zieht die Relationen (10) heran, so schreibt sich die Formel (21) einfacher so:

(22) $$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial\varrho_i}\left\{D\left(X\frac{\partial\varrho_i}{\partial x}+Y\frac{\partial\varrho_i}{\partial y}+Z\frac{\partial\varrho_i}{\partial z}\right)\right\}.$$

Stellt man die zu den Formeln (8) reciproken auf d. h. die für die Grössen $\frac{\partial\varrho_i}{\partial\varrho_k}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ geltenden, so liefert deren Auflösung nach den $\frac{\partial\varrho_i}{\partial x}$, $\frac{\partial\varrho_i}{\partial y}$, $\frac{\partial\varrho_i}{\partial z}$ ohne Weiteres (zufolge einer sehr bekannten Determinanteneigenschaft):

(23) $$D\frac{\partial\varrho_i}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial\frac{\partial x}{\partial\varrho_i}},\quad D\frac{\partial\varrho_i}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial\frac{\partial y}{\partial\varrho_i}},\quad D\frac{\partial\varrho_i}{\partial z} = \frac{\partial D}{\partial\frac{\partial z}{\partial\varrho_i}}.$$

Daher wird (22) zu:

(24) $$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial\varrho_i}\begin{vmatrix} X & \frac{\partial x}{\partial\varrho_k} & \frac{\partial x}{\partial\varrho_l} \\ Y & \frac{\partial y}{\partial\varrho_k} & \frac{\partial y}{\partial\varrho_l} \\ Z & \frac{\partial z}{\partial\varrho_k} & \frac{\partial z}{\partial\varrho_l}\end{vmatrix}\quad (i, k, l = 1, 2, 3).$$

*) Diese Gestalt reicht für manche besonderen Fälle völlig aus, vgl. Nr. 7.

Führt man endlich die, mittelst der X, Y, Z sowie dreier Hülfsvariabeln u_1, u_2, u_3 geränderte D-Determinante als eine besondere Form U ein:

$$(25)\qquad U = \begin{vmatrix} X & \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial x}{\partial \varrho_3} \\ Y & \frac{\partial y}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial y}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial y}{\partial \varrho_3} \\ Z & \frac{\partial z}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial z}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial z}{\partial \varrho_3} \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

so lautet das Endresultat folgendermassen:

„*Bestehen zwischen den alten (rechtwinkligen)*) Coordinaten x, y, z und den neuen krummlinigen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die Beziehungen* (4), *so findet die identische Umformung statt:*

$$(26)\qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial \varrho_i}.\text{“}$$

In praxi, z. B. wenn es sich um die Integration der Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

handelt, wird man X, Y, Z selbst als die neuen Coordinaten annehmen, wodurch sich die rechte Seite in (26) noch übersichtlicher gestaltet.

6. Eine einfache Controlle für die Formeln (25) oder (24) wird durch die wirkliche Ausführung der vorgeschriebenen Differentiationen geliefert. Die Coefficienten von X, Y, Z verschwinden, wie man unmittelbar sieht, identisch, und man erhält vermöge (23):

$$(27)\qquad \sum_i \frac{\partial X}{\partial \varrho_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial x} + \sum_i \frac{\partial Y}{\partial \varrho_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial y} + \sum_i \frac{\partial Z}{\partial \varrho_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Umgekehrt hätte man auch, von dieser Formel ausgehend, mit Hülfe der Relationen (23) und der eben angedeuteten Identitäten direct zur Umformung (24) gelangen können.

7. In dem speciellen Falle:

$$(28)\qquad X = \frac{\partial V}{\partial x},\quad Y = \frac{\partial V}{\partial y},\quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

geht die Formel (21) oder auch (22) nach leichter Reduction in die von Jacobi**) angegebene über.

---

*) Nachträglich ist es völlig gleichgültig, ob man die x, y, z als *rechtwinklige* Coordinaten interpretirt oder als beliebige.

**) Jacobi, Ueber die particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung $\Delta V = 0$. Crelle's Journal, Bd. 36, pag. 117, vgl. auch Borchardt, Die Transformation der Elasticitätsgleichungen in allgemeine, orthogonale Coordinaten. Borchardt's Journal, Bd. 76.

Werden für diesen Fall noch weiter die krummlinigen Coordinaten specialisirt in orthogonale, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass die Grössen E_{12}, E_{13}, E_{23} identisch verschwinden, während von den E_{ii} (6) überdies gilt, dass

$$\frac{1}{E_{ii}}=\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_i}\right)^2. \tag{29}$$

So kommt man unmittelbar zu der bekannten Umformung von ΔV. Die Determinante D geht dabei in das Product $\frac{1}{\sqrt{E_{11}}\sqrt{E_{22}}\sqrt{E_{33}}}$ über.

8. Will man nur ΔV in orthogonale Coordinaten überführen, so kann man kürzer so vorgehen, wobei vom Green'schen Satze ganz abstrahirt wird. Aus der Definition der Ableitung einer Function fliesst nach Riemann*) unmittelbar die Darstellung:

$$\begin{aligned} d\Pi\cdot\Delta V &= dx\,dy\,dz\,\Delta V \\ &= (dy\,dz)\,dx\cdot\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x+dx}-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_x}{dx}+(dz\,dx)\,dy\,\frac{(\cdot)}{dy} \\ &\quad+(dx\,dy)\,dz\,\frac{(\cdot)}{dz}=\iint\frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma, \end{aligned} \tag{30}$$

wo das Integral über die drei Paare von Seitenflächen $d\sigma$ eines rechtwinkligen Elementar-Parallelepipedons vom Inhalte $dx\,dy\,dz = d\Pi$, (dessen Kanten den Coordinatenaxen parallel laufen) hinzuerstrecken ist, und wo $\frac{\partial V}{\partial n}$ für jede Seitenfläche den Differentialquotienten nach der äusseren Normale bedeutet. Aus (30) folgt:

$$\Delta V=\frac{1}{d\Pi}\iint\frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma. \tag{31}$$

Der Ausdruck ΔV ändert sich demnach nicht, wenn man das Integral der rechten Seite in (31) über die Oberfläche eines *rechtwinkligen*, im Uebrigen aber (innerhalb des vorgegebenen Raumgebietes) *beliebig gelegenen* Elementar-Parallelepipedons, dessen Inhalt mit $d\Pi$ bezeichnet sei, nimmt. Ein solches wird, ganz wie oben, mittelst des nunmehr orthogonalen Flächensystems (4) construirt.

Tübingen, den 27. Juni 1885.

*) cf. z. B. die Darstellung in den, von Hattendorf herausgegebenen Vorlesungen Riemann's über Schwere, Electricität und Magnetismus, wo Riemann diese Darstellung dem Beweise des Satzes $\Delta V = -4\pi\varrho$ zu Grunde legt.

Zur Theorie der Doppelpunkte und Doppeltangenten der ebenen rationalen*) Curven.

Von

C. Weltzien in Berlin.

Eine ebene Curve n^{ter} Ordnung, deren Coordinaten x_1, x_2, x_3 sich als rationale Functionen n^{ter} Ordnung eines Parameters t darstellen lassen:

$$x_1 : x_2 : x_3 = A(\mathrm{t}) : B(\mathrm{t}) : C(\mathrm{t}),$$

besitzt, wie Clebsch (Crelle's Journal Bd. 64) nachgewiesen hat,

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Doppelpunkte. Jedem Doppelpunkt entsprechen 2 Werthe des Parameters; die sämmtlichen Parameter der Doppelpunkte sind die Wurzeln einer Gleichung $(n-1)(n-2)^{\text{ten}}$ Grades, welche Herr Haase (Mathematische Annalen Bd. 2) abgeleitet hat. „Welche Wurzeln dieser Gleichung zusammen einen Doppel- (oder Rückkehr-)Punkt bestimmen, kann mit Hülfe der Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} A(\mathrm{t}) & \dfrac{dA(\mathrm{t})}{d\mathrm{t}} \\ B(\mathrm{t}) & \dfrac{dB(\mathrm{t})}{d\mathrm{t}} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A(\mathrm{t}) & \dfrac{dA(\mathrm{t})}{d\mathrm{t}} \\ C(\mathrm{t}) & \dfrac{dC(\mathrm{t})}{d\mathrm{t}} \end{vmatrix} = 0$$

entschieden werden. Bezeichnet man nämlich die eine dieser Wurzeln mit t_1, die andern mit t_2, so müssen dieselben beiden Gleichungen genügen." Nun kann jedoch in Folge Abel'scher Sätze, wie bereits Clebsch bemerkt, die Gleichung $(n-1)(n-2)^{\text{ten}}$ Grades auf eine Gleichung $\frac{(n-1)(n-2)}{2}^{\text{ten}}$ Grades und $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ quadratische Gleichungen zurückgeführt werden. Diese Reduction führe ich im Folgenden für $n = 4, 5, 6$ durch, indem ich die Summe σ und das Product τ der Parameter t_1 und t_2, welche einem Doppelpunkte entsprechen, in

*) Unter rationalen Curven verstehen wir solche, deren Coordinaten rational durch einen Parameter darstellbar sind.

die Rechnung einführe und für eine dieser Grössen, z. B. σ, eine Gleichung $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ten Grades herleite; die andere, τ, ist dann rational durch σ ausdrückbar. Jedem Werthe von σ entspricht ein Werthpaar t_1, t_2, das durch die quadratische Gleichung:

$$T^2 - \sigma T + \tau = 0$$

geliefert wird; die bei der Gleichung $(n-1)(n-2)^{\text{ten}}$ Grades nöthige Untersuchung, welche Wurzeln zusammengehören, fällt dadurch fort. Dass auch die im Folgenden aufgestellten Gleichungen für weitere Untersuchungen brauchbar sind, z. B. unter welcher Bedingung ein Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergeht, ist ersichtlich.

Die Anzahl der Doppeltangenten einer rationalen Curve n^{ter} Ordnung, welche keine Rückkehrpunkte besitzt, ist nach Clebsch (Crelle's Journal Bd. 64) $2(n-3)(n-2)$; die Gleichung für die Parameter der Berührungspunkte ist vom Grade $4(n-3)(n-2)$, kann jedoch, wie Clebsch bemerkt, auf eine Gleichung $2(n-3)(n-2)^{\text{ten}}$ Grades und $2(n-3)(n-2)$ quadratische Gleichungen reducirt werden. Diese reducirten Gleichungen sind bisher nicht aufgestellt worden. Für die rationalen Curven 4^{ter} Ordnung ist die (nicht reducirte) Gleichung 8^{ten} Grades von Herrn Schwering (Schlömilch's Zeitschrift Bd. 21) abgeleitet und von Herrn Brill (Mathematische Annalen Bd. 12) auf anderem Wege abgeleitet und eingehend behandelt worden. Für die rationalen Curven 5^{ter}, resp. 6^{ter} Ordnung ist die allgemeine Gleichung vom 24^{ten}, resp. 48^{ten} Grade; dieselben sollen im Folgenden ebenso, wie die Gleichung 8^{ten} Grades, in der angegebenen Weise reducirt werden.

§ 1.

Die Gleichung für die Parameter der Doppelpunkte.

Es sei

$$A(t) = \sum_\nu a_{n-\nu} t^\nu; \quad B(t) = \sum_\nu b_{n-\nu} t^\nu; \quad C(t) = \sum_\nu c_{n-\nu} t^\nu$$

$$(\text{für } \nu = 0, 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Ein Doppelpunkt findet statt, wenn zwei Werthe t_1, t_2 dieselben Werthe für $x_1 : x_2 : x_3$ liefern, wenn also:

$$x_1 : x_2 : x_3 = A(t_1) : B(t_1) : C(t_1),$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = A(t_2) : B(t_2) : C(t_2),$$

oder:

$$A(t_1)\,B(t_2) - A(t_2)\,B(t_1) = 0,$$
$$B(t_1)\,C(t_2) - B(t_2)\,C(t_1) = 0,$$
$$C(t_1)\,A(t_2) - C(t_2)\,A(t_1) = 0$$

ist. Unterdrückt man in diesen Gleichungen den Factor $t_1 - t_2$ und setzt dann:

$$t_1 + t_2 = \sigma,$$
$$t_1 t_2 = \tau,$$

so erhält man drei Gleichungen, — dieselben sollen im Folgenden immer durch (1) bezeichnet werden — und hieraus durch einfache Rechnung ein System anderer Gleichungen (2), aus denen eine der Grössen, z. B. τ, unmittelbar eliminirt werden kann. Die resultirende Gleichung für σ ergiebt sich in Form einer Determinante; τ ist nach bekannten Sätzen rational durch σ ausdrückbar (in Form des Quotienten zweier Unterdeterminanten); t_1, t_2 sind die Wurzeln der Gleichung:

$$T^2 - \sigma T + \tau = 0.$$

Soll der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergehen, so hat man $t_2 = t_1$, $\sigma = 2t_1$, $\tau = t_2^2$ zu setzen und dann t_1 zu eliminiren. Zur Abkürzung soll immer

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = (a_0 b_1), \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1 c_2), \ldots$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = (012), \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = (124), \ldots$$

gesetzt werden.

1.

Die Curven 3^{ter} Ordnung besitzen einen Doppelpunkt.

Es ist:

$$(1)\quad \begin{aligned} &(a_0 b_1)\tau^2 + (a_0 b_2)\sigma\tau + [(a_1 b_2) - (a_0 b_3)]\tau + (a_0 b_3)\sigma^2 + (a_1 b_3)\sigma \\ &\qquad + (a_2 b_3) = 0, \\ &(b_0 c_1)\tau^2 + (b_0 c_2)\sigma\tau + [(b_1 c_2) - (b_0 c_3)]\tau + (b_0 c_3)\sigma^2 + (b_1 c_3)\sigma \\ &\qquad + (b_2 c_3) = 0, \\ &(c_0 a_1)\tau^2 + (c_0 a_2)\sigma\tau + [(c_1 a_2) - (c_0 a_3)]\tau + (c_0 a_3)\sigma^2 + (c_1 a_3)\sigma \\ &\qquad + (c_2 a_3) = 0; \end{aligned}$$

multiplicirt man diese 3 Gleichungen einmal resp. mit c_0, a_0, b_0 und addirt sie zu einander, ferner mit c_3, a_3, b_3 und addirt, so erhält man:

$$(2)\quad \begin{aligned} (012)\tau + (013)\sigma + (023) = 0, \\ (013)\tau + (023)\sigma + (123) = 0. \end{aligned}$$

Es ergiebt sich somit aus (2) ein Werthsystem σ, τ, also auch ein Werthpaar t_1, t_2 aus der Gleichung

$$T^2 - \sigma T + \tau = 0.$$

Soll der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergehen, so erhält man:

$$(012)\mathfrak{t}_1^2 + 2\cdot(013)\mathfrak{t}_1 + (023) = 0,$$
$$(013)\mathfrak{t}_1^2 + 2\cdot(023)\mathfrak{t}_1 + (023) = 0;$$

das Eliminationsresultat ist daher:

$$\begin{vmatrix} (012) & 2(013) & (023) & 0 \\ (013) & 2(023) & (123) & 0 \\ 0 & (012) & 2(013) & (023) \\ 0 & (013) & 2(023) & (123) \end{vmatrix} = 0.$$

2.

Die rationalen Curven 4^{ter} Ordnung besitzen drei Doppelpunkte.

Die erste Gleichung des Systems (1) ist:

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} &(a_0 b_1)\tau^3 + (a_0 b_2)\tau^2\sigma + [(a_1 b_2) - (a_0 b_3)]\tau^2 + (a_0 b_3)\sigma^2\tau \\ &+ [(a_1 b_3) - 2(a_0 b_4)]\sigma\tau + [(a_2 b_3) - (a_1 b_4)]\tau \\ &+ (a_0 b_4)\sigma^3 + (a_1 b_4)\sigma^2 + (a_2 b_4)\sigma + (a_3 b_4) \end{aligned}\right\} = 0,$$

die beiden andern Gleichungen ergeben sich hieraus, indem man a_λ, b_μ durch b_λ, a_μ und c_λ, a_μ ersetzt ($\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots, 4$).

Hieraus erhält man durch ähnliche Rechnungen, wie bei den Curven 3^{ter} Ordnung:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &(012)\tau^2 + \{(013)\sigma + (023) - (014)\}\tau \\ &\qquad + \{(014)\sigma^2 + (024)\sigma + (034)\} = 0, \\ &(013)\tau^2 + \{[(023) + (014)]\sigma + (123)\}\tau \\ &\qquad + \{(024)\sigma^2 + [(124) + (034)]\sigma + (134)\} = 0, \\ &(014)\tau^2 + \{(024)\sigma + (124) - (034)\}\tau \\ &\qquad + \{(034)\sigma^2 + (134)\sigma + (234)\} = 0; \end{aligned}$$

eliminirt man aus diesen Gleichungen τ^2, τ, 1, so erhält man die gesuchte Gleichung 3^{ten} Grades für σ in Form einer verschwindenden Determinante, τ ist in Form eines Quotienten zweier Unterdeterminanten rational durch σ ausdrückbar, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ sind die Wurzeln der Gleichung:

$$T^2 - \sigma T + \tau = 0.$$

Die Bedingung, unter welcher ein Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergeht, erhält man, indem man $\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_1$, $\sigma = 2\mathfrak{t}_1$, $\tau = \mathfrak{t}_1^2$ setzt und dann $\mathfrak{t}_1$ eliminirt, sie ist:

$$\begin{vmatrix} (012) & 2(013) & (023)+3(014) & 2(024) & (034) & 0 \\ (013) & 2[(023)+(014)] & (123)+4(024) & 2[(124)+(034)] & (134) & 0 \\ (014) & 2(024) & (124)+3(034) & 2(134) & (234) & 0 \\ 0 & (012) & 2(013) & (023)+3(014) & 2(024) & (034) \\ 0 & (013) & 2[(023)+(014)] & (123)+4(024) & 2[(124)+(034)] & (134) \\ 0 & (014) & 2(024) & (124)+3(034) & 2(134) & (234) \end{vmatrix} = 0.$$

3.

Die rationalen Curven 5ter Ordnung besitzen 6 Doppelpunkte.

Die erste der Gleichungen (1) ist:

$$\left.\begin{array}{l} (a_0 b_1)\tau^4 + (a_0 b_2)\sigma\tau^3 + (a_0 b_3)\sigma^2\tau^2 + (a_0 b_4)\sigma^3\tau + (a_0 b_5)\sigma^4 \\ + [(a_1 b_2) - (a_0 b_3)]\tau^3 + [(a_1 b_3) - 2(a_0 b_4)]\sigma\tau^2 + [(a_1 b_4) + 3(a_0 b_5)]\sigma^2\tau \\ + (a_1 b_5)\sigma^3 + [(a_2 b_3) - (a_1 b_4) + (a_0 b_5)]\tau^2 + [(a_2 b_4) - 2(a_1 b_5)]\sigma\tau \\ + (a_2 b_5)\sigma^2 + [(a_3 b_4) - (a_2 b_5)]\tau + (a_3 b_5)\sigma + (a_4 b_5) \end{array}\right\} = 0.$$

Hieraus erhält man durch einfache Rechnung das System (2):

$$\left.\begin{array}{l} (012)\tau^3 + \{(013)\sigma + (023) - (014)\}\tau^2 \\ + \{(014)\sigma^2 + [(024) - 2(015)]\sigma + (034) - (025)\}\tau \\ + (015)\sigma^3 + (025)\sigma^2 + (035)\sigma + (045) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} (013)\tau^3 + \{[(023) + (014)]\sigma + (123) - (015)\}\tau^2 \\ + \{[(024) + (015)]\sigma^2 + [(124) + (034) - (025)]\sigma + (134) - (125)\}\tau \\ + (025)\sigma^3 + [(125) + (035)]\sigma^2 + [(135) + (045)]\sigma + (145) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} (014)\tau^3 + \{[(024) + (015)]\sigma + (124) - (034)\}\tau^2 \\ + \{[(034) + (025)]\sigma^2 + [(134) + (125) - (035)]\sigma + (234) - (045)\}\tau \\ + (035)\sigma^3 + [(135) + (045)]\sigma^2 + [(235) + (145)]\sigma + (245) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} (015)\tau^3 + \{(025)\sigma + (125) - (035)\}\tau^2 \\ + \{(035)\sigma^2 + [(135) - 2(045)]\sigma + (235) - (145)\}\tau \\ + (045)\sigma^3 + (145)\sigma^2 + (245)\sigma + (345) \end{array}\right\} = 0.$$

Durch Elimination der Terme τ^3, τ^2, τ, 1 erhält man für σ eine Gleichung 6ten Grades, also 6 Werthepaare t_1, t_2.

Setzt man $t_2 = t_1$, so erhält man, nach Elimination von t_1, das Verschwinden einer Determinante 8ter Ordnung deren Elemente (012), (013), ... sind, als Bedingung, unter welcher ein Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergeht.

4.

Die rationalen Curven 6ter Ordnung besitzen 10 Doppelpunkte.

Die erste Gleichung des Systems (1) lautet:

$$\left.\begin{aligned}
&(a_0b_1)\tau^5+(a_0b_2)\sigma\tau^4+(a_0b_3)\sigma^2\tau^3+(a_0b_4)\sigma^3\tau^2+(a_0b_5)\sigma^4\tau+(a_0b_5)\sigma^5\\
&+[(a_1b_2)-(a_0b_3)]\tau^4+[(a_1b_3)-2(a_0b_4)]\sigma\tau^3+[(a_1b_4)-3(a_0b_5)]\sigma^2\tau^2\\
&+[(a_1b_5)-4(a_0b_6)]\sigma^3\tau+(a_1b_6)\sigma^4+[(a_2b_3)-(a_1b_4)+(a_0b_5)]\tau^3\\
&+[(a_2b_4)+3(a_0b_6)-2(a_1b_5)]\sigma\tau^2+[(a_2b_5)-3(a_1b_6]\sigma^2\tau\\
&+(a_2b_6)\sigma^3+[(a_1b_6)+(a_3b_4)]\tau^2+[(a_3b_5)-2(a_2b_6)]\sigma\tau\\
&+(a_3b_6)\sigma^2+[(a_4b_5)-(a_3b_6)]\tau+(a_4b_6)\sigma+(a_5b_6)
\end{aligned}\right\}=0.$$

Hieraus erhält man das System (2):

$$\left.\begin{aligned}
&(012)\tau^4+\{(013)\sigma+(023)-(014)\}\tau^3\\
&+\{(014)\sigma^2+[(024)-2(015)]\sigma+(016)-(025)+(034)\}\tau^2\\
&+\{(015)\sigma^3+[(025)-3(016)]\sigma^2+[(035)-2(026)]\sigma+(045)\\
&-(036)\}\tau+(016)\sigma^4+(026)\sigma^3+(036)\sigma^2+(046)\sigma+(056)
\end{aligned}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&(013)\tau^4+\{[(023)+(014)]\sigma+(123)-(015)\}\tau^3\\
&+\{[(024)+(015)]\sigma^2+[(124)+(034)-(025)-2(016)]\sigma+(134)\\
&-(125)\}\tau^2+\{[(025)+(016)]\sigma^3+[(125)+(035)-2(026)]\sigma^2\\
&\qquad+[(045)-(036)+(035)-2(126)]\sigma+(145)-(136)\}\tau\\
&+(026)\sigma^4+[(126)+(036)]\sigma^3+[(136)+(046)]\sigma^2\\
&+[(146)+(056)]\sigma+(156)
\end{aligned}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&(014)\tau^4+\{[(024)+(015)]\sigma+(124)-(034)-(016)\}\tau^3\\
&+\{[(034)+(025)+(016)\sigma^2+[(125)+(134)-(035)-(026)]\sigma\\
&\quad+(234)-(126)+(036)-(045)\}\tau^2\\
&+\{[(035)+(026)]\sigma^3+[(135)+(126)+(045)-2(036)]\sigma^2\\
&\quad+[(235)+(145)-(136)-(046)]\sigma+(245)-(236)-(056)\}\tau\\
&+(034)\sigma^4+[(136)+(046)]\sigma^3+[(236)+(146)+(056)]\sigma^2\\
&\quad+[(246)+(156)]\sigma+(256)
\end{aligned}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&(015)\tau^4+\{[(025)+(016)]\sigma+(125)-(035)\}\tau^3\\
&+\{[(035)+(026)]\sigma^2+[(135)+(126)-2(045)-(036)]\sigma+(235)\\
&-(145)\}\tau^2+\{(045)+(036)]\sigma^3+[(145)+(136)-2(046)]\sigma^2\\
&+[(245)+(236)-(146)-2(056)]\sigma+(345)-(156)\}\tau+(046)\sigma^4\\
&+[(146)+(056)]\sigma^3+[(246)+(156)]\sigma^2+[(345)+(256)]\sigma+(356)
\end{aligned}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}(016)\tau^4+\{(026)\sigma+(126)-(036)]\}\tau^3 \\ +\{(036)\sigma^2+[(136)-2(046)]\sigma+(236)-(146)+(056)\}\tau^2 \\ +\{(046)\sigma^3+[(146)-3(056)]\sigma^2+[(246)-2(156)]\sigma+(346) \\ -(256)\}\tau+(056)\sigma^4+(156)\sigma^3+(256)\sigma^2+(356)\sigma+(456)\end{array}\right\}=0.$$

Durch Elimination von τ ergiebt sich für σ eine Gleichung 10^{ten} Grades, also auch 10 Werthpaare t_1, t_2.

Setzt man $t_2=t_1$ und eliminirt dann t_1, so erhält man das Verschwinden einer Determinante 10^{ter} Ordnung als Bedingung für die Existenz eines Rückkehrpunktes.

Zusatz: Die Gleichung für die Parameter der Doppelpunkte lässt sich noch etwas kürzer ableiten.

Sollen x_1, x_2, x_3 die Coordinaten eines Doppelpunktes sein, so muss:

$$x_1:x_2:x_3=A(t_1):B(t_1):C(t_1)=A(t_2):B(t_2):C(t_2),$$

oder:

$$\frac{A(t_1)}{A(t_2)}=\frac{B(t_1)}{B(t_2)}=\frac{C(t_1)}{C(t_2)}$$

sein; bezeichnet man diese 3 gleichen Quotienten mit $-\mathfrak{D}$, so hat man:

$$A(t_1)+\mathfrak{D}A(t_2)=0,$$
$$B(t_1)+\mathfrak{D}B(t_2)=0,$$
$$C(t_1)+\mathfrak{D}C(t_2)=0.$$

Für die rationalen Curven 4^{ter} Ordnung erhält man z. B.:

$$a_0t_1^4+a_1t_1^3+a_2t_1^2+a_3t_1+a_4+\mathfrak{D}(a_0t_2^4+a_1t_2^3+a_2t_2^2+a_3t_2+a_4)=0,$$
$$b_0t_1^4+b_1t_1^3+b_2t_1^2+b_3t_1+b_4+\mathfrak{D}(b_0t_2^4+b_1t_2^3+b_2t_2^2+b_3t_2+b_4)=0,$$
$$c_0t_1^4+c_1t_1^3+c_2t_1^2+c_3t_1+c_4+\mathfrak{D}(c_0t_2^4+c_1t_2^3+c_2t_2^2+c_3t_2+c_4)=0.$$

Bezeichnet man nun Determinanten von der Form:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1t_1^3+a_2t_1^2+a_3t_1+a_4 & A(t_2) \\ b_0 & b_1t_1^3+b_2t_1^2+b_3t_1+b_4 & B(t_2) \\ c_0 & c_1t_1^3+c_2t_1^2+c_3t_1+c_4 & C(t_2)\end{vmatrix}$$

durch

$$|\,a_0 \quad a_1t_1^3+a_2t_1^2+a_3t_1+a_4 \quad A(t_2)\,|,$$

so ergeben sich leicht folgende Gleichungen:

$$|\,a_0 \quad a_1t_1^3+a_2t_1^2+a_3t_1+a_4 \quad A(t_2)\,|=0,$$
$$|\,a_0t_1+a_1 \quad a_2t_1^2+a_3t_1+a_4 \quad A(t_2)\,|=0,$$
$$|\,a_0t_1^2+a_1t_1+a_2 \quad a_3t_1+a_4 \quad A(t_2)\,|=0,$$
$$|\,a_0t_1^3+a_1t_1^2+a_2t_1+a_3 \quad a_4 \quad A(t_2)\,|=0.$$

Ebenso bestehen diejenigen Gleichungen, welche sich hieraus durch Vertauschung von t_1 mit t_2 ergeben; aus beiden Systemen erhält man durch einfache Rechnung, nach Unterdrückung des Factors $t_1 - t_2$, leicht die folgenden:

$$\begin{aligned}(012)t_1^2t_2^2 + (013)t_1t_2(t_1+t_2) + (023)t_1t_2 + (014)(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)\\ + (024)(t_1+t_2) + (034) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(013)t_1^2t_2^2 + [(023)+(014)]t_1t_2(t_1+t_2) + (123)t_1t_2\\ + (024)(t_1^2+t_1t_2+t_2^2) + [(124)+(034)](t_1+t_2) + (134) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(014)t_1^2t_2^2 + (024)t_1t_2(t_1+t_2) + (124)t_1t_2 + (034)(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)\\ + (134)(t_1+t_2) + (234) = 0,\end{aligned}$$

woraus sich durch Einführung von:

$$t_1t_2 = \tau,$$
$$t_1 + t_2 = \sigma$$

die bereits früher S. 519 aufgestellten Gleichungen ergeben.

§ 2.

Die Gleichung für die Parameter der Berührungspunkte der Doppeltangenten.

Für die Parameter t_1, t_2 der Berührungspunkte einer Doppeltangente hat Clebsch (Crelle's Journal Bd. 64) die Gleichungen angegeben:

$$\frac{1}{(t_1-t_2)^2}\left|A(t_1)\;A(t_2)\;\frac{dA(t_1)}{dt_1}\right| = 0,$$

$$\frac{1}{(t_1-t_2)^2}\left|A(t_1)\;A(t_2)\;\frac{dA(t_2)}{dt_2}\right| = 0,$$

wo wieder zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\begin{vmatrix} A(t_1) & A(t_2) & \frac{dA(t_1)}{dt_1} \\ B(t_1) & B(t_2) & \frac{dB(t_1)}{dt_1} \\ C(t_1) & C(t_2) & \frac{dC(t_1)}{dt_1}\end{vmatrix} = \left|A(t_1)\;A(t_2)\;\frac{dA(t_1)}{dt_1}\right|.$$

Bezeichnet man:

$$\frac{dA(t_1)}{dt_1} = A_1', \qquad \frac{dA(t_2)}{dt_2} = A_2',$$

$$nA(t_1) - \frac{dA(t_1)}{dt_1} = A_1^0, \quad nA(t_2) - \frac{dA(t_2)}{dt_2} = A_2^0,$$

so gelangt man z. B. für die rationalen Curven 4^{ter} Ordnung zu folgenden Gleichungen:

$$| \; A_1^0 - A_2^0 \quad A_1' - A_2' \quad A_1^0\mathfrak{t}_2 - A_2^0\mathfrak{t}_1 \; | = 0,$$
$$| \; A_1^0\mathfrak{t}_2^3 - A_2^0\mathfrak{t}_1^3 \quad A_1'\mathfrak{t}_2^3 - A_2'\mathfrak{t}_1^3 \quad A_1'\mathfrak{t}_2^2 - A_2'\mathfrak{t}_1^2 \; | = 0,$$

oder, wenn man wieder:

$$\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 = \sigma,$$
$$\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2 = \tau$$

setzt und die der Lösung fremden Factoren unterdrückt:

$$2[(012)\sigma + (013)]\tau + (013)\sigma^2 + 2(023)\sigma + (123) = 0,$$
$$(123)\tau^2 + 2[(124)\sigma + (134)]\tau + (134)\sigma^2 + (234)\sigma = 0.$$

Auch für die rationalen Curven 5ter Ordnung lassen sich die entsprechenden Gleichungen herleiten; jedoch ist diese Methode wegen des Auftretens der der Lösung fremden Factoren unbequem.

Einfacher ist es von anderen Gleichungen auszugehen, welche für die rationalen Curven 3ter Ordnung Herr Igel (Mathematische Annalen Bd. 6) und für die rationalen Curven 4ter Ordnung Herr Brill (Mathematische Annalen Bd. 12) benutzt haben.

1.

Die rationalen Curven 4ter Ordnung haben 4 Doppeltangenten.

Die Gerade:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

schneidet die rationale Curve 4ter Ordnung in 4 Punkten, deren Parameter $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$, $\mathfrak{t}_4$ die Wurzeln der Gleichung 4ten Grades:

$$u_1A(\mathfrak{t}) + u_2B(\mathfrak{t}) + u_3C(\mathfrak{t}) = 0$$

sind. Die linke Seite hat die Form:

$$\mathfrak{C}\{\mathfrak{t}^4 - p_1\mathfrak{t}^3 + p_2\mathfrak{t}^2 - p_3\mathfrak{t} + p_4\},$$

wo gesetzt ist:

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t}_3 + \mathfrak{t}_4 &= p_1, \\ \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3 + \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4 + \mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3 + \mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_4 + \mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4 &= p_2, \\ \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3 + \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_4 + \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4 + \mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4 &= p_3, \\ \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4 &= p_4. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten von $\mathfrak{t}^4$, $\mathfrak{t}^3$, $\mathfrak{t}^2$, $\mathfrak{t}$, 1 erhält man:

$$(2) \quad \begin{aligned} u_1a_0 + u_2b_0 + u_3c_0 &= \mathfrak{C}.1, \\ u_1a_1 + u_2b_1 + u_3c_1 &= -\mathfrak{C}.p_1, \\ u_1a_2 + u_2b_2 + u_3c_2 &= \mathfrak{C}.p_2, \\ u_1a_3 + u_2b_3 + u_3c_3 &= -\mathfrak{C}.p_3, \\ u_1a_4 + u_2b_4 + u_3c_4 &= \mathfrak{C}.p_4. \end{aligned}$$

Hieraus lassen sich leicht die Bedingungen herleiten, dass 3 oder 4 Punkte der Curve in einer Geraden liegen. Soll die Gerade Doppeltangente sein, so müssen zwei Parameter den andern gleich, z. B.

$$t_4 = t_2, \quad t_3 = t_1$$

werden; dann wird:

$$p_1 = 2\sigma, \quad p_2 = \sigma^2 + 2\tau, \quad p_3 = 2\sigma\tau, \quad p_4 = \tau^2. \tag{3}$$

Eliminirt man nun aus den Gleichungen (2) die Grössen u_1, u_2, u_3, $\mathfrak{C}$, so erhält man:

$$\begin{array}{lr} & [(012)\sigma+(013)].2\tau+(013)\sigma^2+2.(023)\sigma+(123)=0,\\ -(012)\tau^2 & +(014).2\tau+(014)\sigma^2+2.(024)\sigma+(124)=0,\\ (4)\quad -(013)\tau^2-(014)\sigma.2\tau & +2.(034)\sigma+(134)=0,\\ -(023)\tau^2-[(024)\sigma+(034)]2\tau-(034)\sigma^2 & +(234)=0,\\ -(123)\tau^2-[(124)\sigma+(134)]2\tau-(134)\sigma^2-2.(234)\sigma & =0. \end{array}$$

Von diesen Gleichungen sind nur 2 unabhängig, man könnte daher z. B. aus den beiden ersten durch Elimination von τ eine Gleichung 4ten Grades für σ herleiten; die Coefficienten würden jedoch in den Grössen (012), (013), ... von der 3ten Ordnung sein. Die Gleichung für σ ergiebt sich in einfacherer Form, wenn man die 3te Gleichung mit σ^2, die 4te mit 2σ multiplicirt und zur 5ten addirt, dadurch erhält man:

$$[(013)\sigma^2 + 2(023)\sigma + (123)]\tau$$
$$+ 2\{(014)\sigma^3 + 2(024)\sigma^2 + [(124) + 2(034)]\sigma + (134)\} = 0;$$

aus dieser Gleichung und der ersten der 5 Gleichungen (4) ergiebt sich für σ die Gleichung 4ten Grades:

$$\begin{vmatrix} 2.[(012)\sigma+(013)] & (013)\sigma^2+2(023)\sigma+(123) \\ (013)\sigma^2+2(023)\sigma+(123) & \begin{array}{l} 2\{(014)\sigma^3+2(024)\sigma^2 \\ \quad +[(124)+2(034)]\sigma+(134)\} \end{array} \end{vmatrix} = 0,$$

τ ist rationale Function von σ; t_1, t_2 sind die Wurzeln der Gleichung:

$$T^2 - \sigma T + \tau = 0.$$

2.

Die rationalen Curven 5ter Ordnung haben 12 Doppeltangenten.

Die Gerade:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

schneidet die Curve 5ter Ordnung in 5 Punkten, deren Parameter t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 die Wurzeln der Gleichung 5ten Grades:

$$u_1 A(\mathrm{t}) + u_2 B(\mathrm{t}) + u_3 C(\mathrm{t}) = 0$$

sind; die linke Seite dieser Gleichung muss daher von der Form sein:

$$\mathfrak{C}\{\mathrm{t}^5 - p_1 \mathrm{t}^4 + p_2 \mathrm{t}^3 - p_3 \mathrm{t}^2 + p_4 \mathrm{t} - p_5\},$$

wo p_1 die Summe der Wurzeln, p_2 die Summe der Producte derselben zu zweien u. s. w. bedeutet. Soll die Gerade Doppeltangente sein, so muss

$$\mathrm{t}_5 = \mathrm{t}_2, \quad \mathrm{t}_4 = \mathrm{t}_1$$

sein, mithin, wenn wieder:

$$\mathrm{t}_1 + \mathrm{t}_2 = \sigma, \quad \mathrm{t}_1 \mathrm{t}_2 = \tau$$

gesetzt wird:

$$p_1 = 2\sigma + \mathrm{t}_3, \quad p_2 = \sigma^2 + 2\tau + 2\mathrm{t}_3\sigma, \quad p_3 = 2\sigma\tau + \mathrm{t}_3(\sigma^2 + 2\tau),$$
$$p_4 = \tau^2 + 2\mathrm{t}_3\sigma\tau, \quad p_5 = \mathrm{t}_3\tau^2.$$

Setzt man wieder die Coefficienten der einzelnen Potenzen von t in dem Ausdruck:

$$u_1 A(\mathrm{t}) + u_2 B(\mathrm{t}) + u_3 C(\mathrm{t})$$

den entsprechenden von

$$\mathfrak{C}\{\mathrm{t}^5 - p_1 \mathrm{t}^4 + p_2 \mathrm{t}^3 - p_3 \mathrm{t}^2 + p_4 \mathrm{t} - p_5\}$$

gleich, so erhält man:

$$(2)\quad \begin{aligned}
u_1 a_0 + u_2 b_0 + u_3 c_0 &= \mathfrak{C}.1,\\
u_1 a_1 + u_2 b_1 + u_3 c_1 &= -\mathfrak{C}.2\sigma - \mathfrak{C}\mathrm{t}_3,\\
u_1 a_2 + u_2 b_2 + u_3 c_2 &= \mathfrak{C}.(\sigma^2 + 2\tau) + \mathfrak{C}\mathrm{t}_3.2\sigma,\\
u_1 a_3 + u_2 b_3 + u_3 c_3 &= -\mathfrak{C}.2\sigma\tau - \mathfrak{C}\mathrm{t}_3.(\sigma^2 + 2\tau),\\
u_1 a_4 + u_2 b_4 + u_3 c_4 &= \mathfrak{C}.\tau^2 + \mathfrak{C}\mathrm{t}_3.2\sigma\tau,\\
u_1 a_5 + u_2 b_5 + u_3 c_5 &= -\mathfrak{C}\mathrm{t}_3.\tau^2.
\end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Grössen $u_1, u_2, u_3, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}\mathrm{t}_3$, so erhält man folgende:

$$\left.\begin{aligned}
&-2(012)\tau^3 + \{3(012)\sigma^2 + 2(013)\sigma + 4(014) - (023)\}\tau^2\\
&+ 2\{(013)\sigma^3 + 2(023)\sigma^2 + [(024) + (123)]\sigma + (124) - (034)\}\tau\\
&+ (014)\sigma^4 + 2(024)\sigma^3 + [3(034) + (124)]\sigma^2 + 2(134)\sigma + (234)
\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&2\{(012)\sigma + (013)\}\tau^3 + \{(013)\sigma^2 + 2(023)\sigma + (123) - 4(015)\}\tau^2\\
&+ \{-2(025)\sigma + 2(035) - 2(125)\}\tau\\
&- (015)\sigma^4 - 2(025)\sigma^3 - [(125) + 3(035)]\sigma^2 - 2(135)\sigma - (235)
\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&-(012)\tau^4 + 2(014)\tau^3 + \{(014)\sigma^2 + 2[(024) + (015)]\sigma + (124) - (025)\}\tau^2\\
&+ 2\{(015)\sigma^3 + 2(025)\sigma^2 + (125)\sigma + (045)\}\tau\\
&- 3(045)\sigma^2 - 2(145)\sigma - 245)
\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&-(013)\tau^4+2\left\{-(014)\sigma+(015)\right\}\tau^3\\
&+\left\{-3(015)\sigma^2+2(034)\sigma+(134)-(035)\right\}\tau^2\\
&+2\left\{2(035)\sigma^2+[(045)+(135)]\sigma+(145)\right\}\tau\\
&+2(045)\sigma^3+(145)\sigma^2-(345)
\end{aligned}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&-(023)\tau^4-2\left\{(024)\sigma-(025)+(034)\right\}\tau^3\\
&-\left\{[3(025)+(034)]\sigma^2+2(035)\sigma-(234)+4(045)\right\}\tau^2\\
&+2\left\{-(035)\sigma^3+(235)\sigma+(245)\right\}\tau-(045)\sigma^4+(245)\sigma^2+2(345)\sigma
\end{aligned}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&-(123)\tau^4-2\left\{(124)\sigma-(125)+(134)\right\}\tau^3\\
&-\left\{[3(125)+(134)]\sigma^2+2[(234)+(135)]\sigma-(235)+4(145)\right\}\tau^2\\
&-2\left\{(135)\sigma^3+2(235)\sigma^2+(245)\sigma-(345)\right\}\tau\\
&-(145)\sigma^4-2(245)\sigma^3-3(345)\sigma^2
\end{aligned}\right\}=0.$$

Multiplicirt man die dritte dieser Gleichungen mit σ^2, die vierte mit 2σ und addirt sie zur 5^{ten}; multiplicirt man ferner die 4^{te} Gleichung mit σ^2, die 5^{te} mit 2σ und addirt sie zur 6^{ten}, so erhält man:

$$\begin{aligned}
H_2\tau^3+H_2'\tau^2+H_4\tau+H_5&=0,\\
J_2\tau^3+J_3\tau^2\;+J_4\tau+J_5'&=0,
\end{aligned}$$

wo gesetzt ist:

$$\begin{aligned}
-H_2&=(012)\sigma^2+2(013)\sigma+(023),\\
-\frac{H_2'}{2}&=(014)\sigma^2+[(024)-2(015)]\sigma+(034)-(025),\\
H_4&=\begin{cases}(014)\sigma^4+[2(024)-4(015)]\sigma^3+[(124)+3(034)-4(025)]\sigma^2\\ \quad+[2(135)-4(035)]\sigma+(234)-4(045),\end{cases}\\
\frac{H_5}{2}&=\begin{cases}(015)\sigma^5+2(024)\sigma^4+[(125)+3(035)]\sigma^3\\ +[2(135)+3(045)]\sigma^2+[(235)+2(145)]\sigma+(245),\end{cases}\\
-J_2&=(013)\sigma^2+2(023)\sigma+(123),\\
-\frac{J_3}{2}&=\begin{cases}(014)\sigma^3+[2(024)-(015)]\sigma^2+[(124)+2(034)-2(025)]\sigma\\ \quad+(134)-(125),\end{cases}\\
-J_4&=\begin{cases}3(015)\sigma^4+6(025)\sigma^3+[(134)+3(125)+5(035)]\sigma^2\\ \quad+[2(135)+8(045)]\sigma-(235)+4(145),\end{cases}\\
\frac{J_5'}{2}&=(045)\sigma^3+(145)\sigma^2+(245)\sigma+(345).
\end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen und die beiden ersten des vorhergehenden Systems sind für τ vom 3^{ten} Grade; man kann daher aus ihnen τ^3, τ^2, τ, 1 unmittelbar eliminiren und erhält dadurch für σ die Gleichung 12^{ten} Grades in der Form:

$$\begin{vmatrix} F_0 & F_2 & F_3 & F_4 \\ G_1 & G_2 & G_1' & G_4 \\ H_2 & H_2' & H_4 & H_5 \\ J_2 & J_3 & J_4 & J_3' \end{vmatrix} = 0,$$

wo F_μ, G_μ, G'_μ, H_μ, H'_μ, J_μ, J'_μ ganze Functionen μ^{ter} Ordnung von σ bezeichnen; τ ist rationale Function von σ; $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ sind die Wurzeln der Gleichung: $T^2 - \sigma T + \tau = 0$.

Eine andere Methode ist folgende: Eliminirt man aus den 6 Gleichungen (2) S. 526 die Grössen $u_1, u_2, u_3, \mathfrak{C}, \sigma, \tau$, so erhält man eine Gleichung 12^{ten} Grades für $\mathfrak{t}_3$; σ, τ sind dann rationale Functionen von $\mathfrak{t}_3$.

Eliminirt man zu diesem Zwecke zunächst $u_1, u_2, u_3, \mathfrak{C}$, so erhält man:

$$\begin{aligned} (012)p_3 + (013)p_2 + (023)p_1 + (123) &= 0, \\ -(012)p_4 + (014)p_2 + (024)p_1 + (124) &= 0, \\ (012)p_5 + (015)p_2 + (025)p_1 + (125) &= 0, \\ (013)p_4 + (014)p_3 - (034)p_1 - (134) &= 0; \end{aligned}$$

u. s. w.

von diesen Gleichungen sind nur 3 unabhängig. Man hat also 3 Gleichungen 2^{ter} Ordnung in σ, τ, deren Coefficienten ganze, lineare Functionen von $\mathfrak{t}_3$ sind; die Eliminationsresultante ist daher für $\mathfrak{t}_3$ vom 12^{ten} Grade. Um dieselbe in möglichst einfacher Form (ohne überflüssige, von $\mathfrak{t}_3$ unabhängige Factoren) zu erhalten, leitet man leicht folgende Gleichungen her:

$$\begin{aligned} \alpha_{12}\tau^2 + 2\gamma_{23}\sigma + \beta_{12} &= 0, \\ -2\alpha_{12}\sigma\tau + 2\alpha_{23}\sigma + \alpha_{24} &= 0, \\ 2\alpha_{12}\tau + \alpha_{12}\sigma^2 + 2\alpha_{13}\sigma + \alpha_{14} &= 0, \\ \alpha_{13}\tau^2 - \gamma_{23}(\sigma^2 + 2\tau) + \beta_{13} &= 0, \\ 2\alpha_{13}\sigma\tau + \alpha_{23}(\sigma^2 + 2\tau) - \alpha_{34} &= 0, \\ -\alpha_{14}\tau^2 + \beta_{12}(\sigma^2 + 2\tau) + 2\beta_{13}\sigma &= 0, \\ \alpha_{23}\tau^2 + 2\gamma_{23}\sigma\tau + \beta_{23} &= 0, \\ \alpha_{34}\tau^2 + 2\beta_{13}\sigma\tau + \beta_{23}(\sigma^2 + 2\tau) &= 0, \\ \alpha_{24}\tau^2 + 2\beta_{12}\sigma\tau - 2\beta_{23}\sigma &= 0, \\ 2\alpha_{14}\sigma\tau + \alpha_{24}(\sigma^2 + 2\tau) + 2\alpha_{34}\sigma &= 0, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= (012)\mathfrak{t}_3^3 + (013)\mathfrak{t}_3^2 + (014)\mathfrak{t}_3 + (015), \\ \alpha_{13} &= (013)\mathfrak{t}_3^3 + [(023) + (014)]\mathfrak{t}_3^2 + [(024) + (015)]\mathfrak{t}_3 + (025), \\ \alpha_{14} &= (023)\mathfrak{t}_3^3 + [(123) + (024)]\mathfrak{t}_3^2 + [(124) + (025)]\mathfrak{t}_3 + (125), \end{aligned}$$

$$\alpha_{23} = (014)t_3^3 + [(024)+(015)]t_3^2 + [(025)+(034)]t_3 + (035),$$
$$\alpha_{24} = (024)t_3^3 + [(124)+(034)+(025)]t_3^2 + [(134)+(125)+(035)]t_3 + (135),$$
$$\alpha_{34} = (034)t_3^3 + [(134)+(035)]t_3^2 + [(234)+(135)]t_3 + (235),$$
$$\beta_{12} = (025)t_3^3 + [(125)+(035)]t_3^2 + [(135)+(045)]t_3 + (145),$$
$$\beta_{13} = (035)t_3^3 + [(135)+(045)\, t_3^2 + [(235)+(145)]t_3 + (245),$$
$$\beta_{23} = (045)t_3^3 + (145)t_3^2 + (245)t_3 + (345),$$
$$\gamma_{23} = (015)t_3^3 + (025)t_3^2 + (035)t_3 + (045).$$

Macht man die ersten 3 Gleichungen homogen, indem man:

$$\tau = \frac{\tau'}{\xi'}, \quad \sigma = \frac{\sigma'}{\xi'}$$

setzt, so erhält man 3 homogene Gleichungen 2ter Ordnung für τ', σ', ξ'; bezeichnet man ihre Functionaldeterminante durch F, so muss:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi'} = 0$$

sein. Nun ist abgesehen von dem Factor α_{12}:

$$F = \begin{vmatrix} \tau' & \gamma_{23}\xi' & \gamma_{23}\sigma' + \beta_{12}\xi' \\ -\sigma' & -\alpha_{12}\tau' + \alpha_{23}\xi' & \alpha_{23}\sigma' + \alpha_{24}\xi' \\ \xi' & \alpha_{12}\sigma' + \alpha_{13}\xi' & \alpha_{12}\tau' + \alpha_{13}\sigma' + \alpha_{14}\xi' \end{vmatrix}.$$

Bedenkt man, dass:

$$\alpha_{12}\alpha_{34} - \alpha_{13}\alpha_{24} + \alpha_{14}\alpha_{23} = 0,$$
$$\alpha_{12}\beta_{13} - \alpha_{13}\beta_{12} + \alpha_{14}\gamma_{23} = 0,$$
$$\alpha_{12}\beta_{23} - \alpha_{23}\beta_{12} + \alpha_{24}\gamma_{23} = 0$$

ist, so kann man in F noch einmal den Factor α_{12} absondern und erhält dann:

$$F = \begin{cases} \alpha_{12}\tau'^3 + \alpha_{13}\tau'^2\sigma' + (\alpha_{14} - \alpha_{23})\,\tau'^2\xi' + (\alpha_{24} - 2\gamma_{23})\tau'\sigma'\xi' \\ \quad + \alpha_{23}\tau'\sigma'^2 + (\alpha_{34} - \beta_{12})\,\tau'^2\xi + \gamma_{23}\sigma'^3 + \beta_{12}\sigma'^2\xi' \\ \quad + \beta_{13}\sigma'\xi'^2 + \beta_{23}\xi'^3. \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen S. 528 erhält man für $\frac{\partial F}{\partial \tau'} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \sigma'} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \xi'} = 0$:

$$(2\alpha_{14} - 4\alpha_{23})\tau' + (\alpha_{24} - 8\gamma_{23})\sigma' + (2\alpha_{34} - 4\beta_{12})\xi' = 0,$$
$$2\alpha_{23}\sigma'\tau' + \alpha_{24}\tau'\xi' + 4\gamma_{23}\sigma'^2 + 2\beta_{12}\sigma'\xi' = 0,$$
$$\alpha_{24}\sigma'\tau' + 2\alpha_{34}\tau'\xi' + 2\beta_{12}\sigma'^2 + 4\beta_{13}\sigma'\xi' + 4\beta_{23}\xi'^2 = 0.$$

Führt man jetzt wieder τ, σ ein, so bilden die 2te und 3te der Gleichungen S. 528 mit diesen ein System, welches τ^2 nicht enthält.

Daher lassen sich die Verhältnisse der Terme $\sigma\tau$, σ^2, τ, σ, 1 aus ihnen bestimmen; die Determinante muss verschwinden:

$$\begin{vmatrix} -2\alpha_{12} & 0 & 0 & 2\alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & \alpha_{12} & 2\alpha_{12} & 2\alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & 2\alpha_{14}-4\alpha_{24} & \alpha_{24}-8\gamma_{23} & 2\alpha_{34}-4\beta_{12} \\ 2\alpha_{23} & 4\gamma_{23} & \alpha_{24} & 2\beta_{12} & 0 \\ \alpha_{24} & 2\beta_{12} & 2\alpha_{34} & 4\beta_{13} & 4\beta_{23} \end{vmatrix} = 0;$$

bedenkt man, dass

$$\alpha_{23}\alpha_{14} - \alpha_{13}\alpha_{24} = -\alpha_{12}\alpha_{34}$$

ist, so kann man den Factor α_{12} unterdrücken, und es bleibt ein Ausdruck, der in den $\alpha_{\lambda\mu}$, $\beta_{\lambda\mu}$, $\gamma_{\lambda\mu}$ von der 4^{ten} Ordnung, also in t_3 vom 12^{ten} Grade ist.

3.

Die rationalen Curven 6^{ter} Ordnung haben 24 Doppeltangenten.

Die Gerade:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

schneidet die Curve in 6 Punkten, deren Parameter $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ die Wurzeln der Gleichung 6^{ten} Grades $u_1 A(t) + u_2 B(t) + u_3 C(t) = 0$ sind; die linke Seite dieser Gleichung muss daher von der Form sein:

$$\mathfrak{C}\left\{t^6 - p_1 t^5 + p_2 t^4 - p_3 t^3 + p_4 t^2 - p_5 t + p_6\right\},$$

wo p_1 die Summe der Wurzeln, p_2 die Summe der Producte derselben zu zweien u. s. w. bedeutet. Soll die Gerade Doppeltangente werden, so muss:

$$t_6 = t_2, \quad t_5 = t_1$$

werden, mithin, wenn wieder $t_1 + t_2 = \sigma$, $t_1 t_2 = \tau$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} p_1 &= t_3 + t_4 + 2\sigma, \\ p_2 &= t_3 t_4 + (t_3 + t_4) \,.\, 2\sigma + (\sigma^2 + 2\tau), \\ p_3 &= t_3 t_4 \,.\, 2\sigma + (t_3 + t_4)(\sigma^2 + 2\tau) + 2\sigma\tau, \\ p_4 &= t_3 t_4 (\sigma^2 + 2\tau) + (t_3 + t_4) \,.\, 2\sigma\tau + \tau^2, \\ p_5 &= t_3 t_4 \,.\, 2\sigma\tau + (t_3 + t_4)\tau^2, \\ p_6 &= t_3 t_4 \,.\, \tau^2. \end{aligned}$$

Setzt man die Coefficienten der gleichen Potenzen von t einander gleich, so erhält man die Gleichungen:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&u_1 a_0 + u_2 b_0 + u_3 c_0 = \mathfrak{C}.1,\\
&u_1 a_1 + u_2 b_1 + u_3 c_1 = -\mathfrak{C}.(\mathfrak{t}_3+\mathfrak{t}_4) - \mathfrak{C}.2\sigma,\\
&u_1 a_2 + u_2 b_2 + u_3 c_2 = \mathfrak{C}\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4 + \mathfrak{C}(\mathfrak{t}_3+\mathfrak{t}_4)2\sigma + \mathfrak{C}(\sigma^2+2\tau),\\
&u_1 a_3 + u_2 b_3 + u_3 c_3 = -\mathfrak{C}\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4.2\sigma - \mathfrak{C}(\mathfrak{t}_3+\mathfrak{t}_4)(\sigma^2+2\tau) - \mathfrak{C}2\sigma\tau,\\
&u_1 a_4 + u_2 b_4 + u_3 c_4 = \mathfrak{C}\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4.(\sigma^2+2\tau) + \mathfrak{C}(\mathfrak{t}_3+\mathfrak{t}_4)2\sigma\tau + \mathfrak{C}\tau^2,\\
&u_1 a_5 + u_2 b_5 + u_3 c_5 = -\mathfrak{C}\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4.2\sigma\tau - \mathfrak{C}(\mathfrak{t}_3+\mathfrak{t}_4).\tau^2,\\
&u_1 a_6 + u_2 b_6 + u_3 c_6 = \mathfrak{C}\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4\tau^2.
\end{aligned}
$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Grössen u_1, u_2, u_3, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}(\mathfrak{t}_3+\mathfrak{t}_4)$, $\mathfrak{C}\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4$, so erhält man 7 Gleichungen, von denen die erste für τ vom 4^{ten} Grade, die zweite und dritte vom 5^{ten} Grade, die übrigen vom 6^{ten} Grade sind. Multiplicirt man die dritte Gleichung mit σ^2, die vierte mit 2σ und addirt sie zur fünften, so erhält man (nach Beseitigung des Factors τ):

$$D_1\tau^5 + D_3\tau^4 + D_4\tau^3 + D_4'\tau^2 + D_6\tau + D_7 = 0.$$

Multiplicirt man die vierte Gleichung mit σ^2, die fünfte mit 2σ und addirt sie zur sechsten, so erhält man (nach Beseitigung des Factors τ):

$$E_2\tau^5 + E_2'\tau^4 + E_4\tau^3 + E_5\tau^2 + E_6\tau + E_4' = 0;$$

verfährt man ebenso mit den 3 letzten Gleichungen, so erhält man:

$$F_2\tau^5 + F_3\tau^4 + F_4\tau^3 + F_5\tau^2 + F_4'\tau + F_5' = 0.$$

Aus den 3 ersten Gleichungen und diesen neuen erhält man die Gleichung 24^{ten} Grades für σ in der Form:

$$
\begin{vmatrix}
0 & A_1 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6\\
B_0 & B_2 & B_3 & B_4 & B_4' & B_6\\
C_1 & C_2 & C_1' & C_4 & C_5 & C_3\\
D_1 & D_3 & D_4 & D_4' & D_6 & D_7\\
E_2 & E_2' & E_4 & E_5 & E_6 & E_4'\\
F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_4' & F_5'
\end{vmatrix} = 0,
$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$A_1 = 2(012)\sigma - 3(013),$$

$$A_3 = 8(012)\sigma^3 + 6[(014) - (023)]\sigma + 6(015) - 2(123),$$

$$A_4 = \begin{cases} 3(013)\sigma^4 + [6(023) - 2(014)]\sigma^3 + 3[(123) + (015)]\sigma^2 \\ \quad + [2(124) + 6(025) - 6(034)]\sigma + 4(125) - (134) - 3(035), \end{cases}$$

$$A_5 = \begin{cases} 2(014)\sigma^5 + [4(024) - 2(015)]\sigma^4 + [2(124) + 6(034) - 2(025)]\sigma^3 \\ \quad + 4(134)\sigma^2 + [2(234) + 2(135) - 6(045)]\sigma - 2(145), \end{cases}$$

$$A_6 = \begin{cases} (015)\sigma^6 + 2(025)\sigma^5 + [(125) + 3(035)]\sigma^4 + [2(135) + 4(045)]\sigma^3 \\ \quad + 3(145)\sigma^2 + 2(245)\sigma + (345). \end{cases}$$

$$B_0 = 2(012),\ B_2 = -3(012)\sigma^2 - 2(013)\sigma + (023) - 4(014),$$

$$B_3 = -\begin{cases} 2(013)\sigma^3 - 4(023)\sigma^2 - 2[(123) + (024)]\sigma \\ \quad + 6(016) + 2(034) - 2(124), \end{cases}$$

$$B_4 = \begin{cases} 4(014)\sigma^4 - 2(024)\sigma^3 + [3(016) - 3(034) - (124)]\sigma^2 \\ \quad + [6(026) - 2(134)]\sigma + 4(126) - 3(036) - (234), \end{cases}$$

$$B_4' = -2(016)\sigma^4 - 2(026)\sigma^3 + [2(136) - 6(046)]\sigma + 2(236) - 2(146),$$

$$B_6 = \begin{cases} (016)\sigma^6 + 2(026)\sigma^5 + [3(036) + (126)]\sigma^4 + [2(136) + 4(046)]\sigma^3 \\ \quad + [3(146) - (236)]\sigma^2 + 2(246)\sigma + (346). \end{cases}$$

$$C_1 = 2[(012)\sigma + (013)],\ C_2 = (013)\sigma^2 + 2(023)\sigma + (123) - 4(015),$$

$$C_1' = -[2(025) + 6(016)]\sigma + 2(035) - 2(125),$$

$$C_4 = \begin{cases} -(015)\sigma^4 + [2(016) - 2(025)]\sigma^3 - [(125) + 3(035)]\sigma^2 \\ \quad + [6(036) - 2(126) - 2(135)]\sigma + (136) - 235), \end{cases}$$

$$C_5 = \begin{cases} -2(016)\sigma^5 - 4(026)\sigma^4 - [6(036) + 2(126)]\sigma^3 - 4(136)\sigma^2 \\ \quad - [2(236) + 6(056)]\sigma - 2(156), \end{cases}$$

$$C_3 = 4(056)\sigma^3 + 3(156)\sigma^2 + 2(256)\sigma + (356).$$

$$D_1 = -2(012)\sigma - (013),$$

$$D_3 = 2(012)\sigma^3 + 2(013)\sigma^2 + 2(014)\sigma + 2(015),$$

$$D_4 = \begin{cases} (013)\sigma^4 + 2[(014) + (023)]\sigma^3 + [(123) + 4(024) - 3(015)]\sigma^2 \\ \quad + [2(124) + 2(034) - 2(025) - 8(016)] + (134) - (035), \end{cases}$$

$$D_4' = \begin{cases} 4(015)\sigma^4 - [10(025) + 14(016)]\sigma^3 + [6(035) + 2(125) - 12(026)]\sigma^2 \\ \quad + [2(135) + 6(045) - 6(036) - 4(126)]\sigma + 2[145) - (136)], \end{cases}$$

$$D_6 = \begin{cases} -(015)\sigma^6 + [8(016) - 2(025)]\sigma^5 + [12(026) - 3(035) - (125)]\sigma^4 \\ + [12(036) + 4(126) - 4(045) - 2(135)]\sigma^3 \\ + [4(136) - 3(145) + 12(046) - (235)]\sigma^2 \\ + [12(056) + 4(146) - 2(245)]\sigma + 4(156) - (345), \end{cases}$$

$$D_7 = \begin{cases} -2(016)\sigma^7 - 4(026)\sigma^6 - [2(126) + 6(036]\sigma^5 \\ -[4(136) + 8(046)]\sigma^4 - [2(236) + 6(146) + 8(056)]\sigma^3 \\ -[4(246) + 6(156)]\sigma^2 - [2(346) + 4(256)]\sigma - 2(356). \end{cases}$$

$$E_2 = -(012)\sigma^2) - 2(013)\sigma - (023),$$

$$E_2' = -2(014)\sigma^2 - [2(024) - 4(015)]\sigma - 2[(034) - (025)],$$

$$E_4 = \begin{cases} (014)\sigma^4 + [2(024) - 4(015)]\sigma^3 + [(124) - (025) - (034) - 7(016)]\sigma^2 \\ + [2(134) - 2(026) - 4(035)]\sigma + (234) - 4(045) + 3(036), \end{cases}$$

$$E_5 = \begin{cases} 2(015)\sigma^5 - [4(025) + 16(016)]\sigma^4 + [2(125) + 6(035) - 14(026)]\sigma^3 \\ + [4(135) - 2(126) + 6(045) - 12(036]) \sigma^2 \\ + [2(235) + 4(145) - 4(136) - 6(046)]\sigma \\ + 2(245) - 2(236) - 6(056), \end{cases}$$

$$E_6 = \begin{cases} 3(016)\sigma^6 + 6(026)\sigma^5 + [3(126) + 9(036)]\sigma^4 + [6(136) + 10(046)]\sigma^3 \\ + [3(236) + 5(146) + 12(056]\sigma^2 \\ + [2(246) + 8(156)]\sigma + 4(256) - (346), \end{cases}$$

$$E_4' = -2(056)\sigma^4 - 2(156)\sigma^3 - 2(256)\sigma^2 - 2(356)\sigma - 2(456).$$

$$F_2 = -(013)\sigma^2 - 2(023)\sigma - (123),$$

$$F_3 = \begin{cases} -2(014)\sigma^3 - [4(024) - 2(015)]\sigma^2 \\ - [2(124) + 4(034) - 4(025)]\sigma + 2[(134) + (125)], \end{cases}$$

$$F_4 = \begin{cases} -3(015)\sigma^4 - 2(016)\sigma^3 - [3(125) + 5(035) + 4(026)]\sigma^2 \\ - [2(135) + 2(126) + 8(045) - 6(036)]\sigma + 3(136) - (235) - 4(145), \end{cases}$$

$$F_5 = \begin{cases} -8(016)\sigma^5 - 16(026)\sigma^4 - [2(135) + 8(126) + 6(036) - 2(045)]\sigma^3 \\ + [4(235) + 2(145) - 2(136)]\sigma^2 \\ + [2(245) - 10(236) - 6(146) - 12(056)]\sigma + 2(345) - 6(156), \end{cases}$$

$$F_4' = \begin{cases} 4(046)\sigma^4 + [12(236) + 4(146)]\sigma^3 \\ \quad + [4(246) + (156)]\sigma^2 + [4(346) + 6(256)]\sigma + 3(356), \end{cases}$$

$$F_5' = 2(056)\sigma^5 + 2(156)\sigma^4 + 2(256)\sigma^3 + 2(356)\sigma^2 + 2(456)\sigma = 0.$$

Berlin, Mai 1885.

Ueber die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + A_m \frac{d^m y}{d(lx)^m} + A_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{d(lx)^{m-1}} + \cdots + A_1 \frac{dy}{d(lx)} + A_0 y = 0$$

mit Anwendung auf die Theorie der trinomischen Gleichungen.

Von

W. Heymann in Dresden.

Im 3ten Band der Mathematischen Annalen hat Herr S. Spitzer darauf aufmerksam gemacht, dass sich Gleichungen der Form*)

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \mathfrak{A}_m x^m \frac{d^m y}{dx^m} + \cdots + \mathfrak{A}_1 x \frac{dy}{dx} + \mathfrak{A}_0 y$$

mittelst bestimmter Integrale integriren lassen.

Auf Gleichungen von eben dieser Gestalt bin auch ich gekommen, als ich jene Differentialgleichungen aufsuchte, denen die Wurzeln der trinomischen Gleichung

$$y^n - ny - (n-1)x = 0$$

genügen. Ich ging hierbei von den Fällen $n = 3, 4, 5$ aus und erkannte durch Betrachtung dieser speciellen Fälle**), dass folgendes allgemeine Resultat besteht:

Sämmtliche Wurzeln der trinomischen Gleichung nten Grades

$$y^n - ny - (n-1)x = 0$$

genügen einer linearen Differentialgleichung $(n-1)$*ter Ordnung*

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d(lx)^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{d(lx)} + a_0 y$$

und diese Differentialgleichung lässt sich andererseits auch durch bestimmte Integrale der Form

---

*) Diese Gleichung ist von der in der Ueberschrift citirten nicht wesentlich verschieden.

**) Vergl. meine Arbeit: Zur Integration der Differentialgleichungen. Zeitschrift f. Math. u. Phys. XXIX. Jahrg.

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \varphi(u)\, f(ux)\, du$$

befriedigen. Man kann mithin sämmtliche Wurzeln der trinomischen Gleichung durch jenes Integral in geschlossener Form darstellen und schliesslich auf diesem Wege bis zu der Entwickelung in Reihen vordringen.

Ich werde diesen letzten Umstand in Kürze berücksichtigen, weil sich sodann — falls die Reihen convergiren — die in Frage kommenden Integraltranscendenten als brauchbare Ausdrücke legitimiren *).

Bevor ich jedoch zu meinen Entwickelungen übergehe, muss ich auf die einschlägigen interessanten Untersuchungen einiger englischen Mathematiker aufmerksam machen, die mir nach Abschluss meiner Arbeit bekannt geworden sind.

In the Quarterly Journal of Mathematics, Vol. V, hat Herr Harley unter dem Titel „On the Theory of the Transcendental Solution of Algebraic Equations" eine Arbeit publicirt, in welcher er durch Induction erschliesst, welche Form „the differential resolvent" (so nennt er die lineare Differentialgleichung, welcher die Wurzeln einer algebraischen Gleichung genügen) für die trinomische Gleichung haben muss. — Den Beweis, dass Harley's Resultat allgemein gültig ist, hat Herr Cayley mit Hilfe des Theorems von Lagrange gegeben. — Weitere höchst bemerkenswerthe Verallgemeinerungen hat Boole den Harley'schen Resultaten hinzugefügt.

Schliesslich erübrigt es noch anzugeben, in welchem Verhältniss die vorliegende Arbeit zu den soeben citirten steht.

Wir wollen in Abschnitt I zeigen, dass, die Wurzeln der trinomischen Gleichung zunächst der zweigliedrigen Differentialgleichung

$$x^{n-2}\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \frac{d^{n-1}\left(x^{-\frac{1}{n}}\,y\right)}{d\left(x^{-\frac{n-1}{n}}\right)^{n-1}}$$

genügen, und dass sich diese leicht in Harley's Differentialresolvente umsetzen lässt. — Dass dieser Weg den Vorzug der Kürze hat, bemerkt man, wenn man auf Harley's Originalarbeit zurückgeht.

Unter Nr. II wenden wir uns zu der in der Ueberschrift dieses Aufsatzes angeführten Differentialgleichung, von welcher die Harley'sche ein specieller Fall ist, und führen den zur Zeit fehlenden Beweis, dass ihr thatsächlich die Spitzer'schen Integralformeln genügen.

---

*) Was die Darstellung der Wurzeln trinomischer Gleichungen durch Reihen angeht, so vergl. die Dissertation von H. v. Mangoldt (Berlin 1878), in der man auch zahlreiche ältere Literatur angegeben findet. F. Klein.

Unter Nr. III entwickeln wir jene Integrale in Reihen und untersuchen diese auf ihre Convergenz.

Unter Nr. IV verknüpfen wir die allgemeinen Resultate aus II und III mit dem besonderen aus I indem wir sämmtliche Parameter und Integrationsconstanten dergestalt specialisiren, dass die aufgestellten Integraltranscendenten, resp. Reihen mit den Wurzeln der trinomischen Gleichung coincidiren.

Unter Nr. V stellen wir sämmtliche Lösungen der trinomischen Gleichung zusammen.

I.

Differentialgleichungen für die trinomische Gleichung.

Die trinomische Gleichung

$$z^n - az - b = 0 \tag{1}$$

kann immer auf die Fundamentalformen*)

$$y^n - ny - (n-1)x = 0 \tag{1a}$$

und

$$\eta^n - n\xi\eta - (n-1) = 0 \tag{1b}$$

gebracht werden, in denen x, respect. ξ als Parameter anzusehen sind, und die letzten beiden Gleichungen stehen in folgendem analytischen Zusammenhang

$$x = \xi^{-\frac{n}{n-1}}, \quad y = \eta\xi^{-\frac{1}{n-1}}, \quad \text{d. h.} \quad \xi = x^{-\frac{n-1}{n}}, \quad \eta = yx^{-\frac{1}{n}}. \tag{2}$$

Wir bemerken vorab, dass es die später zu erledigenden Fragen über Convergenz der Reihen bedingen, wenn wir die Gleichung (1) in zweifacher Form betrachten.

Die Fundamentalformen genügen nachstehender Differentialgleichung

$$x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\frac{d^{n-1}\eta}{d\xi^{n-1}}, \quad n > 2, \tag{3}$$

was sich auf folgende Weise zeigen lässt: Es folgt aus der zweiten Fundamentalform bei Benutzung einer von Herrn Schlömilch aufgestellten Formel**)

---

*) Vergl. D. Besso: „Sopra una classe di equazioni trinomie," Reale accademia dei lincei, 9. Nov. 1884.

**) Siehe dessen „Vorlesungen über höhere Analysis". Dort findet sich in dem Capitel „Die höheren Differentialquotienten" folgende Formel

$$\frac{d^n f(y)}{dx^n} = D_\varrho^{n-1}\left\{\left(\frac{\varrho}{\varphi(y+\varrho)-\varphi(y)}\right)^n f'(y+\varrho)\right\}_{\varrho=0}, \quad x = \varphi(y).$$

$$\frac{d^{n-1}\eta}{d\xi^{n-1}} = D_\varrho^{n-2}\left\{\left(\frac{\varrho}{\frac{(\eta+\varrho)^n-(n-1)}{n(\eta+\varrho)}-\xi}\right)^{n-1}\right\}_{\varrho=0},$$

und substituirt man hierin rückwärts für ξ, η die Variabeln x, y nach Massgabe von Nr. 2 und setzt $\varrho = x^{-\frac{1}{n}}\sigma$, so kann man schreiben

$$\frac{d^{n-1}\eta}{d\xi^{n-1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} x^{n-2} D_\sigma^{n-2}\left\{\left(\frac{(n-1)\sigma}{(y+\sigma)^n-n(y+\sigma)-(n-1)x}\right)^{n-1}(y+\sigma)^{n-1}\right\}_{\sigma=0}.$$

Aus der ersten Fundamentalform folgt, dass falls $n > 2$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{y^n}{n}\right),$$

und wendet man auch hier die Schlömilch'sche Formel an $\left(\text{für } f = \frac{y^n}{n}\right)$, so ergiebt sich ohne Weiteres

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = D_\sigma^{n-2}\left\{\left(\frac{(n-1)\sigma}{(y+\sigma)^n-n(y+\sigma)-(n-1)x}\right)^{n-1}(y+\sigma)^{n-1}\right\}_{\sigma=0}.$$

Durch Vergleich der für $\frac{d^{n-1}\eta}{d\xi^{n-1}}$ und $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ gewonnenen Ausdrücke gelangt man zu der unter der Nr. 3 aufgestellten Differentialgleichung. — Im Falle $n = 2$ tritt eine Ausnahme ein: die Differentialgleichung (3) ist dann nicht mehr homogen.

Für die weitere Entwickelung ist es nöthig, folgende Identität einzuführen, deren Richtigkeit durch den Schluss von m auf $m+1$ leicht erprobt wird. Es ist für beliebige p und q

$$(4)\qquad \frac{d^m x^p y}{d(x^q)^m} = \frac{x^{\lambda_{m+1}}}{q^m}\left\{\frac{d^m y}{d(lx)^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{d(lx)^{m-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{d(lx)} + a_0 y\right\},$$

wenn die $a_\varkappa$ dadurch definirt sind, dass

$$\lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + (-1)^{m-1}a_1\lambda + (-1)^m a_0 = 0,$$
$$\lambda_\varkappa = p - (\varkappa-1)q;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, m.\quad \lambda_{m+1} = p - mq.$$

Je nachdem man nun die Differentialgleichung (3) nur in den Variabeln x, y oder nur in ξ, η schreibt und sodann die Formel (4) benutzt, erhält man als *Differentialgleichungen für die Fundamentalformen*

im ersten Fall

$$(3\text{a})\quad \begin{cases} \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\displaystyle\sum_{i=n-1}^{i=0} a_i \frac{d^i x}{d(lx)^i}, \qquad (a_{n-1} = 1) \\ \displaystyle\sum_{n-1}^{0}(-1)^i a_i \lambda^i = 0,\quad \lambda_\varkappa = \varkappa\frac{n-1}{n} - 1,\quad \varkappa = 1, 2, \ldots, (n-1); \end{cases}$$

und im zweiten Fall

$$
(3\,\mathrm{b})\quad \begin{cases} \dfrac{d^{n-1}\eta}{d\xi^{n-1}} = (-1)^{n-1}\xi \sum\limits_{i=n-1}^{i=0} a_i \dfrac{d^i\eta}{d(l\xi)^i}, \qquad (a_{n-1}=1) \\[2ex] \sum\limits_{n-1}^{0} (-1)^i a_i \lambda^i = 0, \quad \lambda_\varkappa = (\varkappa-2)\dfrac{n}{n-1}+1, \ \varkappa=1,2,\ldots,(n-1). \end{cases}
$$

Um fortan die letzten beiden Differentialgleichungen nicht getrennt behandeln zu müssen, wird es zweckmässig sein, dieselben, wenn möglich, unter eine gemeinsame Form zu bringen. Wir erreichen dies, wenn wir die Gleichung (3b) einmal nach ξ differenziren, denn dadurch fällt die Variabele ξ vor dem Summenzeichen fort. Die neue Gleichung ist von der $n$ten Ordnung, gehört aber der äusseren Erscheinung nach zu derselben Classe von Differentialgleichungen als die Gleichung (3a). Zwischen den neuen Coefficienten b und den alten a besteht folgender Zusammenhang

$$b_i = a_i + a_{i-1},$$

was nichts anderes bedeutet, als dass die neue algebraische Gleichung

$$\sum_{i=n}^{i=0} (-1)^i b_i \lambda^i = 0$$

ausser den $(n-1)$ Wurzeln $\lambda_\varkappa = (\varkappa - 2)\dfrac{n}{n-1} + 1$ noch die neue $\lambda_n = 1$ besitzt. Wir haben also folgendes Resultat.

Sämmtliche Wurzeln der zweiten Fundamentalform genügen der Differentialgleichung:

$$
(3\,\mathrm{b}')\quad \begin{cases} \dfrac{d^n\eta}{d\xi^n} = (-1)^{n-1} \sum\limits_{i=n}^{i=0} b_i \dfrac{d^i\eta}{d(lx)^i}, \qquad (b_n=1) \\[2ex] \sum\limits_{n}^{0} (-1)^i b_i \lambda^i = 0, \ \lambda_\varkappa = (\varkappa-2)\dfrac{n}{n-1}+1, \ \varkappa=1,2,\ldots,(n-1);\ \lambda_n=1. \end{cases}
$$

Soll das Integral der Gleichung (3b′) von dem der Gleichung (3b) nicht verschieden sein, so muss die Forderung, dass $\eta^{(n-1)}$ mit ξ gleichzeitig verschwinde, beigefügt werden.

II.

Integration der aufgestellten Differentialgleichungen.

Die soeben aufgestellten Differentialgleichungen stehen unter der gemeinsamen Form

$$(5)\quad \frac{d^\nu y}{dx^\nu} + A_m \frac{d^m y}{d(lx)^m} + A_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{d(lx)^{m-1}} + \cdots + A_1 \frac{dy}{d(lx)} + A_0 y = 0.$$

Im Falle $m = 1$ hat letztere nach **Laplace** folgende particuläre Lösung

$$(6)\qquad y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^\nu}{\nu}} u^{\lambda-1} e^{\varepsilon u x}\, du, \qquad \lambda > 0,$$

wenn

$$A_1 \lambda - A_0 = 0$$

und ε irgend eine Wurzel der Gleichung

$$\varepsilon^\nu + A_1 = 0$$

bedeutet. Setzen wir daher das Integral der Gleichung (5) in der allgemeinen Gestalt

$$(7)\qquad y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^\nu}{\nu}} u^{\lambda-1} f(ux)\, du$$

voraus, dann ergiebt eine einfache Rechnung, dass f von einer Differentialgleichung abhängt, die zu (5) in engster Beziehung steht; man findet nämlich für f die Gleichung

$$(8)\qquad \frac{d^\nu f}{dx^\nu} + B_{m-1} \frac{d^{m-1} f}{d(lx)^{m-1}} + B_{m-2} \frac{d^{m-2} f}{d(lx)^{m-2}} + \cdots + B_1 \frac{df}{d(lx)} + B_0 f = 0,$$

und die A und B sind in folgender Weise

$$A_\varkappa = \lambda B_\varkappa + B_{\varkappa-1}, \quad B_{-1} = B_m = 0$$

an einander gebunden. Dieser Coefficientenzusammenhang zeigt an, dass die algebraischen Gleichungen

$$A_m \mu^m - A_{m-1}\mu^{m-1} + \cdots + (-1)^{m-1} A_1 \mu + (-1)^m \quad A_0 = 0,$$
$$B_{m-1}\mu^{m-1} - \cdots + (-1)^{m-2} B_1 \mu + (-1)^{m-1} B_0 = 0$$

$(\mu - 1)$ gemeinschaftliche Wurzeln besitzen und der ersten überdies die Wurzel λ zukommt.

Indem man nun von dem Falle $m = 1$ ausgehend das Integral successive für ein allgemeines m entwickelt, gelangt man unmittelbar zu folgender particulärer Lösung der Gleichung (5)

$$(9)\qquad y_i = \int_0^\infty\!\!{}^{m}\; e^{-\frac{u_1^\nu + \cdots + u_m^\nu}{\nu}} u_1^{\lambda_1 - 1} \cdots u_m^{\lambda_m - 1} e^{\varepsilon_i u_1 \cdots u_m x} du_1 \cdots du_m.$$

Hierin bedeuten λ_1 bis λ_m die Wurzeln der Gleichung

$$(10)\qquad A_m \lambda^m - A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + (-1)^{m-1} A_1 \lambda + (-1)^m A_0 = 0,$$

während ε_i eine beliebige Wurzel von

$$\varepsilon^\nu + A_m = 0$$

vorstellt. — Berücksichtiget man sämmtliche Wurzeln der letzten Gleichung, so gelangt man zu ν wesentlich von einander verschiedenen Particularintegralen und hat dann ohne Weiteres für das allgemeine Integral

$$(11) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_\nu y_\nu .$$

Das Integral (9) hat nur so lange einen Sinn, als alle λ, respective deren reelle Bestandtheile, positiv sind, und es wird daher für die Gleichungen (3a) und (3b′), bei denen λ_1 offenbar negativ ausfällt, nicht brauchbar sein. In jenen Fällen ist das Integral (9) zu ersetzen durch das äquivalente

$$(9a) \quad y_i = \int dx \cdot \left\{ \underset{m}{\int_0^\infty} e^{-\frac{u_1^\nu + \cdots + u_m^\nu}{\nu}} u_1^{\lambda_1 - 1} \ldots u_m^{\lambda_m - 1} e^{\varepsilon_i u_1 \ldots u_m x} du_1 \ldots du_m \right\} .$$

und hier sind die neuen λ um die positive Einheit grösser als die früheren. Es ist daher im Speciellen (bei Benutzung von 9a)

für Gleichung (3a) $\quad \lambda_\varkappa = \varkappa \frac{n-1}{n}; \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, (n-1),$

für Gleichung (3b′) $\quad \lambda_\varkappa = (\varkappa - 2) \frac{n}{n-1} + 2; \; \varkappa = 1, 2, \ldots, (n-1); \; \lambda_n = 2,$

und diese Zahlen sind ausnahmslos positiv.

III.

Reihenentwickelung für die Integrale.

Für die Reihenentwickelung erweist es sich als zweckmässig, wenn man die einzelnen particulären Lösungen auf die Form

$$(12) \quad y_h = \frac{1}{\nu} \int dx \cdot \left\{ \underset{m}{\int_0^\infty} e^{-\frac{u_1^\nu + \cdots + u_m^\nu}{\nu}} u_1^{\lambda_1 - 1} \ldots u_m^{\lambda_m - 1} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu} \varepsilon_\varkappa^{\nu - h} e^{\varepsilon_\varkappa u_1 \ldots u_m x} du_1 \ldots du_m \right\}$$

bringt, das allgemeine Integral lautet alsdann

$$(13) \qquad y = \sum_{h=0}^{h=\nu-1} E_h y_h + c, \qquad E_h = \text{const.}, \quad c = \text{const.}$$

Entwickelt man die Particularlösung und beachtet die Gleichung

$$\varepsilon_\nu + A_m = 0,$$

so entsteht

$$(14)\quad y_h = -A_m P_h \frac{x^{h+1}}{(h+1)!} + A_m^2 P_{h+\nu} \frac{x^{h+\nu+1}}{(h+\nu+1)!} - A_m^3 P_{h+2\nu} \frac{x^{h+2\nu+1}}{(h+2\nu+1)!}$$

$$+ \cdots + (-1)^{\sigma+1} A^{\sigma+1} P_{h+\sigma\nu} \frac{x^{h+\sigma\nu+1}}{(h+\sigma\nu+1)!} - \cdots,$$

wobei

$$(15)\qquad P_h = \nu^{\omega}\,\Gamma\left(\frac{\lambda_1+h}{\nu}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda_2+h}{\nu}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\lambda_m+h}{\nu}\right),$$

$$\omega = \frac{1}{\nu}\left[\lambda_1 + \cdots + \lambda_m - m(\nu - h)\right].$$

Man bemerkt, dass

$$(16)\qquad P_{h+\nu} = (\lambda_1+h)\cdots(\lambda_m+h)P_h,$$

und diese letzte Relation dient zur successiven Berechnung der P.

Die Reihe für y_h convergirt, wenn $\nu > m$, für jedes endliche x. Ist $\nu = m$, so lautet die Convergenzbedingung

$$A_m x^m < 1.$$

Sollte aber $A_m x^m = 1$ sein, so ergiebt sich leicht als weitere Bedingung

$$\frac{m+3}{2} - \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_m}{m} > 1.$$

Da alle diese Bedingungen unabhängig von h sind, so erstrecken sie sich auf das gesammte Reihenaggregat (13).

Es erübrigt noch ein Wort zu sagen, wie diese Bedingungen für die besonders in Frage kommenden Reihen, welche zu (3a) und (3b′) gehören, lauten.

Bei Gleichung (3a) ist

$$\nu = m = n-1,\quad A_m = (-1)^n;\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} = \frac{(n-1)^2}{2}.$$

Bei Gleichung (3b′) ist

$$\nu = m = n;\qquad A_m = (-1)^n;\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \quad = \frac{n^2}{2}.$$

Es wird daher in beiden Fällen

$$\frac{m+3}{2} - \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_m}{m} = \frac{3}{2} > 1.$$

Hiernach ergiebt sich folgendes Resultat:

Wird das Reihenaggregat (13) *in das Integral der Gleichung* (3a) *specialisirt, so convergirt es, wenn*

$$x^{n-1} \leqq 1,$$

und wird es andererseits in das Integral der Gleichung (3b′) *specialisirt, so convergirt es, wenn*

$$\xi^n \leqq 1.$$

Da überdies die Variabelen x und ξ durch die Gleichung

$$x^{n-1} = \xi^{-n}$$

an einander gebunden sind, so existirt unter allen Umständen eine convergente Reihenentwickelung für die in Rede stehenden Integrale.

IV.

Bestimmung der Integrationsconstanten.

Wenn von der Differentialgleichung (5) ausser dem allgemeinen Integrale (13) ein algebraisches Integral $F(x, y) = 0$ bekannt ist, so wird man — indem man jene beiden Integrale durch gehörige Bestimmung der willkürlichen Constanten zur Coincidenz bringt — eine Auflösung der algebraischen Gleichung in transcendenter Form gewinnen. Zu diesem Zweck ermittelt man aus $F = 0$ die zu $x = 0$ gehörigen Werthe von $y, y', \ldots, y^{(\nu)}$; bezeichnet man sie durch $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ und beachtet, dass aus (13)

$$(y^{(h+1)})_{x=0} = - E_h A_m P_h$$

folgt, so hat man für die Integrationsconstanten

$$E_h = - \frac{\alpha_{h+1}}{A_m P_h}, \qquad h = 0, 1, \ldots, (\nu - 1). \tag{17}$$

Die Constante c in (13) ist so zu wählen, dass $y = \alpha_0$, wenn $x = 0$.

Wir wollen diese Constanten für die Integrale der Fundamentalgleichungen genauer fixiren.

Aus

$$y^n - ny - (n-1)x = 0 \tag{1a}$$

folgt für $x = 0$

$$y = 0 \quad \text{und} \quad y = \sqrt[n-1]{n}.$$

Wird die erste Wurzel in Betracht gezogen, so verschwinden alle α von α_0 bis α_{n-1} mit Ausnahme von

$$\alpha_1 = - \frac{n-1}{n},$$

folglich verschwinden auch alle Constanten E mit Ausnahme von

$$E_0 = - \frac{\alpha_1}{A_{n-1} P_0} = (-1)^n (n-1)^{\frac{n+1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{18}$$

Wird hingegen eine der übrigen $(n-1)$ Wurzeln verwendet, so ergiebt sich

$$E_h = (-1)^{n+h-1} (n-1)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}; \tag{19}$$

$$h = 0, 1, \ldots, (n-2).$$

Bei der zweiten Fundamentalform

$$(1\text{b}) \qquad \eta^n - n\xi\eta - (n-1) = 0$$

ergeben sich für $\xi = 0$ die zugehörigen n Werthe von η in der gemeinsamen Form

$$\eta = \sqrt[n]{n-1},$$

und man findet nach entsprechender Ausmittelung von α_{h+1} und P_h

$$(20) \qquad E_h = (-1)^{n+h-1}(n-1)^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{n}{2}} \cdot 2(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sin \frac{h+2}{n}\pi;$$
$$h = 0, 1, \ldots, (n-1).$$

V.

Auflösung der Fundamentalgleichungen.

Durch Verbindung der bisher gewonnenen Resultate gelangt man zu folgendem Endergebniss.*)

A) *Das Integral*

$$(21) \qquad y = -\mu \int dx \cdot \left\{ {}_{n-1}\int_0^\infty e^{-\frac{u_1^{n-1}+\cdots+u_{n-1}^{n-1}}{n-1}} u_1^{\lambda_1-1} \ldots u_{n-1}^{\lambda_{n-1}-1} \cdot \left[e^{\varepsilon_1 u_1 \ldots u_{n-1} x} + \cdots + e^{\varepsilon_{n-1} u_1 \ldots u_{n-1} x} \right] du_1 \ldots du_{n-1} \right\} + c$$

stellt die mit x gleichzeitig verschwindende Lösung, und das Integral

$$(22) \qquad y = \mu \int dx \cdot \left\{ {}_{n-1}\int_0^\infty e^{-\frac{u_1^{n-1}+\cdots+u_{n-1}^{n-1}}{n-1}} u_1^{\lambda_1-1} \ldots u_{n-1}^{\lambda_{n-1}-1} \cdot e^{-u_1 \ldots u_{n-1} x} du_1 \ldots du_{n-1} \right\} + c'$$

stellt die übrigen $(n-1)$ Lösungen der algebraischen Gleichung

$$(1\text{a}) \qquad y^n - ny - (n-1)x = 0$$

dar. Die Constanten c und c' hat man so zu wählen, dass für $x = 0$

$$y = 0, \text{ respect. } y = \sqrt[n-1]{n};$$

*) Eine ausführlichere Darstellung findet man in der Abhandlung d. Verf. „Ueber die Auflösung gewisser algebraischer Gleichungen mittelst Integration von Differentialgleichungen.“ Zeitschr. f. Math. u. Phys., XXXI. Jahrg.

ausserdem bedeuten

(23) $\mu = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2\pi}\right)^{n-1}}; \quad \lambda_\varkappa = \varkappa\,\frac{n-1}{n}; \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, (n-1),$

und $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}$ sind die Wurzeln von

$$\varepsilon^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Dem Integral (21) entspricht die Reihe

(24) $$y = -\frac{n-1}{n}\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty}(-1)^{\sigma(n-1)}\,p_{\sigma(n-1)}\,\frac{x^{\sigma(n-1)+1}}{(\sigma(n-1)+1)!}, \quad (p_0 = 1),$$

und dem Integral (22) entspricht das aus $(n-1)$ Reihen bestehende Aggregat

(25) $$\begin{cases} y = U_0 g^{n-1} + U_1 g^{n-2} + \cdots + U_{n-3} g^2 + U_{n-2} g + g, \\ U_h = q_{h+1}\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty}(-1)^{\sigma(n-1)}\,p_{h+\sigma(n-1)}\,\frac{x^{h+\sigma(n-1)+1}}{(h+\sigma(n-1)+1)!}, \quad (p_h = 1). \end{cases}$$

Hierbei sind die p definirt durch

(26) $$P_{h+\sigma(n-1)} = p_{h+\sigma(n-1)}\,P_h, \qquad \text{(vergl. Nr. 16)};$$

weiter ist

(27) $$q_{h+1} = (-1)^h \cdot n^{-(h+2)}\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=h}(h+\varkappa(n-1)),$$

und endlich bedeutet g irgend eine Wurzel von

(28) $$g^{n-1} - n = 0.$$

Die Reihen in (24) und (25) convergiren, so lange

$$x^{n-1} \leqq 1.$$

B) *Das Integral*

(29) $$\eta = \mu\int dx \cdot \left\{ \overset{n}{\int_0^\infty} e^{-\frac{u_1^n + \cdots + u_n^n}{n}}\, u_1^{\lambda_1-1}\ldots u_n^{\lambda_n-1} \left[\varepsilon_1^2 e^{\varepsilon_1 u_1\ldots u_n\xi} - \varepsilon_2^2 e^{\varepsilon_2 u_1\ldots u_n\xi}\right] du_1\ldots du_n \right\} + c$$

stellt sämmtliche Lösungen der algebraischen Gleichung

(1b) $$\eta^n - n\xi\eta - (n-1) = 0$$

dar. Die Constante c hat man so zu wählen, dass für $\xi = 0$

$$\eta = \sqrt[n]{n-1};$$

ausserdem bedeuten

(30) $\mu = \sqrt{\frac{-1}{n-1}\left(\frac{n}{2\pi}\right)^n}$; $\lambda_x = (x-2)\frac{n}{n-1} + 2$; $n = 1, 2, \ldots, (n-1)$;

$$\lambda_n = 2,$$

und

(31) $\varepsilon_1 = -\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}, \quad \varepsilon_2 = -\cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n}.$

Dem Integral (29) entspricht das aus $(n-1)$ Reihen bestehende Aggregat

(32) $$\begin{cases} \eta = U_0 g^2 + U_1 g^3 + \cdots + U_{n-3} g^{n-1} + U_{n-1} g^{n+1} + g, \\ U_h = q_{h+1} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} (-1)^{\sigma(n-1)} p_{h+\sigma n} \frac{\xi^{h+\sigma n+1}}{(h+\sigma n+1)!}, \qquad (p_h = 1) \end{cases}$$

Hierbei sind die p definirt durch

(33) $P_{h+\sigma n} = p_{h+\sigma n} P_h$, (vergl. Nr. 16);

weiter ist

(34) $$q_{h+1} = (n-1)^{-(h+1)} \prod_{x=1}^{x=h} (h+2-xn),$$

und endlich bedeutet g irgend eine Wurzel von

$$g^n - (n-1) = 0.$$

Die Convergenzbedingung lautet

$$\xi^n \leq 1.$$

Dresden, Ende Mai 1885.

Ueber die Fadenconstruction des Ellipsoides.

Von

S. Finsterwalder in Tübingen.

Staude*) hat eine bemerkenswerthe Construction des Ellipsoides mit Hilfe eines um zwei confocale Flächen 2. Grades geschlungenen, gespannten Fadens angegeben und den Beweis für dieselbe durch Hereinziehung hyperelliptischer Integrale geführt. Angeregt durch eine Bemerkung des Herrn Professor Brill versuchte ich eine *rein geometrische Ableitung* dieser Construction; welche ich nun im Folgenden darzustellen beabsichtige. Ich war bestrebt, die der Construction zu Grunde liegenden allgemeinen Sätze aufzusuchen und werde dieselben bei der Darstellung den Specialisirungen auf unser Problem voranschicken.

§ 1.

Allgemeines über Normalensysteme. Sätze von Weingarten und Malus.

Die Gesammtheit der gemeinsamen Tangenten zweier Flächen bildet nach der Terminologie von Kummer**) ein Strahlensystem, welches die beiden Flächen zu Brennflächen hat. Wenn die Tangentialebenen, die in den Berührungspunkten eines Strahles an die Brennflächen gelegt werden können, stets senkrecht zu einander stehen, so ist dasselbe speciell ein Normalensystem, d. h. die Strahlen können durch eine Schaar von Parallelflächen, die wir Wellenflächen nennen wollen, orthogonal geschnitten werden. Die Brennflächen werden in diesem Falle die beiden Schalen der, allen Wellenflächen gemeinsamen „Centrafläche". Bekanntlich entspricht den Krümmungslinien der Wellenflächen ein *ausgezeichnetes System geodätischer Linien* auf den Brennflächen in der Art, dass die Normalen längs einer Krümmungslinie der Wellenfläche eine geodätische Linie des Systems auf der Brennfläche berühren. Man kann demnach ein Normalensystem allge-

---

*) Mathematische Annalen Bd. XX.

**) Crelles Journal Bd. 57.

mein als die Gesammtheit der Tangenten an die geodätischen Linien des ausgezeichneten Systemes auf einer der Brennflächen auffassen. Zu einer beliebigen als Brennfläche gegebenen Fläche und einem, durch eine beliebige Curve als seiner Orthogonaltrajectorie gegebenen ausgezeichneten System geodätischer Linien lassen sich die Wellenflächen nach folgendem von Weingarten*) bewiesenen Satze construiren.

„Spannt man über einer gegebenen Fläche, senkrecht gegen eine auf derselben gezeichnete Curve eine Schaar biegsamer Fäden, denen man sämmtlich von den Punkten dieser Curve an gerechnet gleiche Länge giebt, so erzeugen die Endpunkte dieser Fäden bei ihrer Abwickelung eine Fläche (Wellenfläche), von welcher die gegebene Fläche eine Schale der Centralfläche ist.“

Haben die senkrecht zur Curve construirten geodätischen Linien eine Enveloppe, so kann man die oben benutzte Reihe einzelner Fäden durch diejenigen aufeinanderfolgenden Lagen eines einzigen in einem Punkte der Enveloppe befestigten Fadens ersetzen, welche derselbe bei Abwickelung an der Enveloppe annimmt. Hierbei wird nämlich jeder mit dem Faden fest verbundene Punkt (z. B. ein Knoten in dem Faden), so lange er auf der Fläche liegt, eine Linie beschreiben, zu der die einzelnen Fadenlagen normal sind, d. h. eine Orthogonaltrajectorie zu den geodätischen Linien des ausgezeichneten Systemes. Die bei dieser Construction auftretenden geradlinig gespannten Fadentheile bestimmen die Strahlen eines Normalensystemes und umhüllen in Folge dessen die zweite Brennfläche, welche die erste zur vollständigen Centrafläche ergänzt. Unter den Strahlen des Normalensystemes befinden sich auch die Tangenten an die Enveloppe der geodätischen Linien. Für dieselben rückt der Berührpunkt mit der zweiten Brennfläche unendlich nahe gegen den mit der ersten. Angenommen es wäre dies nicht der Fall, und es würde etwa die Tangente in dem Punkte α der Enveloppe die zweite Brennfläche in einem endlich davon entfernten Punkte β berühren. Construirte man dann in dem α benachbarten Punkte α' der Enveloppe die Tangente, welche die zweite Brennfläche in β' berühren möge, so müsste die Ebene $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, die einerseits Schmiegungsebene der Enveloppe andrerseits Tangentialebene an die zweite Brennfläche ist, nach der definirenden Eigenschaft der Normalensysteme senkrecht stehen zur Tangentialebene im Punkte α der ersten Brennfläche. Es würde aber hieraus folgen, dass die Enveloppe der geodätischen Linien selbst geodätische Linie wäre, was unmöglich ist. Daher müssen die beiden Berührpunkte einer Tangente an die Enveloppe zusammenfallen; *die zweite Brennfläche muss also die erste längs der Enveloppe treffen und zwar nothwendig senkrecht.*

*) Crelle's Journal Bd. 62.

Nach einem Satze von **Malus** kann man aus einem Normalensysteme ein zweites dadurch erzeugen, dass man die Strahlen des ersteren an einer beliebigen Fläche spiegeln lässt. Das Folgende wird uns zeigen, dass auch umgekehrt zu irgend zwei Normalensystemen eine Reihe spiegelnder Flächen gefunden werden kann, welche die Strahlen des einen in solche des andern reflectiren.

§ 2.

Fadenconstruction der spiegelnden Fläche.

Es seien nun zwei Flächen A und B in bestimmter Lage zu einander gegeben. Auf jeder sei ein System geodätischer Linien construirt, von dem ich zunächst annehmen will, dass es eine Enveloppe (K_1 resp. K_2) besitzt. Man befestige einen Faden von constanter Länge mit dem einen Endpunkt in einem Punkte der Enveloppe K_1, mit dem andern in einem Punkte von K_2 und spanne ihn derart, dass er sich auf den Flächen A, B zum Theil in tangirenden geodätischen Linien der betreffenden Systeme auflegt, während er im Raume in geradlinigen Tangenten zu letzteren verläuft. *Es wird dann der Knickpunkt des Fadens, von welchem die geradlinigen Partien ausgehen, eine Fläche beschreiben, deren Normale den Winkel dieser Fadenpartien halbirt.**)

Bei dieser Bewegung durchläuft nämlich jedes der gerade gespannten Fadenstücke die Strahlen eines Normalensystemes, das die von ihm berührte Fläche zur Brennfläche hat und jeder Punkt desselben beschreibt, je nachdem er sich auf der einen oder andern Seite des Knickpunktes befindet, eine Wellenfläche des einen oder des andern Normalensystemes. Demnach haben die Punkte der durch die Fadenconstruction gefundenen Fläche die Eigenschaft, dass die Summe (resp. Differenz)**) ihrer Abstände von zwei zu A und B als Brennflächen gehörigen Wellenflächen P bez. Q constant ist.

Eine einfache infinitesimal geometrische Betrachtung wird uns nun

---

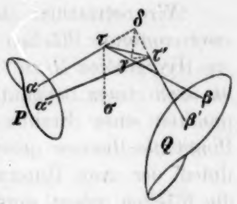
*) Man sieht leicht, wie man sich von der Beschränkung, dass die Systeme geodätischer Linien auf A und B Enveloppen haben, befreien kann. Man braucht nur die Enden des Fadens auf Orthogonaltrajectorien der betreffenden Systeme zu bewegen, während der Faden selbst die Linien des Systems durchläuft. Praktisch liesse sich dies wohl dadurch erreichen, dass man das Fadenende mittels eines leichtbeweglichen Ringes auf der aus Drath hergestellten Orthogonaltrajectorie gleiten lässt.

**) Die Differenz tritt dann an Stelle der Summe, wenn eine der Wellenflächen nicht mehr von einem Punkte des Fadens selbst, sondern von einem Punkte der Verlängerung desselben beschrieben wird. Vgl. § 6.

zeigen, dass eine beliebige Fortschreitungsrichtung auf der Fläche senkrecht zur Halbirungslinie der gerade gespannten Fadentheile steht.

Es seien τ und τ' zwei consecutive Punkte der construirten Fläche; α, α' und β, β' die Punkte, in welchen die geraden Fadentheile zwei Wellenflächen P, Q treffen. Nach der Fadenconstruction ist:

$$\alpha\tau + \tau\beta = \alpha'\tau' + \tau'\beta'.$$



Macht man nun $\alpha\delta = \alpha'\tau'$ und $\beta\gamma = \beta'\tau'$, und zieht die Linien $\tau\tau'$, $\tau'\delta$, $\tau'\gamma$ und $\gamma\delta$, so sieht man leicht dass diese beiden unendlich kleinen Dreiecke $\tau\tau'\delta$ und $\tau\tau'\gamma$ zunächst rechtwinkelig, dann aber wegen der Gleichheit von $\tau\gamma$ und $\tau\delta$ auch congruent sind. Daraus folgt die Gleichheit von $\tau'\delta$ und $\tau\gamma$. In dem infinitesimalen Tetraeder $\tau\tau'\gamma\delta$ stehen in Folge dessen die Gegenkanten $\tau\tau'$ und $\gamma\delta$ senkrecht zu einander, und, da $\gamma\delta$ offenbar parallel zur Halbirungslinie $\tau\sigma$ von $\tau\alpha$ und $\tau\beta$ ist, so ergiebt sich, dass die Fortschreitungsrichtung $\tau\tau'$ senkrecht ist zur Halbirungslinie $\tau\sigma$ der geraden Fadentheile.

Wir wollen den hiemit bewiesenen Satz noch folgendermassen formuliren:

Unsere Fadenconstruction ergiebt eine spiegelnde Fläche, welche die beiden, durch ihre Brennflächen A *und* B, *sammt den zugehörigen ausgezeichneten Systemen geodätischer Linien bestimmten Normalensysteme Strahl für Strahl in einander reflectirt.*

Durch Umkehrung obiger Schlussreihe lässt sich die nachstehende Umkehrung des Satzes beweisen:

Die Punkte einer Fläche, welche zwei Normalensysteme durch Reflexion in einander überführt, haben von irgend zwei Wellenflächen der Letzteren Abstände von constanter Summe (resp. Differenz). Sie können daher durch eine der Obigen analoge Fadenconstruction gefunden werden.

Die Anzahl der spiegelnden Flächen, die zwei gegebene Normalensysteme in einander überführen, ist eine einfach unendliche. Es lassen sich nämlich alle Flächen durch Variation der Fadenlänge*) erhalten, während man die Befestigungspunkte, resp. die Orthogonaltrajectorien, die statt derselben zur Verwendung kommen, unverändert lässt. Eine Verschiebung der Letzteren liesse sich immer durch eine Veränderung der Fadenlänge compensiren und kann also keine neuen Flächen liefern.

*) Dabei sind negative Fadenlängen nicht ausgeschlossen; man kann sie aber in manchen Fällen durch geeignete Wahl der Befestigungspunkte oder der Orthogonaltrajectorien vermeiden; wenn nicht, so führt die in § 6 angeführte Anwendung zum Ziele.

§ 3.

Erste Construction des Ellipsoides.

Wir betrachten als speciellen Fall das Strahlensystem, welches zwei confocale Flächen zweiten Grades und zwar ein Ellipsoid E und ein Hyperboloid H zu Brennflächen hat. Dasselbe ist Normalensystem, da nach einem bekannten Satze die Tangentialebenen in den Berührpunkten eines Strahles senkrecht zu einander stehen. Durch einen Punkt des Raumes gehen 4 Strahlen des Systemes, nämlich die Schnittlinien der zwei Tangentialkegel, welche von diesen Punkten aus an die Flächen gelegt werden können. Die beiden Tangentialkegel sind coaxial und confocal (Siehe: Salmon-Fiedler, Raumgeometrie I, § 175). Die gemeinsamen Axen der Kegel sind die Normalen zu den 3 zu E und H confocalen Flächen, welche durch die Spitze gehen. Aus der Symmetrie der Schnittlinien coaxialer Kegel gegenüber den Axen folgt, dass immer zwei von den vier durch einen Punkt gehenden Strahlen des Systemes mit einer der 3 Normalen in einer Ebene liegen, und dass der Winkel derselben von der Normalen halbirt wird. *Es geht also ein Strahl des Systems durch Reflexion an einer zu den Brennflächen confocalen Fläche in einen anderen Strahl desselben Systems über.*

Wenn wir daher alle Strahlen an einer bestimmten confocalen Fläche etwa an einem Ellipsoid reflectiren lassen, so wird das System der reflectirten Strahlen mit dem der einfallenden sich decken; es vertauschen sich nur dabei die Strahlen in bestimmter Weise. Daraus können wir schliessen, dass sich das Ellipsoid mit Hilfe einer Fadenconstruction aus den, beiden Strahlsystemen gemeinsamen Brennflächen E und H erzeugen lässt. Denn auf unseren Brennflächen E und H ist durch die Annahme, das die eine den ergänzenden Mantel zur andern darstellen soll, dass System geodätischer Linien, welche die gemeinsame Schnittlinie (Krümmungslinie) von E und H berühren, ausgezeichnet. (Man vergleiche hiezu den allgemeinen Satz am Schlusse des § 1).

Wir können daher durch Anwendung der allgemeinen Construction der spiegelnden Fläche auf unsere Brennflächen E und H unmittelbar zu folgender *Erzeugung einer zu E und H confocalen Fläche, z. B. des Ellipsoides gelangen:*

Man befestige einen Faden von constanter Länge mit seinen Endpunkten auf je einem Zweige der Krümmungslinie (als Enveloppe) und zwar derart, dass sich der Faden vom Befestigungspunkte aus gerechnet um beide Zweige in verschiedenem Sinne schlingt.*) Spannt man

*) Die Abänderung, welche die Construction bei Erzeugung der Hyperboloide erfährt, finden sich in § 6.

denselben alsdann wie im allgemeinen Falle, d. h. so, dass er auf den Flächen in geodätischen Linien und deren Enveloppen, im Raume aber geradlinig gebrochen verläuft, so wird der Knickpunkt ein Ellipsoid beschreiben, das zu E und H confocal ist.

Dieses Ellipsoid führt die beiden im Knickpunkte zusammentreffenden Strahlen in einander über. Eine Fläche aber, welche diese Eigenschaft hat, kann nach einem Satze des § 2 durch die angegebene Fadenconstruction gefunden werden. Jenachdem die gerade gespannten Fadentheile beide zuerst das Ellipsoid berühren, oder der eine zuerst das Ellipsoid, der andere das Hyperboloid, vertritt das Ellipsoid beide Brennflächen A und B der allgemeinen Construction zugleich oder nur eine derselben, während die Rolle der anderen dem Hyperboloide zufällt. Beide Möglichkeiten sind durch eine Zwischenlage des Fadens, wobei ein Fadentheil die Schnittlinie beider Flächen berührt, continuirlich in einander überführbar, so dass sie bei constanter Fadenlänge Theile ein- und desselben Ellipsoides ergeben.

§ 4.

Metrische Eigenschaft der Orthogonaltrajectorien zu den ausgezeichneten geodätischen Linien auf zusammengehörigen Brennflächen. Staude'sche Construction des Ellipsoides.

Wir haben bei der allgemeinen Fadenconstruction bemerkt, dass jeder Punkt des Fadens, so lange er sich auf einer der Brennflächen bewegt, eine Orthogonaltrajectorie zum ausgezeichneten System geodätischer Linien beschreibt. Es existirt nur eine einfache metrische Eigenschaft dieser Orthogonaltrajectorien, welche uns schliesslich die Mittel an die Hand giebt, die angegebene Fadenconstruction des Ellipsoides so zu modificiren, dass sie mittels eines geschlossenen Fadens ausgeführt werden kann. Dieselbe ergiebt sich aus folgender Ueberlegung.

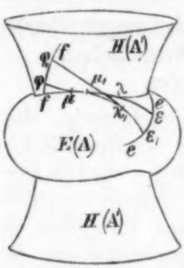
Man denke sich einen Faden $\varepsilon_1 \varphi_1$ (Vergl. die Figur auf Seite 552) von constanter Länge derart zwischen den zwei Brennflächen A und A' eines beliebigen Normalensystemes gespannt, dass er sich mit seinen Enden $\varepsilon_1 \varphi_1$ je in eine geodätische Linie des ausgezeichneten Systemes legt und dazwischen in einer tangirenden, dem Strahlensystem angehörigen Geraden verläuft. Hält man nun den einen Endpunkt ε_1 des Fadens auf der Fläche A fest und bewegt den andern φ_1 auf der Fläche A', während man den Faden gespannt erhält, so wickelt derselbe sich von einer geodätischen Linie auf A ab und bewegt sich über ein continuirliches Flächengebiet, das sich aus einer abwickelbaren Fläche und der von ihr berührten Brennfläche A' zusammensetzt. Der Endpunkt φ_1 auf A' beschreibt dabei eine Linie f, welche die Fadenlagen

senkrecht durchschneidet,*) d. h. eine Orthogonaltrajectorie des ausgezeichneten Systems auf A'. Nun befestige man den zweiten Endpunkt φ_1 in irgend einem Punkte der von ihm beschriebenen Curve f und verschiebe den Endpunkt ε_1 auf A, so wird derselbe aus gleichem Grunde eine Orthogonaltrajectorie e zu dem ausgezeichneten System auf A beschreiben. In Folge dessen hat jeder Punkt der Linie e gleiche Fadendistanz von irgend einem Punkt der Linie f.

Wir können auf Grund dieser Betrachtungen folgenden Satz aufstellen:

*Construiren wir auf jeder der Brennflächen eines Normalensystems eine Orthogonaltrajectorie zum ausgezeichneten System geodätischer Linien, so hat irgend ein Punkt der einen Orthogonaltrajectorie von irgend einem Punkte der andern gleiche Fadendistanz***); d. h. seine Entfernung von diesem auf einem Faden gemessen, dessen Enden in geodätischen Linien auf den Brennflächen verlaufen, während der mittlere Theil geradlinig gespannt erscheint, ist constant.

Es soll nun der vorstehende Satz wieder für den uns interessirenden Fall specialisirt werden, dass die zusammengehörigen Brennflächen ein Ellipsoid E und ein confocales Hyperboloid H sind.



Wir halten einen Faden von constanter Länge mit einem Endpunkte in einem Punkt ε der Orthogonaltrajectorie e auf dem Ellipsoid E fest, legen ihn tangirend an den einen Zug der Krümmungslinie, dann eine beliebige Strecke an derselben entlang und endlich in einer die Krümmungslinie tangirenden geodätischen Linie auf das Hyperboloid. Die Punkte, in welchen die verschiedenen Liniengattungen in einander übergehen, werden mit λ und μ bezeichnet. Wickelt man den Faden, soweit er auf dem Hyperboloid liegt, an der Krümmungslinie ab, so beschreibt der Endpunkt φ desselben eine geodätische Evolvente f der Krümmungslinie und damit eine Orthogonaltrajectorie des ausgezeichneten Systems. Die Punkte der Curven e und f haben ersichtlich gleiche Fadendistanz, solange sich der Faden noch an die Krümmungslinie legt. Aber selbst dann, wenn der Be-

*) Der hiebei grundlegende Satz von Gauss, dass die Verbindungslinie der Endpunkte benachbarter, von einem Punkt ausgehender, gleich langer, geodätischer Linien senkrecht zu letzteren steht, gilt für beliebige continuirliche Flächengebiete und ist von der Darstellung derselben durch *eine* Gleichung völlig unabhängig.

**) Der Satz gilt natürlich nur insoweit, als zwischen den Punkten eine Fadenlage, bei welcher die Enden des Fadens noch auf den Flächen aufliegen, überhaupt möglich ist.

rührpunkt μ über λ hinausrückt und der gespannte Faden wie $\varepsilon_1\,\lambda_1\,\mu_1\,\varphi_1$ zwischen λ_1 und μ_1 geradlinig durch den Raum verläuft, bleibt die Gleichheit der Fadendistanz zufolge des vorhin bewiesenen Satzes aufrecht erhalten. Sucht man demnach zu einem Punkte auf dem Hyperboloide alle Punkte gleicher Fadendistanz auf dem Ellipsoid, so liegen dieselben auf einer Orthogonaltrajectorie zum ausgezeichneten System geodätischer Linien, und jeder Punkt dieser Orthogonaltrajectorie hat dann wieder gleiche Entfernung nicht nur von dem einen Punkte auf dem Hyperboloid, sondern auch von allen Punkten der durch ihn gehenden Orthogonaltrajectorie.

Diese Ueberlegungen machen es uns leicht die *Staude'sche Construction* des Ellipsoides mittels eines geschlossenen Fadens auf die im vorhergehenden Abschnitte bewiesene zurückzuführen.

Wir schlingen einen geschlossenen Faden um die beiden confocalen Flächen E und H und spannen ihn in allen möglichen Lagen, so dass derselbe von einem Punkt des Raumes ausgehend die beiden Flächen umschliesst und wieder zu diesem Punkte zurückkehrt, an welchem die spannende Kraft wirken soll. Einen bestimmten Punkt des Fadens kann man dann immer nöthigen, ein auf einer der Flächen vorgegebenes Curvenstück zu beschreiben. Ist dann diese Curve eine Orthogonaltrajectorie zum ausgezeichneten System geodätischer Linien auf einer der Flächen, so wird jeder auf E und H liegende Punkt des Fadens eine analoge Orthogonaltrajectorie beschreiben. Die beiden im Knickpunkt zusammenstossenden geraden Fadenstücke werden also genau dieselbe Bewegung machen, wie sie die Construction des § 3 vorschreibt, und der Knickpunkt des Fadens beschreibt folglich ein confocales Ellipsoid.

§ 5.

Specielle Fälle.

Die bisher angegebenen Constructionen sind naturgemäss auf jenen Theil des Ellipsoides beschränkt, welcher ausserhalb des Hyperboloides liegt; Staude hat bereits angegeben, dass man sich durch Specialisirung einer oder beider confocaler Flächen von dieser Beschränkung befreien kann.

Lässt man eine der beiden erzeugenden Flächen E, H (zu obigem Zwecke das Hyperboloid H) in einen der Focalkegelschnitte degeneriren, so wird das ausgezeichnete System geodätischer Linien auf der andern das den Nabelpunkten zugehörige. Seine Orthogonaltrajectorien werden geodätische Kreise mit den Nabelpunkten als Mittelpunkt.

Die degenerirte Fläche hat man sich als ein an der Focalcurve zusammenhängendes ebenes Doppelblatt zu denken, und ihre ausgezeichneten geodätischen Linien werden geradlinige Polygone, welche

abwechselnd auf dem oberen und unteren Blatte verlaufend, der Focalcurve ein und dem Hauptschnitte der nicht degenerirten Fläche umbeschrieben sind.

Wenn beide Flächen E und H degeneriren, so gehen die ausgezeichneten geodätischen Linien in die Brennstrahlen der Focalcurven über. Es ist bekannt, dass die Wellenflächen eines Strahlsystems, das ein Paar Focalcurven zu Brennflächen hat, Dupinsche Cycliden sind. Nun beschreibt bei unserer Fadenconstruction, wie schon oben bemerkt, jeder Punkt des im Raume gespannten Fadentheiles eine Wellenfläche des zugehörigen Strahlensystems. Die Construction des Ellipsoides aus seinen Focalcurven, bezüglich derer ich auf die ausführliche Darlegung von Staude verweise, ergiebt uns daher nebenbei noch folgende höchst einfache *Construction der Dupinschen Cyclide*, welche mit der von Maxwell*) gegebenen im Principe übereinkommt.

*Man befestige im Brennpunkt der aus Drath hergestellten Focalellipse einen Faden von constanter Länge und spanne denselben derart, dass er einmal am Umfange der Focalellipse gebrochen erscheint. Der Endpunkt des Fadens beschreibt dann bei allen möglichen Lagen des letzteren eine Cyclide.***)

Bezeichnet man die halbe Länge der grossen Axe unserer Focalellipse mit a, die halbe lineare Excentricität mit e und die Fadenlänge mit r, so resultirt aus der angegebenen Construction eine Cyclide vom Apfel- resp. Spindeltypus, wenn $r > 2u$, eine Cyclide vom Ringtypus, wenn $r \begin{matrix} < 2u \\ > a + e \end{matrix}$, endlich eine Cyclide vom Horntypus, wenn $r \begin{matrix} < a + e \\ > a - e \end{matrix}$ ist.

§ 6.

Fadenconstruction der Hyperboloide und Paraboloide.

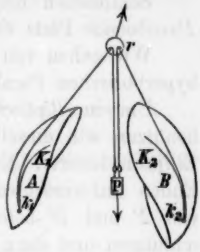
Wir kommen hier zunächst auf einen in § 2 und § 3 berührten Fall zurück, nämlich auf die Construction der spiegelnden Flächen, bei welchen die *Differenz* der Abstände von den Wellenflächen der durch Reflexion in einander überzuführenden Strahlensysteme constant ist.

Bei dieser Construction ist nachstehende Anwendung des Fadens zweckmässig. Es seien wieder die beiden Brennflächen A, B sammt den ausgezeichneten Systemen K_1, K_2 geodätischer Linien, welche

*) Quarterly Journal, Bd. 9, pag. 111 (1867).

**) Dieselbe Construction, dahin verallgemeinert, dass der Faden in irgend einem Punkte des Raumes befestigt und über eine beliebige Raumcurve gebrochen gespannt wird, erzeugt eine Wellenfläche desjenigen Strahlensystems, welches durch Reflexion der von dem Punkte ausgehenden Strahlen an einer durch die Curve dargestellten, unendlich dünnen, spiegelnden Canalfläche entsteht.

uns die in Frage kommenden Normalsysteme bestimmen, gegeben. Man befestige die Enden zweier Fäden von constanter Länge in den Punkten k_1 und k_2 auf K_1 und K_2, lege die Fäden zuerst an K_1 und K_2, dann in tangirenden geodätischen Linien über die Brennfläche und ziehe sie hierauf durch einen kleinen Ring r. An die freien Enden binde man schliesslich ein gemeinsames spannendes Gewicht P. Bewegt man nun den Ring r derart, dass beide Fäden durch das Gewicht P fortwährend gespannt bleiben, so wird derselbe eine Fläche beschreiben, für welche die Differenz der Fadendistanzen von den Punkten k_1 und k_2 und damit auch die Differenz der Abstände von zwei Wellflächen beider Strahlensysteme constant ist.



Die Normale an die so construirte Fläche halbirt den *Aussenwinkel* der beiden im Knickpunkte zusammentreffenden Fadentheile resp. Strahlen. Es hat also auch die bei dieser Construction erzeugte Fläche die Eigenschaft, die beiden Strahlensysteme durch Reflexion in einander überzuführen.

Während es bei der Construction des Ellipsoides möglich war, die Fadenlage so zu wählen, dass die Normale an das Ellipsoid immer den (eigentlichen) Winkel der im Knickpunkte zusammenstossenden Fadenstücke halbirte, ist dies bei Construction der Hyperboloide nicht in ihrer ganzen Ausdehnung der Fall. Dagegen kann man hiebei eine Fadenlänge immer so annehmen, dass die Normale stets den Aussenwinkel der Fadentheile halbirt, in welchem Falle also die eben angeführte Differenzconstruction Geltung hat.

Auf diese Weise gelangen wir zu folgender *Erzeugung der beiden Hyperboloide.*

1) *Zweischaliges Hyperboloid.* Es sei uns ein Ellipsoid E und ein hiezu confocales einschaliges Hyperboloid H gegeben. Wir befestigen die Enden zweier Fäden in zwei beliebigen Punkten des einen Zweiges der gemeinsamen Krümmungslinie von E und H, schlingen sie um denselben (event. mehreremale) und zwar den einen nach links, den andern nach rechts, ziehen sie durch einen Ring und beschweren die Enden derselben durch ein gemeinsames Gewicht. Der Ring wird dann, so lange das Gewicht beide Fäden spannt, die eine Schale eines Hyperboloides — soweit sie ausserhalb E und H verläuft — beschreiben.

2) *Einschaliges Hyperboloid.* Wir befestigen den einen der beiden Fäden an dem oberen, den anderen an dem unteren Zweige der Krümmungslinie, schlingen sie um beide Zweige in gleichem Sinne, ziehen sie wieder durch einen Ring und spannen sie durch ein gemeinsames Gewicht. Lassen wir nun den Ring so bewegen, dass das

Gewicht beide Fäden spannt, so beschreibt er eine Hälfte des ausserhalb E liegenden Theiles eines einschaligen Hyperboloides.

Schliesslich mögen noch analoge Constructionen für die beiden *Paraboloide* Platz finden.

Wir gehen von einem elliptischen P und einem hiezu confocalen hyperbolischen Paraboloid P' aus.

Um ein *elliptisches Paraboloid* des confocalen Systemes zu erhalten, benützen wir dieselbe Summenconstruction welche uns im § 3 das Ellipsoid lieferte. Es wird ein Faden von constanter Länge mit seinen Enden auf verschiedenen Zweigen der gemeinsamen Krümmungslinie von P und P' befestigt, um dieselben in verschiedenem Sinne geschlungen und dann gespannt. Der Knickpunkt beschreibt alsdann in allen möglichen Lagen das ausserhalb P' verlaufende Gebiet eines elliptischen Paraboloides.

Für die Construction des *hyperbolischen Paraboloids* gilt dieselbe Anordnung wie für die des einschaligen Hyperboloides.

Zwei Fäden werden in verschiedenen Zweigen der P und P' gemeinsamen Krümmungslinie befestigt, um beide in gleichem Sinne geschlungen, durch einen Ring gezogen und mit Hilfe eines gemeinsamen Gewichtes gespannt. Alle möglichen Lagen des Ringes erfüllen dann die Hälfte eines hyperbolischen Paraboloides.

Es sei endlich noch darauf hingewiesen, dass hiemit die vollständige Aufzählung aller Fadenconstructionen von Flächen 2. Grades noch nicht gegeben ist. Die Zahl derselben liesse sich vielmehr durch andere Wahl der Ausgangsflächen leicht um das doppelte vermehren. Indes bieten die hier übergangenen weder hinsichtlich des Beweises noch auch in Bezug auf die Anordnung wesentlich neue Gesichtspunkte.

Tübingen, Anfang Juni 1885.

Ableitung der Polareigenschaften algebraischer Mannigfaltigkeiten auf darstellend-geometrischem Wege.

Von

C. Rodenberg in Hannover.

In vorliegender Note soll gezeigt werden, wie man die verschiedenen Polarflächen einer gegebenen Grundfläche, welche in einem beliebig ausgedehnten Raume enthalten gedacht wird, constructiv festlegen kann.

Das abzuleitende Verfahren basirt auf folgendem bekannten Satze: Wenn zwei Flächen sich in einem Punkte berühren, so ist dieser ein Doppelpunkt der Schnittcurve, und umgekehrt, jeder Doppelpunkt der Schnittcurve ist auch ein Berührungspunkt der beiden Oberflächen.

§ 1 enthält die Definition der Polaren eines Punktes in Bezug auf eine gegebene ebene Curve mit Hilfe zweier Projectionskegel aus zwei Punkten des Raumes; und daran anschliessend die Entwickelung einiger, für das Spätere nothwendigen, Sätze. Im § 2 wird die obige Definition für eine Fläche im Raume von p Dimensionen verallgemeinert und gezeigt, dass der Schnitt der Polare mit einem, den Pol enthaltenden ebenen Raume von weniger Dimensionen, auch Polare des ebenen Schnittes der Grundfläche ist. Dadurch wird dann — was nicht direct aus dem benutzten Verfahren ersichtlich ist — klar, dass es auch zu jeder Punktgruppe und einem Pole im Raume von *einer* Dimension, der Geraden, andere Punktgruppen als Polaren giebt, welche *vollkommen bestimmt* sind. Im § 3 wird erörtert, dass in hinreichend ausgedehnten Räumen jede Polare durch eine gewisse Curve bez. Punktgruppe, die sie mit der Grundfläche gemein hat, vollkommen definirt ist, was beispielsweise für die ebene Curve nur bei der ersten Polare der Fall ist. Für diese Punkte der Polare wird dann die Reciprocität der Polarverwandtschaft sofort ersichtlich; dass aber dieselbe für einen willkürlichen Punkt dieser Fläche besteht, wird zunächst (§ 4) für die erste und letzte Polare und dann schliesslich auch für die r^{te} und $(n-r)^{\text{te}}$ Polare nachgewiesen.

§ 1.

Definition der Polaren algebraischer Curven durch gewisse Projectionskegel.

Sei in einer Ebene ε eine Curve n^{ter} O., C^n, als Grundcurve gegeben, sei ferner P der Pol einer zu suchenden Polare. Man ziehe durch P eine Raumgerade g und lege durch zwei ihrer Punkte die Projectionskegel an C^n, deren Durchdringungscurve $n.n^{\text{ter}}$ O. in die C^n und einen Rest $n(n-1)^{\text{ter}}$ O. zerfällt. Letztere schneidet die Ebene ε in $n(n-1)$ Punkten, welche auch auf C^n liegen, da ausser C^n die Kegel keinen Punkt mit ε gemein haben. Daher ist jeder dieser $n(n-1)$ Punkte als ein Doppelpunkt der Gesammtdurchdringungscurve aufzufassen und die Kegelflächen berühren sich folglich in diesen Punkten. Nun gehören aber alle gemeinschaftlichen Tangentenebenen zweier Kegel dem Ebenenbüschel der Verbindungslinie ihrer Spitzen an und daraus schliessen wir, dass durch diese Gerade auch $n(n-1)$ Tangentenebenen an die C^n gehen, und weiter, dass eben so viele Tangenten von der Spur P jener Geraden mit ε an C^n möglich sind. Nach den bekannten Methoden der darstellenden Geometrie kann nun (mittels Hilfsebenen des obigen Büschels) die Raumcurve leicht construirt werden und zwar ist nur *eine* Projection nothwendig, so dass die Zeichnung in einer Ebene am natürlichsten in ε selbst ausführbar ist.*)

Durch die Curve $C^{n.n} = (C^n + C^{n(n-1)})$ geht ein Büschel von Flächen n^{ter} O. *Eine* Fläche dieses Büschels besteht aus ε und einer Restfläche $(n-1)^{\text{ter}}$ O., welche ε in einer Curve ${}^1P^{(n-1)}$ schneidet, die ebenfalls die $n(n-1)$ Berührungspunkte enthält und auch durch diese Punkte bestimmt ist, da zwei Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ O. sich nur in $(n-1)^2$ Punkten durchschneiden. Folglich:

1\. . . . *Die $n(n-1)$ Berührungspunkte der von einem Punkte P an eine C^n zu legenden Tangenten liegen auf einer Curve ${}^1P^{n-1}$, der ersten Polare des Pols P. Diese Curve wird von unendlich vielen F^{n-1} ausgeschnitten, von denen jede durch die Schnittkurve solcher zwei Projectionskegel bestimmt ist, deren Spitzen auf [illegible] durch den Pol gehenden Geraden liegen.*

*) Hat die C^n „d" Doppelpunkte „r" Rückkehrpunkte, so besitzt die $C^{n(n-1)}$ an nämlicher Stelle ebenfalls solche Singularitäten und zwar fallen die Rückkehrtangenten beider Curven für den nämlichen Punkt zusammen, so dass ein Doppelpunkt 2, ein Rückkehrpunkt 3 Schnittpunkte absorbirt. Daraus entspringt die erste Plücker'sche Formel für die Classe

$$k = n(n-1) - 2d - 3r.$$

Betrachtet man nun ${}^1P^{n-1}$ als Grundcurve, so gewinnt man durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens die ganze Polarenreihe

$$ {}^2P^{(n-2)},\quad {}^3P^{(n-3)} \dots {}^{n-1}P^1. $$

Rückt der Pol P auf die Grundcurve, so haben die Projectionskegel eine gemeinschaftliche Tangentenebene τ, deren Spur die C^n in P berührt. Von der $C^{n(n-1)}$ sondert sich die nach P gehende Erzeugende als beiden Kegeln angehörig doppelt zählend ab, und die Flächen des Büschels durch $C^{n,n}$ haben daher längs der ganzen Ausdehnung jener Geraden τ als feste Tangentenebene, insbesondere gilt dies für die Restfläche $n(n-1)^{\text{ter}}$ O., welche ${}^1P^{n-1}$ verzeichnet, d. h. auch ${}^1P^{n-1}$ berührt die C^n in P und ebenso thun es die übrigen Polaren:

2. . . . *Die sämmtlichen Polaren eines Punktes der Grundcurve gehen durch ihn und berühren in ihm die Grundcurve.*

Eine Tangente t berühre in einem Curvenpunkte p-punktig. Dann berührt die Polare eines beliebigen Punktes auf t dort noch $(p-1)$-punktig, denn für so viele gewöhnliche Berührungspunkte zählt derselbe. Die zweite Polare berührt noch $(p-2)$-punktig und so fort, — die $(p-1)^{\text{te}}$ Polare geht noch einfach durch jenen Punkt. Rückt nun der Pol in den Berührungspunkt, so ist dasselbe noch mit einem weitern Punkt der ersten Polare der Fall und für diese Curve ist also t ebenfalls p-punktige Tangente*), folglich ist sie es auch für die folgenden Polaren, d. h.:

3. . . . *Hat eine C^n eine p-punktig berührende Tangente, so gehen alle Polaren, von der ersten bis zur $(p-1)^{\text{ten}}$, eines Punktes dieser Tangente durch den Berührungspunkt und haben daselbst noch bez. $(p-1)$, $(p-2), \dots 2, 1$ Punkte mit der Curve gemein. Insbesondere ist für die sämmtlichen Polaren des Berührungspunktes selbst, die Tangente p-punktig berührend, daher zerfallen alle Polaren von der $(n-p+1)^{\text{ten}}$ bis zur $(n-2)^{\text{ten}}$ als Curven der bez. Ordnungen $(p-1)\dots, 2$ in die Tangente und Curven nächst niederer Ordnung. Die letzte Polare ist, wie immer, die Tangente.*

§ 2.

Die Polarflächen in Bezug auf eine Grundfläche in einem beliebig ausgedehnten Raume.

Das für die ebene C^n angewandte Verfahren lässt sich sofort auf die Fläche n^{ter} O. und $(p-1)^{\text{ter}}$ Dim., F^n_{p-1}, im linearen Raume von p Dim., R_p übertragen. Man denke die beiden Projektionskegel aus zwei Punkten einer durch den Pol P gehenden Geraden im R_{p+1} an

*) Dies folgt übrigens auch direct aus der Betrachtung der Projectionskegel.

die F^n_{p-1} gelegt. Dieselben durchsetzen sich in einer C^{nn}_{p-1} in R_{p+1}, der die F^n_{p-1} als Theil angehört. Der andere Theil, eine $C^{n(n-1)}_{p-1}$, durchschneidet den R_p in einer $C^{n(n-1)}_{p-2}$, der gesuchten Berührungscurve auf der F^n_{p-1}. Unter allen Flächen des Büschels, welchen die beiden Projectionskegel bestimmen, zerfällt eine in den linearen R_p und einen Rest F^{n-1}_p, welcher seinerseits wiederum R_p in einer Curve ${}^1P^{n-1}_{p-1}$, durch die Berührungscurve $C^{n(n-1)}_{p-2}$ gehend, schneidet. Diese Curve ${}^1P^{n-1}_{p-1}$, oder da sie in R_p enthalten ist, besser Fläche ${}^1P^{n-1}_{p-1}$ soll die erste Polarfläche von P in Bezug auf F^n_{p-1} heissen. Diese Polarfläche ist durch die Berührungscurve vollkommen bestimmt, da zwei Flächen $(n-1)^{\text{ter}}$ O. im Allgemeinen nur eine $C^{(n-1)(n-1)}$ gemein haben und im vorliegenden Falle also sämmtliche Punkte gemein haben müssen. Die Wiederholung des Verfahrens führt auf die übrigen Polarflächen

$$ {}^2P^{n-2}_{p-1},\quad {}^3P^{n-3}_{p-1} \ldots {}^{n-1}P^1_{p-1}, $$

von denen also jede durch die Berührungscurve des vom Pole an die vorangehende gelegten Tangentialkegels geht und durch diese Curve bestimmt ist.

Es ist bemerkenswerth, dass man durch Schneiden mit einem linearen Raum R_m, wo $m < p$, welcher den Pol enthält, auf eine Grundfläche mit ihren sämmtlichen Polaren geführt wird, da hieraus die Möglichkeit entspringt die Polaren ohne Hilfe des R_{p+1} zu construiren, indem diese Flächen durch die Gesammtheit der construirten Schnittcurven im Bündel der R_{p-1} des Pols überdeckt wird. Im gewöhnlichen R_3 z. B. werden die Polarflächen von den Polaren der ebenen Schnittcurven, von denen jede in ihrer Ebene construirt werden kann, erfüllt. Nur für den R_1 erleidet diese Methode eine Ausnahme; wir müssen überhaupt noch zeigen, dass die Polarpunkte zu einem Grundsystem G^n und einem Pole wirklich bestimmt sind, was nicht direct ersichtlich, da die Berührungscurven, welche sonst die Polaren festlegen, fehlen. Man schliesst die völlige Bestimmtheit nun daraus, dass die Polaren aller Flächen im R_p $(p > m)$, welche durch eine Fläche derselben Ordnung in R_m gehen, mit diesem Raum dasselbe Polarensystem gemein haben. Insbesondere müssen die Polargruppen zu G^n also auch immer dieselben sein, nämlich die Schnittpunkte der Polaren irgend einer durch G^n gehenden Fläche mit R_1*).

*) Herr Klein theilte mir den folgenden Beweis mit: Man lege durch den Träger von G^n zwei Ebenen und führe in jeder derselben die Construction der Polare durch; wobei die Analoge der Projectionskegel des § 7 zwei Strahlenbüschel sind. Dann bilden die sämmtlichen Constructionslinien zwei centrisch collineare Figuren mit dem Träger von G^n als Collineationsaxe, da sich entsprechende Gerade

§ 3.

Definition der verschiedenen Polarflächen durch Elemente der Grundfläche.

In R_1 konnte die völlige Bestimmtheit der ersten Polare einer Gruppe G^n nur durch Heranziehung höherer Mannigfaltigkeiten eingesehen werden, die geometrische Bedeutung der verschiedenen Gruppen ${}^1P^{n-1}$ etc. ist nicht direct erkennbar. In R_2 ist wenigstens die erste Polare ${}^1P^{n-1}$, als Curve, welche die Berührungspunkte des Tangentenbüschels aus dem Pole enthält, zu erklären, aber die Schnittpunkte der übrigen Polaren mit der Grundcurve haben keine geometrische Bedeutung. In R_3 tritt noch die zweite Polare für eine Fläche hinzu, indem sie nach 3. aus der Berührungscurve $n(n-1)\,O$ die $n(n-1)(n-2)$ Berührungspunkte der dreipunktig berührenden oder Haupttangenten ausschneidet, welche auch umgekehrt die zweite Polarfläche definiren. Die Polaren der Flächen dritter Ordnung in R_3 werden also gerade noch sämmtlich durch Elemente der Grundfläche definirt. Und, man findet leicht weiter, dass dies im R_n bei der $(n-1)$dimensionalen Fläche n^{ter} O. ebenso der Fall ist, dass man nämlich allgemein sagen kann:

4. *Die erste Polare von P in Bezug auf die $(n-1)$ dimensionale Fläche n^{ter} Ordnung im R_n enthält die Berührungscurve $n(n-1)^{\text{ter}}$ O. und $(n-2)^{\text{ter}}$ Dimension des vom Pole an die Fläche gelegten $(n-1)$ dimensionalen Berührungskegels, — die zweite Polare die Berührungscurve $n(n-1)(n-2)^{\text{ter}}$ O. und $(n-3)^{\text{ter}}$ Dimension des $(n-2)$ dimensionalen Berührungskegels der 3punktig berührenden Haupttangenten, — ... die r^{te} Polare die Berührungscurve $n(n-1)\ldots(n-r)^{\text{ter}}$ O. und $(n-r-1)^{\text{ter}}$ Dimension des $(n-r)$ dimensionalen Berührungskegels der $(r+1)$ punktig berührenden Haupttangenten,*) — ... die letzte Polare die Gruppe der $n!$ Berührungspunkte von eben so vielen n-punktig berührenden Haupttangenten. Jede dieser Flächen ist durch die genannten Elemente bestimmt.*

Aus dem Schlusssatze von 3. ziehen wir aber weiter das für die Folge wichtige Resultat:

5. *Die $(n-r)^{\text{te}}$ Polare eines Punktes der Berührungscurve der von einem Punkte P an die Fläche gelegten $(r+1)$ punktig berührenden Haupttangenten* (welcher also auf der r^{ten} Polare von P liegt), *enthält diese Tangenten, d. h. die Fläche geht durch P.*

Denn, legen wir durch eine solche Tangente eine Ebene, so

---

auf ihr schneiden. Folglich sind auch die beiden construirten ebenen Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ O. centrisch collinear, was ein Zusammenfallen ihrer Schnittpunkte mit G^n nach sich zieht, d. h. die beiden von einander gänzlich unabhängigen Constructionen führen auf die nämlichen Polarpunkte w. z. b. w.

*) Es möge gestattet sein, dies Wort hier beizubehalten.

schneidet sie die Curve des Satzes 3. aus. Um nun zu zeigen, dass nicht nur Punkte obiger Berührungscurve, sondern alle Punkte der r^{ten} Polare ihre $(n-r)^{ten}$ Polaren durch den Pol senden; beschäftigen wir uns zunächst mit der ersten und letzten Polare, also mit dem Specialfall $r=1$, für den das Gesagte leicht erweisbar ist.

§ 4.

Die Reciprocität zwischen der ersten und letzten Polare.

Nehmen wir, der leichtern Anschauung wegen, eine Fläche n^{ter} O. im gewöhnlichen Raume. Die ersten Polaren ${}^1P^{n-1}$ und ${}^1Q^{n-1}$ zweier Punkte P und Q schneiden die Fläche in den $n(n-1)^2$ Berührungspunkten der durch die Gerade $\overline{PQ}$ gehenden Tangentialebenen. Eben desswegen gehen auch die Polaren aller übrigen Punkte von $\overline{PQ}$ durch diese Punkte, und da jene Flächen also mehr als $(n-1)^3$ Punkte gemeinschaftlich haben, so haben sie eine ganze Curve gemeinschaftlich, und bilden ein Büschel. Einer zweiten Geraden, welche mit $\overline{PQ}$ in einerlei Ebene liegt, entspricht ein zweiter Büschel und je zwei solche Büschel, wie sie zweien der Geraden dieser Ebene zukommen, haben eine Fläche, nämlich die Polare ihres Schnittpunkts gemein, d. h. die Polaren aller Punkte einer Ebene bilden ein Netz. Nun ist die Beziehung zwischen Pol und erster Polare eine *durchaus eindeutige*, denn wenn überhaupt eine Fläche $(n-1)^{ter}$ O. erste Polare sein soll, so müssen die sämmtlichen Tangentialebenen längs ihrer Schnittcurve mit der Grundfläche einen Kegel umhüllen, dessen Spitze dann der Pol ist. Es bilden also auch alle ersten Polaren durch einen festen Punkt ein Netz und jedem solchen Netz von ersten Polaren entspricht eine Ebene als Ort der zugehörigen Pole. Endlich, da je zwei solche Netze einen Büschel gemein haben, nämlich denjenigen, welchem die Schnittlinie ihrer Polebenen entspricht; bilden die sämmtlichen ersten Polaren ein lineares Flächensystem $(n-1)^{ter}$ O. und dritter Stufe.

Für eine F_2^3 im gewöhnlichen R_3 zeigen wir schon jetzt leicht, dass die Polebene aller durch einen Punkt P gehenden ersten Polaren die $3-1=2^{te}$ Polare ${}^2P^1$ ist. Wissen wir doch aus 5. von den $3\cdot 2\cdot 1$ Berührungspunkten der 6 Hauptttangenten aus P, dass sie ihre ersten Polaren durch P schicken, und da nach 5. diese Punkte auch in der 2^{ten} Polarfläche liegen, so sind beide Ebenen nicht von einander verschieden. Für eine Fläche n^{ter} Ordnung folgt aber dasselbe, wenn wir sie nur $(n-1)^{ter}$ Dimension im R_n voraussetzen. Diese Ueberlegungen führen dann zu dem allgemeinen Satze:

6. *Alle ersten Polaren einer F_n^n im R_n, bilden ein lineares System n^{ter} Stufe; die sämmtlichen ersten Polaren, welche durch einen Punkt P*

gehen, bilden ein lineares System $(n-1)^{\text{ter}}$ *Stufe und die zugehörigen Pole liegen auf einer Ebene, der* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Polare* ${}^{n-1}P^1_{n-1}$ *von P, und umgekehrt, alle* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Polaren der Punkte einer ersten Polare gehen durch den Pol dieser Fläche, — oder kurz: Geht die erste Polare* ${}^1P^{n-1}_{n-1}$ *von P durch Q, so geht die* $(n-1)^{\text{te}}$ *Polare* ${}^{(n-1)}Q^1_{n-1}$ *von Q durch P und umgekehrt.*

Die Richtigkeit dieses Satzes für einen Raum niederer Dimension erhellt nach pag. 560 durch „Schneiden“ mit einem solchen, welcher durch den Pol geht.

Rückt nun P mit Q zusammen, so hat man specieller: Geht die erste Polare durch ihren Pol, so thut es auch die $(n-1)^{\text{te}}$, und umgekehrt, dann aber ist es, wie durch folgende Betrachtung einleuchtet, mit allen übrigen der Fall. Enthält nämlich irgend eine r^{te} Polare ihren Pol, so gehen nach 2. ebenfalls durch ihn die $(r+1)^{\text{te}}$, $(r+2)^{\text{te}}$ $\cdots (n-1)^{\text{te}}$, und folglich nach dem soeben ausgesprochenen Satze auch die erste, und dann — wiederum nach 2. — auch alle folgenden, d. h.

7. *Geht irgend eine Polare durch ihren Pol, so thun es alle übrigen desselben Poles, sowie die Grundcurve* (wie sofort gezeigt werden soll) *auch.*

Dass in diesem Falle die Grundcurve durch den Pol geht, ergiebt sich mit Hilfe des Chasles'schen Correspondenzsatzes. Sei nämlich G^n eine Punktgruppe auf einer Geraden R_1, und ${}^1P^{n-1}$ die erste Polare eines Pols P, so hat man auf der Geraden die Correspondenz $(n-1, 1)$ mit $(n-1)+1=n$ Coincidenzpunkten. Aber diese Anzahl wird schon durch G^n absorbirt, es geschieht also sonst nirgendwo, dass ein Pol auf seiner Polare liege.

Es ist nun leicht die Anzahl x der Pole anzugeben, welche einer $(n-r)^{\text{ten}}$ Polare ${}^{n-r}P^r$ von G^n zukommen. In der Correspondenz (r, x) sind nur die Grundpunkte Coincidenzpunkte, folglich ist

$$r+x=n$$
$$x=n-r.$$

Der $(n-r)^{\text{ten}}$ Polare kommen also auch $n-r$ Pole zu.

Lässt man nun die Gerade um einen der Punkte P der $(n-r)^{\text{ten}}$ Polare einer F^n_{m-1} im R_m sich drehen, so erhält man in jeder Lage $n-r$ Pole, d. h. dieselben erfüllen eine Fläche der $(n-r)^{\text{ten}}$ Ordnung und diese ist mit Rücksicht auf 5 die r^{te} Polare von P. D. h.

8. *Geht die* r^{te} *Polare eines Punktes P durch einen Punkt Q, so geht die* $(n-r)^{\text{te}}$ *Polare von Q durch P.*

Hiermit können wir füglich unsere Untersuchung schliessen, da aus diesem Satze die Theorie in bekannter Weise rein geometrisch weiter geführt werden kann.

Schlussbetrachtung.

Mit der Einführung des Begriffs einer Fläche n^{ter} Ordnung, als einer Fläche, welche von jeder Geraden in n Punkten getroffen wird, ist die Richtigkeit des Fundamentalsatzes der Algebra sofort vorausgesetzt, von dem dann das Bezout'sche Theorem und das Chasles'sche Correspondenzprincip nur geometrische Einkleidungen sind. Vom letztern wird bei den vorstehenden Entwickelungen in vollem Umfange Gebrauch gemacht; hingegen sind die aus dem erstern sich ergebenden Ordnungszahlen der auftretenden Schnittcurven, Tangentenkegel etc. für die Bestimmung der Polaren selbst nicht von Belang. Vielmehr werden aus der analytischen Geometrie nur die Sätze:

1) Durch die Schnittcurve zweier Flächen derselben Ordnung gehen unendlich viele, ein Büschel von Flächen, jede dieser Flächen ist durch einen weitern Punkt, durch den sie gehen soll, bestimmt (pag. 558);

2) Gehen durch den Schnitt einer Fläche n^{ter} Ordnung mit zwei Flächen m^{ter} Ordnung, wo $m < n$, unendlich viele Flächen m^{ter} Ordnung, so bilden diese ein Büschel (pag. 562);

3) Durch die Schnittcurve einer Fläche n^{ter} Ordnung mit einer Fläche m^{ter} Ordnung wo $m < n$ geht nur die *eine* Fläche m^{ter} Ordnung oder allgemein, für beliebig ausgedehnte Räume, — durch die Schnittcurve von r Flächen der bez. Ordnungen $n_1 > n_2 > n_3 \dots > n_r$ geht nur die eine Fläche n_r^{ter} Ordnung (pag. 561);

herüber genommen. Dieselben reichen aus bis zum Beweise des ersten Theils vom Satze 7, erst beim Nachweise des zweiten Theils:

Geht irgend eine Polare durch den Pol, so liegt derselbe auch auf der Grundfläche;

wurde das Correspondenzprinzip herangezogen. Auch dieser Satz hätte sich zwar noch ohne jenes Princip ableiten lassen; da dasselbe jedoch später nicht entbehrt werden konnte, so wurde es sofort zur Hülfe genommen.

Der Beweis besteht nun in Folgendem. Angenommen, die Polaren einer F_n^n im R_{n+1} gehen durch den *nicht auf der Fläche liegenden Pol.* Der Schnitt des Systems der Grundfläche und ihrer Polaren mit dem linearen R_n der letzten Polare, giebt dann eine F_{n-1}^n, deren sämmtliche Polaren, mit Ausnahme der letzten, durch den Pol gehen, während die letzte völlig unbestimmt ist. Auf der letzten Polare befindet sich nun nach 4. eine ganze Curve von einer Dimension, bestehend aus Punkten, in denen Kegelerzeugende n-punktig berühren, da die letzte Polare, welche im Allgemeinen die $n!$ solcher Punkte ausschneidet, unbestimmt ist. Es folgt aber aus der mitgetheilten Construction der Polaren, dass in einer Gruppe von n

consecutiven Punkten, *so lange der Pol nicht selbst in sie hineinrückt*, auch alle Polaren vereinigt sind. Also auch von der letzten Polare giebt es unendlich viele bestimmte Punkte. Die Annahme war also unmöglich, der Pol muss auf der Grundfläche liegen. Damit ist dann zugleich für den Specialfall der Correspondenz $(n-1, 1)$ der Nachweis ihrer n Coincidenzpunkte geführt. Schreiben wir

$$f(n-1, 1) = n.$$

Bezeichnet weiter x die Anzahl der Pole einer $(n-r)^{\text{ten}}$ Polare, so ist auch

$$f(r, x) = n$$

und zwar muss die Function „f" für alle ganzzahligen Werthe von $r < n$ auch ganze x liefern. Stellt man nun als Axiom hin, dass die Function algebraisch und symmetrisch in Bezug auf r und x sei, so folgt auch, dass sie linear sei; denn für alle Ausdrücke höhern als ersten Grades lassen sich stets Werthe von r angeben, deren zugehörige x *nicht* ganzzahlig sind. Folglich:

$$f(r, x) = r + x = n,$$

worin das Correspondenzprincip liegt.

Hannover, den 9. Mai 1885.

Bemerkung zur Theorie des Doppelintegrales.

(Auszug aus einem Schreiben an Herrn F. Klein.)

Von

Axel Harnack in Dresden.

Im ersten Heft dieses Bandes der Annalen behandelt Herr Stolz einige Sätze über das Doppelintegral, wobei insbesondere die Berechnung desselben durch zwei aufeinander folgende Integrationen erörtert wird. Herr Stolz giebt dafür den folgenden Satz (pag. 93):

„Wenn die endliche Function $f(x, y)$ in dem Gebiete F (das eine convexe Fläche mit den äussersten Abscissen $a < a'$ und den äussersten Ordinaten $b < b'$ sein möge) ein eigentliches Doppelintegral J zulässt *und* wenn $f(x, y)$ als Function von x auf jeder zur X-Axe parallelen Sehne von F (mit Ausnahme allenfalls der einem Systeme von Werthen Y, das im Intervalle (b, b') den Inhalt 0 hat, entsprechenden Sehnen) integrirbar ist, so ist die auf solche Art erhaltene Funktion von y

$$\Phi(y) = \int_{x'}^{x''} f(x, y)\,dx,$$

wo $x'x''$ die Abscissen der zur Ordinate y gehörigen Punkte des Randes von F bedeuten, im Intervalle (b, b') integrirbar und zwar hat man

$$\int_{b}^{b'} \Phi(y)\,dy = J."$$

Die zweite Bedingung motivirt der Verfasser damit, dass aus der Existenz eines Doppelintegrales nicht hervorgehe, dass $f(x, y)$ bloss für discrete Werthe von y hinsichtlich x nicht integrirbar zu sein brauche, dass also eine darauf bezügliche Bemerkung in meinem Buche (Elemente der Differential- u. Integralrechnung, p. 313) unrichtig sei.

Da dieser Einwand auf einem Missverständniss beruht, und da durch die zweite Bedingung des Herrn Stolz der Inhalt des Satzes wesentlich eingeschränkt wird, bitte ich mir eine kurze Erörterung meiner Behauptung und ihrer Folge zu gestatten.

An der citirten Stelle habe ich gesagt, das Integral kann nur für eine discrete Mannigfaltigkeit von Werthen seine Bedeutung verlieren. Dieser kurze Ausdruck erschien mir bei einer beiläufigen Bemerkung, die sich in einer Parenthese befindet, statthaft, weil dort der allgemeinste Fall von dem Beweise eigentlich ausgeschlossen war (siehe die Bemerkung pag. 311 unten), und weil ich damit nur andeuten wollte, dass die Methode, welche ich für beschränkende Voraussetzungen ausführte, auch für den allgemeinen Fall anwendbar bleibt. Genau gesprochen muss es heissen: *Nur für eine discrete Mannigfaltigkeit von Werthen wird das Integral derart unbestimmt, dass die Differenz seiner Unbestimmtheitsgrenzen oberhalb irgend einer bestimmten, beliebig kleinen Grösse liegt.*

Auf diesem Satz beruht die Möglichkeit, jedes Doppelintegral auf zwei successive Integrationen nach x und nach y zurückzuführen, sobald nur die Randcurve des Gebietes von keiner Parallelen zu den Coordinatenaxen in unendlich vielen Punkten geschnitten wird; denn dieser Umstand würde zum mindesten eine besondere Untersuchung nothwendig machen.

Indem ich hinsichtlich des vollständigen Beweises auf den zweiten Band meiner Bearbeitung des Lehrbuches von Serret (pag. 282) verweise, woselbst ich die früher gegebenen Andeutungen ausgeführt habe, will ich hier nur den erwähnten Hilfssatz beweisen, der dort nicht mehr explicite vorkommt.

Aus der Existenz des Doppelintegrales

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy$$

geht hervor, dass sich alle die Stellen, an denen die Schwankungen $G - g$ der Function $f(x, y)$ grösser sind als eine bestimmte beliebig kleine Grösse, in eine endliche Anzahl von Theilgebieten einschliessen lassen, deren Summe beliebig klein gemacht werden kann. Es ist dann

$$\lim \sum\sum (G - g)\, \Delta x\, \Delta y = 0.$$

Auch wenn man längs des Randes die durch die Randcurve zerschnittenen Rechtecke mit dem Werth $\Delta x\, \Delta y$ in diese Summe einführt, gilt diese Grenzgleichung. Betrachtet man nun bei einem bestimmten Werth von y das Integral

$$\int_{x'}^{x''} f(x, y)\, dx,$$

welches sich von dem einen zu y gehörigen Randpunkt x' bis zum anderen x'' erstreckt, so liegt der Werth dieses Integrals zwischen den Grenzen $\Sigma G \Delta x$ und $\Sigma g \Delta x$. Man erhält dieselben, indem man

das Intervall von x' bis zu x'' in beliebig kleine Theilintervalle Δx eintheilt, und mit G und g jedesmal den grössten und kleinsten Werth bezeichnet, welchen $f(x, y)$ im Innern oder an den Grenzen solch eines Theilintervalles erhält. Diese beiden Werthe seien mit $G_y = \Sigma G \Delta x$ und $g_y = \Sigma g \Delta x$ bezeichnet; durch Verkleinerung von Δx können sie einander bis zu einem gewissen Werth genähert werden. Der schliessliche Unterschied ist die Unbestimmtheitsgrenze des Integrales; sie werde mit U_y bezeichnet. Unsere Behauptung besagt nun, dass alle die Stellen y, an denen U_y grösser ist als eine bestimmte endliche Grösse, eine discrete Mannigfaltigkeit bilden. Wäre dieses nicht der Fall, so könnte $\Sigma U_y \Delta y$ nicht beliebig klein gemacht werden. Dann könnte aber auch

$$\sum \Delta y \sum (G - g) \Delta x$$

nicht beliebig klein werden; denn es ist

$$\sum (G - g) \Delta x \geq U_y.$$

Das Beispiel von Herrn du Bois Reymond, auf welches Herr Stolz verweist, ist eine Bestätigung meines Satzes in dem hier erläuterten Sinne. Vor allem wichtig aber erscheint mir, dass man an dem Ergebniss festhalten kann, das überdies auch schon vor meinen Untersuchungen, wie ich glaube, volle Geltung hatte: *Ein jedes Doppelintegral ist bei endlichem Werthe der Function und bei hinreichend einfacher Gestalt der Randcurve auf zwei successive Integrationen zurückführbar.*

6. September 1885.

Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind.

Von

Martin Krause in Rostock.

Im Folgenden soll die Theorie der Thetafunctionen zweier Veränderlichen behandelt werden, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind. Zunächst sollen die Haupteigenschaften und die Parameterdarstellung derselben gegeben werden, dann die Fälle $n = 3$ und $n = 5$ näher durchgeführt werden. Es ergeben sich hierbei eine Reihe neuer Beziehungen zwischen den eingeführten Thetafunctionen, deren Argumente Null sind. Hieran soll sich die Entwickelung einer Reihe allgemeinerer Relationen schliessen und diese dazu gebraucht werden, um die Fourier'schen Reihen für die Potenzen und Producte der gewöhnlichen Thetafunctionen in einfacher Weise darzustellen. Soweit dem Verfasser bekannt, sind diese Untersuchungen neu. Endlich sollen dann die Prym-Krazer'schen Thetarelationen auf eine directe und einfache Art entwickelt werden.

§ 1.

Einführung der allgemeinen Thetafunctionen. Eigenschaften und Parameterdarstellung derselben.

Wir definiren:

$$(1)\qquad \vartheta_\alpha\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_\alpha\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_\alpha\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v)) =$$

$$e^{\sum_1^2 \frac{\pi i g_e}{n}\left(2v_e + 2\frac{h_e}{n} + \frac{g_1}{n}\tau_{1e} + \frac{g_2}{n}\tau_{2e}\right)} \vartheta_\alpha\left(v_1 + \frac{g_1\tau_{11} + g_2\tau_{12} + h_1}{n},\ v_2 + \frac{g_1\tau_{12} + g_2\tau_{22} + h_2}{n}\right),$$

wobei α den Index einer beliebigen gewöhnlichen Thetafunction bedeutet. Dann lauten für den Index 5 die Fundamentalgleichungen (2):

$$\vartheta_5\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(v_1+1,v_2)=e^{\frac{2g_1\pi i}{n}}\,.\,\vartheta_5\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(v_1,v_2),$$

$$\vartheta_5\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(v_1,v_2+1)=e^{\frac{2g_2\pi i}{n}}\,.\,\vartheta_5\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(v_1,v_2),$$

$$\vartheta_5\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(v_1+\tau_{11},v_2+\tau_{12})=e^{\frac{-2h_1\pi i}{n}}\,.\,\vartheta_5\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(v_1,v_2)\,e^{-\pi i(2v_1+\tau_{11})},$$

$$\vartheta_5\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(v_1+\tau_{12},v_2+\tau_{22})=e^{\frac{-2h_2\pi i}{n}}\,.\,\vartheta_5\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(v_1,v_2)\,e^{-\pi i(2v_2+\tau_{22})},$$

$$\vartheta_5\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}\left(v_1+\frac{g_1'\tau_{11}+g_2'\tau_{12}+h_1'}{n},\,v_2+\frac{g_1'\tau_{12}+g_2'\tau_{22}+h_2'}{n}\right)$$
$$=e^{\frac{-\pi i}{n}\sum\limits_1^2 g_\varepsilon'(2v_\varepsilon+2h_\varepsilon+2h_\varepsilon'+g_1'\tau_{1\varepsilon}+g_2'\tau_{2\varepsilon})}\;\vartheta_5\begin{bmatrix}g+g'\\h+h'\end{bmatrix}(v_1,v_2).$$

Hierzu kommen dieselben Differentialgleichungen, wie bei den gewöhnlichen Thetafunctionen. Bei der Vermehrung um halbe Perioden gehen die Functionen mit dem Index 5 in die Functionen mit anderen Indices über. Der Uebergang ist der analoge, wie bei den gewöhnlichen Thetafunctionen, nur treten noch $2n^{\text{te}}$ Einheitswurzeln als Factoren hinzu und zwar bei der Vermehrung von v_1, v_2 um resp.

$$-\frac{1}{2},\,0;\;0,\,-\frac{1}{2};\;-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2};\;\frac{\tau_{11}}{2},\,\frac{\tau_{12}}{2};\;\frac{\tau_{12}}{2},\,\frac{\tau_{22}}{2};\;\frac{\tau_{11}+\tau_{12}}{2};\;\frac{\tau_{12}+\tau_{22}}{2};$$
$$\frac{\tau_{11}}{2}-\frac{1}{2},\,\frac{\tau_{12}}{2};\;\frac{\tau_{11}}{2},\,\frac{\tau_{12}}{2}-\frac{1}{2};\;\frac{\tau_{11}}{2}-\frac{1}{2},\,\frac{\tau_{12}}{2}-\frac{1}{2},\;\frac{\tau_{12}}{2}-\frac{1}{2},\,\frac{\tau_{22}}{2};$$
$$\frac{\tau_{12}}{2},\,\frac{\tau_{22}}{2}-\frac{1}{2};\;\frac{\tau_{11}}{2}+\frac{\tau_{12}}{2}-\frac{1}{2},\,\frac{\tau_{12}}{2}+\frac{\tau_{22}}{2};\;\frac{\tau_{12}}{2}-\frac{1}{2},\,\frac{\tau_{22}}{2}-\frac{1}{2};$$
$$\frac{\tau_{11}}{2}+\frac{\tau_{12}}{2},\,\frac{\tau_{12}}{2}+\frac{\tau_{22}}{2}-\frac{1}{2};\;\frac{\tau_{11}}{2}+\frac{\tau_{12}}{2}-\frac{1}{2},\,\frac{\tau_{12}}{2}+\frac{\tau_{22}}{2}-\frac{1}{2}$$

der Factor

$$e^{-\frac{\pi i\omega}{n}},$$

wobei ω resp. gleich ist:

$$g_1;\;g_2;\;g_1+g_2;\;h_1;\;h_2;\;h_1+h_2;\;g_1+h_1;\;g_2+h_1;\;g_1+g_2+h_1;$$
$$g_1+h_2;\;g_2+h_2;\;g_1+h_1+h_2;\;g_1+g_2+h_2;\;g_2+h_1+h_2;$$
$$g_1+g_2+h_1+h_2.$$

Die noch fehlenden Beziehungen sind aus den aufgestellten leicht abzuleiten. Es sind hiermit diejenigen Thetafunctionen eingeführt, deren Charakteristiken sich aus $2n^{\text{tel}}$ ganzer Zahlen zusammensetzen. n soll von vornherein als ungerade Zahl angenommen werden.

Aus den soeben definirten Thetafunctionen lassen sich dann auf unendlich mannigfache Arten Thetafunctionen n^{ter} Ordnung bilden. Derartige Functionen sind z. B. die n^{ten} Potenzen einer jeden Function, die Producte zu je n:

$$\prod \vartheta_\alpha \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} ((v)),$$

bei denen

$$\sum g_1 \equiv \sum g_2 \equiv \sum h_1 \equiv \sum h_2 \equiv 0 \bmod. n$$

ist u. s. f.

Solche Thetafunctionen n^{ter} Ordnung können aber nach bekannten Regeln durch die gewöhnlichen Thetafunctionen ausgedrückt werden. Greifen wir z. B. die gerade Function heraus:

$$\vartheta_5\left(v_1 + \frac{1}{n},\, v_2 + \frac{1}{n}\right)^n + \vartheta_5\left(v_1 + \frac{n-1}{n},\, v_2 + \frac{n-1}{n}\right)^n$$
$$= \vartheta_5\left(\left(v + \frac{1}{n}\right)\right)^n + \vartheta_5\left(\left(v + \frac{n-1}{n}\right)\right)^n = f(v_1, v_2),$$

so genügt dieselbe der Gleichung:

$$f(v_1, v_2) = \sum x_\varepsilon \cdot \vartheta_5((v))^{\varepsilon_1} \cdot \vartheta_1((v))^{\varepsilon_2} \cdot \vartheta_{02}((v))^{\varepsilon_3} \cdot \vartheta_{34}((v))^{\varepsilon_4}, \tag{3}$$

wobei:

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = n \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_4 \equiv \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \equiv 0 \bmod. 2 \quad \varepsilon_4 < 4$ ist.

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich aus dieser Gleichung 15 weitere, die die Form haben:

$$\vartheta_\alpha\left(\left(v + \frac{1}{n}\right)\right)^n + \vartheta_\alpha\left(\left(v + \frac{n-1}{n}\right)\right)^n$$
$$= \sum x_\varepsilon \cdot i^{\eta_\varepsilon} \cdot \vartheta_{\eta_1}((v))^{\varepsilon_1} \cdot \vartheta_{\eta_2}((v))^{\varepsilon_2} \cdot \vartheta_{\eta_3}((v))^{\varepsilon_3} \cdot \vartheta_{\eta_4}((v))^{\varepsilon_4}.$$

Wir dividiren diese Gleichungen durch $\vartheta_5((v))^n$ und setzen an Stelle der linken Seiten resp.:

$$\frac{\vartheta_\alpha\left(\left(v+\frac{1}{n}\right)\right)^n}{\vartheta_5\left(\left(v+\frac{1}{n}\right)\right)^n} \cdot \frac{\vartheta_5\left(\left(v+\frac{1}{n}\right)\right)^n}{\vartheta_5((v))^n} + \frac{\vartheta_\alpha\left(\left(v+\frac{n-1}{n}\right)\right)^n}{\vartheta_5\left(\left(v+\frac{n-1}{n}\right)\right)^n} \cdot \frac{\vartheta_5\left(\left(v+\frac{n-1}{n}\right)\right)^n}{\vartheta_5((v))^n}.$$

Führen wir dann die Argumente der hyperelliptischen Functionen ein, genau so wie es in einer Arbeit des Verfassers im 3ten Bande der Acta mathematica geschehen ist, indem wir setzen:

$$u_1 = K_{11} \cdot v_1 + K_{12} \cdot v_2,$$
$$u_2 = K_{31} \cdot v_1 + K_{22} \cdot v_2,$$

so nehmen die Gleichungen bei bekannter Bezeichnungsweise die Form an:

$$(7)\qquad al_\alpha\left(u_1+\frac{K_{11}+K_{12}}{n},\ u_2+\frac{K_{21}+K_{22}}{n}\right)^n\cdot al_\alpha\frac{\vartheta_5\left(\left(v+\frac{1}{n}\right)\right)^n}{\vartheta_5((v))^n}$$

$$+\,al_\alpha\left(u_1+(n-1)\frac{K_{11}+K_{12}}{n},\ u_2+(n-1)\frac{K_{21}+K_{22}}{n}\right)^n\cdot\frac{\vartheta_5\left(\left(v+\frac{n-1}{n}\right)\right)^n}{\vartheta_5((v))^n}$$

$$=\sum x_s\, i^{\eta_s}\cdot al_{\eta_1}((u))^{\varepsilon_1}\cdot al_{\eta_2}((u))^{\varepsilon_2}\cdot al_{\eta_3}((u))^{\varepsilon_3}\cdot al_{\eta_4}((u))^{\varepsilon_4}.$$

In diesen 16 Gleichungen sind die Grössen x_s, deren Zahl $\frac{n^2+1}{2}$ beträgt, Constanten, die durch Reihenentwickelungen der hyperelliptischen Functionen auf der rechten und linken Seite auf unendlich mannigfaltige Weise bestimmt werden können. Sie setzen sich rational aus den Thetafunctionen zusammen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen und deren Argumente Null sind. Zwischen diesen Grössen selbst ergeben sich unendlich viele Beziehungen. Mit Rücksicht auf die Parameterdarstellung der gewöhnlichen Thetafunctionen ergiebt sich hieraus die Parameterdarstellung der von uns eingeführten Thetafunctionen. Wir erhalten dabei das Resultat, *dass der Quotient je zweier unserer Functionen sich mit Hülfe einer n^{ten} und Quadratwurzeln aus zwei von einander unabhängigen Grössen darstellen lassen muss.*

§ 2.
Der Fall $n = 3$.

Wir nehmen jetzt den speciellen Fall $n = 3$.

Für denselben wird:

$$(1)\qquad \vartheta_5\left(\left(v+\tfrac{1}{3}\right)\right)^3+\vartheta_5\left(\left(v+\tfrac{2}{3}\right)\right)^3=x_1.\vartheta_5((v))^3+x_2.\vartheta_5((v)).\vartheta_1((v))^2$$
$$+x_3.\vartheta_5((v)).\vartheta_{02}((v))^2+x_4.\vartheta_5((v)).\vartheta_{34}((v))^2$$
$$+x_5.\vartheta_1((v)).\vartheta_{02}((v)).\vartheta_{34}((v)).$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich für die Nullwerthe der Argumente folgende Gleichungen (2)

$$2\cdot\vartheta_5\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3=x_1.\vartheta_5^3+x_4.\vartheta_5.\vartheta_{34}^2,\quad 2\vartheta_{34}\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3=x_1.\vartheta_{34}^3+x_4.\vartheta_{34}.\vartheta_5^2,$$

$$-2.\vartheta_{03}\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3=x_1.\vartheta_{03}^3+x_3.\vartheta_{03}.\vartheta_{23}^2,\quad 2\vartheta_{23}\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3=x_1.\vartheta_{23}^3-x_3.\vartheta_{23}.\vartheta_{03}^2,$$

$$-2.\vartheta_4\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3=x_1.\vartheta_4^3-x_2.\vartheta_4.\vartheta_{14}^2,\quad 2\vartheta_{14}\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3=x_1.\vartheta_{14}^3+x_2.\vartheta_{14}.\vartheta_4^2,$$

$$2.\vartheta_0\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3=x_1.\vartheta_0^3+x_2.\vartheta_0.\vartheta_{01}^2+x_3.\vartheta_0.\vartheta_2^2+x_4.\vartheta_0.\vartheta_{12}^2$$
$$+x_5.\vartheta_{01}.\vartheta_2.\vartheta_{12},$$

$$-2.\vartheta_{01}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3 = x_1.\vartheta_{01}^3 - x_2.\vartheta_{01}.\vartheta_0^2 - x_3.\vartheta_{01}.\vartheta_{12}^2 + x_4.\vartheta_{01}.\vartheta_2^2 - x_5.\vartheta_0.\vartheta_2.\vartheta_{12},$$

$$-2.\vartheta_2\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3 = x_1.\vartheta_2^3 - x_2.\vartheta_2.\vartheta_{12}^2 - x_3.\vartheta_2.\vartheta_0^2 + x_4.\vartheta_2.\vartheta_{01}^2 - x_5.\vartheta_{01}.\vartheta_0.\vartheta_{12},$$

$$2.\vartheta_{12}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3 = x_1.\vartheta_{12}^3 + x_2.\vartheta_{12}.\vartheta_2^2 + x_3.\vartheta_{12}.\vartheta_{01}^2 + x_4.\vartheta_{12}.\vartheta_0^2 + x_5.\vartheta_{01}.\vartheta_2.\vartheta_0.$$

Hieraus ergeben sich die Werthe der Constanten:

$$x_1 = \frac{2\cdot\vartheta_{34}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_{34} - 2\cdot\vartheta_5\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_5}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4},$$

$$x_2 = \frac{2\cdot\vartheta_{14}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_4^3 + 2\cdot\vartheta_4\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_{14}^3}{\vartheta_4\cdot\vartheta_{14}\cdot(\vartheta_4^4 + \vartheta_{14}^4)},$$

$$x_3 = -\frac{2\cdot\vartheta_{03}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_{23}^3 + 2\cdot\vartheta_{23}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_{03}^3}{\vartheta_{03}\cdot\vartheta_{23}(\vartheta_{23}^4 + \vartheta_{03}^4)},$$

$$x_4 = \frac{2\cdot\vartheta_5\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_{34}^3 - 2\cdot\vartheta_{34}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_5^3}{\vartheta_5\cdot\vartheta_{34}(\vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4)}.$$

Die Constante x_5 ist aus einer der vier letzten Gleichungen des Systemes (2) bestimmt. Zu gleicher Zeit ergeben sich die Thetarelationen:

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&-\vartheta_{03}\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_{03} + \vartheta_{23}\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_{23} + \vartheta_{34}\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_{34} = \vartheta_5\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_5,\\
&-\vartheta_{01}\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_{01} + \vartheta_{12}\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_{12} + \vartheta_{14}\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_{14} = \vartheta_5\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_5,\\
&-\vartheta_4\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_4 + \vartheta_{14}\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_{14} + \vartheta_{34}\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_{34} = \vartheta_5\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_5,\\
&\vartheta_0\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_0 - \vartheta_{01}\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_{01} = x_1\cdot(\vartheta_0^4 + \vartheta_{01}^4) - x_3\cdot\vartheta_{03}^2\cdot\vartheta_{23}^2\\
&\qquad + x_4\cdot\vartheta_5^2\cdot\vartheta_{34}^2,\\
&\vartheta_0\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_0 - \vartheta_2\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_2 = x_1\cdot(\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4) + x_2\cdot\vartheta_4^2\cdot\vartheta_{14}^2\\
&\qquad + x_4\cdot\vartheta_5^2\cdot\vartheta_{34}^2,\\
&\vartheta_0\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_0 - \vartheta_{12}\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^3\cdot\vartheta_{12} = x_1\cdot(\vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4) + x_2\cdot\vartheta_4^2\cdot\vartheta_{14}^2\\
&\qquad - x_3\cdot\vartheta_{03}^2\cdot\vartheta_{23}^2.
\end{aligned}\right.$$

Durch Differentiiren ergiebt sich für die Nullwerthe der Argumente, — was links durch den Index 0 angedeutet werden soll — das Gleichungssystem (4):

$$\frac{2}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_3\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = \left(-x_3\cdot\vartheta_{14}^2+x_4\cdot\vartheta_4^2\right) a\,l'_3\,(u_i)_0 + x_5\cdot\vartheta_4\cdot\vartheta_{14}\cdot a\,l'_{13}(u_i)_0,$$

$$\frac{2}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_{13}\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = -\left(x_3\cdot\vartheta_4^2+x_4\cdot\vartheta_{14}^2\right) a\,l'_{13}\,(u_i)_0 + x_5\cdot\vartheta_4\cdot\vartheta_{14}\cdot a\,l'_3\,(u_i)_0,$$

$$\frac{2}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_{24}\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = \left(x_2\cdot\vartheta_{03}^2-x_4\cdot\vartheta_{23}^2\right) a\,l'_{24}\,(u_i)_0 + x_5\cdot\vartheta_{23}\cdot\vartheta_{03}\cdot a\,l'_{04}(u_i)_0,$$

$$\frac{2}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_{04}\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = \left(x_2\cdot\vartheta_{23}^2+x_4\cdot\vartheta_{03}^2\right) a\,l'_{04}\,(u_i)_0 + x_5\cdot\vartheta_{23}\cdot\vartheta_{03}\cdot a\,l'_{24}(u_i)_0,$$

$$\frac{\partial}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_{02}\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = \left(x_2\cdot\vartheta_{34}^2+x_3\cdot\vartheta_5^2\right) a\,l'_{02}\,(u_i)_0 + x_5\cdot\vartheta_5\cdot\vartheta_{34}\cdot a\,l'_1(u_i)_0,$$

$$\frac{2}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_1\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = \left(x_2\cdot\vartheta_5^2+x_3\cdot\vartheta_{34}^2\right) a\,l'_1(u_i)_0 + x_5\cdot\vartheta_5\cdot\vartheta_{34}\cdot a\,l'_{02}(u_i)_0.$$

Dabei ist:

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_\alpha\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0$$
$$=3a\,l_\alpha\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right)^2\cdot\vartheta_5\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2\left[\vartheta_5\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)\cdot a\,l'_\alpha\left(u_i+\frac{K}{3}\right)_0 + a\,l_\alpha\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right)\cdot\eta_i\right],$$

wenn gesetzt wird:

$$a\,l_\alpha\left(\frac{K_{11}+K_{12}}{3},\ \frac{K_{21}+K_{22}}{3}\right) = a\,l_\alpha\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left[a\,l_\alpha\left(u_1+\frac{K_{11}+K_{12}}{3},\ u_2+\frac{K_{21}+K_{22}}{3}\right)\right]_0 = a\,l'_\alpha\left(u_i+\frac{K}{3}\right)_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_5\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)\right]_0 = \eta_i.$$

Die beiden Grössen η_1 und η_2 sind als Unbekannte anzusehen, alle andern dagegen als bekannt.

Es enthalten die soeben aufgestellten 12 Gleichungen also linear zwei Unbekannte, so dass sie zehn neue Thetarelationen repräsentiren. Es soll dieses in folgender Weise übersichtlicher dargestellt werden. Wir setzen:

$$a_\alpha = a\,l'_\alpha\left(u_1+\frac{K}{3}\right)_0\cdot a\,l'_\alpha\,(u_2)_0 - a\,l'_\alpha\left(u_2+\frac{K}{3}\right)_0\cdot a\,l'_\alpha(u_1)_0$$

dann ist, wie sich nach leichten Rechnungen ergiebt:

$$a_1 = al'_{13}(u_1)_0 \cdot al'_3\,(u_2)_0 \cdot al_{13}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_3\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right),$$

$$a_3 = \mu_x^2 \cdot al'_{13}(u_1)_0 \cdot al'_1\,(u_1)_0 \cdot al_{13}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_1\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right),$$

$$a_{02} = al'_{24}(u_1)_0 \cdot al'_{04}(u_1)_0 \cdot al_{24}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_{04}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right),$$

$$a_{04} = -\lambda^2 \cdot al'_{02}(u_1)_0 \cdot al'_{24}(u_1)_0 \cdot al_{02}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_{24}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right),$$

$$a_{13} = al'_{13}(u_2)_0 \cdot al'_1\,(u_1)_0 \cdot al_3\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_1\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right),$$

$$a_{24} = -\lambda_1{}^2 \cdot al'_{02}(u_1)_0 \cdot al'_{04}(u_1)_0 \cdot al_{02}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_{04}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right),$$

$$a_1{}^{02} = -\frac{\vartheta_5}{\vartheta_{34}} \cdot al'_3\,(u_2)_0 \cdot al'_{13}(u_1)_0 \cdot al_4\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_{14}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right),$$

$$a'_{02} = -\frac{\vartheta_5}{\vartheta_{34}} \cdot al'_{24}(u_1)_0 \cdot al'_{04}(u_1)_0 \cdot al_{03}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_{23}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right),$$

$$a_3^{13} = -\frac{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{12}}{\vartheta_4{}^3 \cdot \vartheta_{34}^3 \cdot \vartheta_5{}^4}\Big(al_0\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_{03}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \vartheta_4{}^2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{34}$$
$$+ al_4\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_{34}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \vartheta_{01}^2 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_4\Big),$$

$$a_{13}^3 = \frac{\vartheta_{12} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{01}}{\vartheta_4{}^3 \cdot \vartheta_{34}^3 \cdot \vartheta_5{}^4}\Big(al_{01}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_{03}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \vartheta_4{}^2 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{34}$$
$$+ al_{14}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_{34}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \vartheta_0{}^2 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{03}\Big),$$

$$a_{04}^{24} = \frac{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{01}}{\vartheta_4{}^3 \cdot \vartheta_{34}^3 \cdot \vartheta_5{}^4}\Big(al_0\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_4\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \vartheta_5{}^2 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{34}$$
$$+ al_{02}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_{24}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \vartheta_2{}^2 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{03}\Big),$$

$$a_{24}^{04} = -\frac{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_0}{\vartheta_4{}^3 \cdot \vartheta_{34}^3 \cdot \vartheta_5{}^4}\Big(al_2\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_4\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \vartheta_5{}^2 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{34}$$
$$+ al_{02}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot al_{04}\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right) \cdot \vartheta_0{}^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{03}\Big).$$

Damit sind diese Grössen wirklich bestimmt. Wir wollen nun weiter setzen:

$$A_\alpha = \frac{6}{\vartheta_5}\,al_\alpha\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right)^2 \cdot \vartheta_5\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2\left[\vartheta_5\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right) \cdot a_\alpha + al_\alpha\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right)\left(\eta_1 \cdot al'_\alpha(u_2)_0 - \eta_2 \cdot al'_\alpha(u_1)_0\right)\right],$$

$$A_\alpha^\beta = \frac{6}{\vartheta_5}\,al_\alpha\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right)^2 \cdot \vartheta_5\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2\left[\vartheta_5\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)\,a_\alpha^\beta + al_\alpha\left(\left(\frac{K}{3}\right)\right)\left(\eta_1 \cdot al'_\beta(u_2)_0 - \eta_2 \cdot al'_\beta(u_1)_0\right)\right].$$

Dann können 6 der Gleichungen in die Form gebracht werden:

$$c_5 \cdot \lambda_\varkappa^2 \cdot \frac{\vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_5} = \varepsilon_\alpha \cdot A_\alpha, \tag{5}$$

wobei $\varepsilon_\alpha = +1$ ist, wenn α gleich 1, 3, 24 ist, dagegen gleich -1, wenn α die Werthe 13, 04, 02 annimmt. Die übrigen sechs haben die Form:

$$(6)\quad \begin{cases} A_3^{13} = (x_3 \cdot \vartheta_{14}^2 - x_4 \cdot \vartheta_4^2) \dfrac{\lambda_\varkappa^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_5^2}, \\[2ex] A_{13}^3 = -(x_3 \cdot \vartheta_4^2 + x_4 \cdot \vartheta_{14}^2) \dfrac{\lambda_\varkappa^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_5^2}, \\[2ex] A_{24}^{04} = (-x_2 \cdot \vartheta_{03}^2 + x_4 \cdot \vartheta_{23}^2) \dfrac{\lambda_\varkappa^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5^2}, \\[2ex] A_{04}^{24} = -(x_2 \cdot \vartheta_{23}^2 + x_4 \cdot \vartheta_{03}^2) \dfrac{\lambda_\varkappa^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_5^2}, \\[2ex] A_{02}' = (x_2 \cdot \vartheta_{34}^2 + x_3 \cdot \vartheta_5^2) \dfrac{\lambda_\varkappa^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_5^2}, \\[2ex] A_1^{02} = -(x_2 \cdot \vartheta_5^2 + x_3 \cdot \vartheta_{34}^2) \dfrac{\lambda_\varkappa^2 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_5^2}. \end{cases}$$

Es möge nun an die Betrachtung der Function:

$$\vartheta_5\left(\left(v + \tfrac{1}{3}\right)\right)^3 + \vartheta_5\left(\left(v + \tfrac{2}{3}\right)\right)^3$$

noch die Betrachtung der Function:

$$\vartheta_5\left(\left(v + \tfrac{1}{3}\right)\right)^3 - \vartheta_5\left(\left(v + \tfrac{2}{3}\right)\right)^3$$

angeschlossen werden. Wir können jedenfalls setzen:

$$\begin{aligned} (7)\quad \vartheta_5\left(\left(x + \tfrac{1}{3}\right)\right)^3 - \vartheta_5\left(\left(v + \tfrac{2}{3}\right)\right)^3 &= x_6 \cdot \vartheta_{02}((v)) \cdot \vartheta_{24}((v)) \cdot \vartheta_{04}((v)) \\ + x_7 \cdot \vartheta_3((v)) \cdot \vartheta_1((v)) \cdot \vartheta_{13}((v)) &+ x_8 \cdot \vartheta_{34}((v)) \cdot \vartheta_{23}((v)) \cdot \vartheta_{24}((v)) \\ &+ x_9 \cdot \vartheta_{34}((v)) \cdot \vartheta_{14}((v)) \cdot \vartheta_{13}((v)). \end{aligned}$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich für die Nullwerthe der Argumente folgende Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} 2 \cdot \vartheta_1\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3 = -x_6 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23}, \\[1ex] 2 \cdot \vartheta_3\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3 = x_6 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12} - x_8 \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{01}, \\[1ex] 2 \cdot \vartheta_{02}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3 = x_7 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4, \\[1ex] 2 \cdot \vartheta_{04}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3 = -x_7 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_2 - x_9 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_2, \end{cases}$$

$$(8)\quad\begin{cases} 2\cdot\vartheta_{13}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3 = -x_6\cdot\vartheta_4\cdot\vartheta_0\cdot\vartheta_2 - x_8\cdot\vartheta_{14}\cdot\vartheta_{12}\cdot\vartheta_0 + x_9\cdot\vartheta_{14}\cdot\vartheta_{34}\cdot\vartheta_5, \\ 2\cdot\vartheta_{24}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3 = -x_7\cdot\vartheta_{01}\cdot\vartheta_{03}\cdot\vartheta_0 + x_8\cdot\vartheta_{23}\cdot\vartheta_{34}\cdot\vartheta_5 - x_9\cdot\vartheta_{23}\cdot\vartheta_{12}\cdot\vartheta_0. \end{cases}$$

Mithin erhalten wir folgende Werthe für die Constanten:

$$x_6 = -\frac{2\,.\,\vartheta_1\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{23}}, \qquad x_7 = \frac{2\,.\,\vartheta_{02}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3}{\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4},$$

$$x_8 = -\frac{2\,.\,\vartheta_3\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3.\,\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{23} + 2\,.\,\vartheta_1\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3.\,\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_{12}}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{01}},$$

$$x_9 = -\frac{2\,.\,\vartheta_{04}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3.\,\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_4 + 2\,.\,\vartheta_{02}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_2}{\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{14}}.$$

Zu gleicher Zeit ergeben sich die Thetarelationen:

$$(9)\quad\begin{cases} \vartheta_{13}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3 = \dfrac{\vartheta_1\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_{23}}{\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_2} + \dfrac{\vartheta_3\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3.\,\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_0}{\vartheta_4\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{01}} \\ \qquad - \dfrac{\vartheta_{04}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3.\,\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_5}{\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_2} - \dfrac{\vartheta_{02}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_5}{\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_4}, \\ \vartheta_{24}\left(\left(\frac{\ }{3}\right)\right)^3 = -\dfrac{\vartheta_1\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3.\,\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_5\,.\,\vartheta_{12}}{\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_4\,.\,\vartheta_2} - \dfrac{\vartheta_3\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3.\,\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{34}\,.\,\vartheta_5}{\vartheta_4\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_{01}} \\ \qquad + \dfrac{\vartheta_{04}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3.\,\vartheta_{23}\,.\,\vartheta_{12}\,.\,\vartheta_0}{\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_2} + \dfrac{\vartheta_{02}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_{14}\,.\,\vartheta_{34}}{\vartheta_{03}\,.\,\vartheta_{01}\,.\,\vartheta_4}. \end{cases}$$

Weitere Thetarelationen können durch Differenziren erhalten werden. Für die Nullwerthe der Argumente ergeben sich auf diese Weise folgende Gleichungen (10):

$$\frac{2}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_5\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = x_8\cdot\vartheta_{23}\cdot\vartheta_{34}\cdot a\,l'_{24}(u_i)_0 + x_9\cdot\vartheta_{34}\cdot\vartheta_{14}\cdot a\,l'_{13}(u_i)_0,$$

$$-\frac{2}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_0\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = x_6\cdot\vartheta_2\cdot\vartheta_4\cdot a\,l'_{13}(u_i)_0 + x_7\cdot\vartheta_{03}\cdot\vartheta_{01}\cdot a\,l'_{24}(u_i)_0$$
$$+ x_8\cdot\vartheta_{12}\cdot\vartheta_{14}\cdot a\,l'_{13}(u_i)_0 + x_9\cdot\vartheta_{12}\cdot\vartheta_{23}\cdot a\,l'_{24}(u_i)_0,$$

$$\frac{2}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_2\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = x_6\cdot\vartheta_0\cdot\vartheta_4\cdot a\,l'_{13}(u_i)_0 - x_7\cdot\vartheta_{23}\cdot\vartheta_{12}\cdot a\,l'_{04}(u_i)_0$$
$$+ x_8\cdot\vartheta_{01}\cdot\vartheta_4\cdot a\,l'_3(u_i)_0 - x_9\cdot\vartheta_{01}\cdot\vartheta_{03}\cdot a\,l'_{04}(u_i)_0,$$

$$\frac{2}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_4\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = x_6\cdot\vartheta_2\cdot\vartheta_0\cdot a\,l'_{13}(u_i)_0 + x_7\cdot\vartheta_{34}\cdot\vartheta_{14}\cdot a\,l'_{02}(u_i)_0$$
$$+ x_8\cdot\vartheta_2\cdot\vartheta_{01}\cdot a\,l'_3(u_i)_0,$$

$$\frac{2}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_{01}\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = \begin{aligned}[t] & x_6\cdot\vartheta_{12}\cdot\vartheta_{14}\cdot a\,l'_3\,(u_i)_0 + x_7\cdot\vartheta_0\cdot\vartheta_{03}\cdot a\,l'_{24}(u_i)_0 \\ & - x_8\cdot\vartheta_2\cdot\vartheta_4\cdot a\,l'_3\,(u_i)_0 + x_9\cdot\vartheta_2\cdot\vartheta_{03}\cdot a\,l'_{04}(u_i)_0, \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_{03}\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = \begin{aligned}[t] & -x_6\cdot\vartheta_{23}\cdot\vartheta_{34}\cdot a\,l'_1\,(u_i)_0 + x_7\cdot\vartheta_0\cdot\vartheta_{01}\cdot a\,l'_{24}(u_i)_0 \\ & + x_9\cdot\vartheta_2\cdot\vartheta_{01}\cdot a\,l'_{04}(u_i)_0, \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_{12}\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = \begin{aligned}[t] & -x_6\,\vartheta_{01}\cdot\vartheta_{14}\cdot a\,l'_3\,(u_i)_0 + x_7\cdot\vartheta_2\cdot\vartheta_{23}\cdot a\,l'_{04}(u_i)_0 \\ & + x_8\cdot\vartheta_0\cdot\vartheta_{14}\cdot a\,l'_{13}(u_i)_0 + x_9\cdot\vartheta_0\cdot\vartheta_{23}\cdot a\,l'_{24}(u_i)_0, \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_{14}\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = \begin{aligned}[t] & x_6\cdot\vartheta_{12}\cdot\vartheta_{01}\cdot a\,l'_3\,(u_i)_0 - x_7\cdot\vartheta_4\cdot\vartheta_{34}\cdot a\,l'_{02}(u_i)_0 \\ & + x_8\cdot\vartheta_0\cdot\vartheta_{12}\cdot a\,l'_{13}(u_i)_0 - x_9\cdot\vartheta_5\cdot\vartheta_{34}\cdot a\,l'_{13}(u_i)_0, \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_{23}\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = \begin{aligned}[t] & x_6\cdot\vartheta_{03}\cdot\vartheta_{34}\cdot a\,l'_1\,(u_i)_0 + x_7\cdot\vartheta_2\cdot\vartheta_{12}\cdot a\,l'_{04}(u_i)_0 \\ & - x_8\cdot\vartheta_5\cdot\vartheta_{34}\cdot a\,l'_{24}(u_i)_0 + x_9\cdot\vartheta_0\cdot\vartheta_{12}\cdot a\,l'_{24}(u_i)_0, \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\vartheta_5}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\vartheta_{34}\left(\left(v+\frac{1}{3}\right)\right)^3\right]_0 = \begin{aligned}[t] & x_6\cdot\vartheta_{23}\cdot\vartheta_{03}\cdot a\,l'_1\,(u_i)_0 - x_7\cdot\vartheta_4\cdot\vartheta_{14}\cdot a\,l'_{02}(u_i)_0 \\ & - x_8\cdot\vartheta_5\cdot\vartheta_{23}\cdot a\,l'_{24}(u_i)_0 - x_9\cdot\vartheta_5\cdot\vartheta_{14}\cdot a\,l'_{13}(u_i)_0. \end{aligned}$$

Da die Grössen η_1 und η_2, die in diesen Gleichungen enthalten sind, vermöge der früheren Betrachtungen als bekannt angesehen werden können, so repräsentiren diese Formeln zwanzig neue Thetarelationen.

§ 3.

Der Fall $n = 5$.

Wir kommen zu dem Falle $n = 5$. In demselben beschränken wir uns auf das eine Beispiel:

$$\vartheta_5\left(\left(v+\frac{1}{5}\right)\right)^5 + \vartheta_5\left(\left(v+\frac{4}{5}\right)\right)^5.$$

Dieser Ausdruck ist gleich:

$$\begin{aligned} (1)\quad & x_1.\vartheta_5((v))^3.\vartheta_1((v))^2 + x_2.\vartheta_5((v))^3.\vartheta_{02}((v))^2 + x_3.\vartheta_5((v))^3.\vartheta_{34}((v))^2 \\ & \qquad + x_4.\vartheta_5((v))^2.\vartheta_1((v)).\vartheta_{02}((v)).\vartheta_{34}((v)) \\ & + x_5.\vartheta_5((v)).\vartheta_1((v))^4 + x_6.\vartheta_5((v)).\vartheta_{02}((v))^4 + x_7.\vartheta_5((v)).\vartheta_{34}((v))^4 \\ & + x_8.\vartheta_5((v)).\vartheta_{02}((v))^2.\vartheta_{34}((v))^2 + x_9.\vartheta_5((v)).\vartheta_{34}((v))^2.\vartheta_1((v))^2 \\ & + x_{10}.\vartheta_5((v)).\vartheta_1((v))^2.\vartheta_{02}((v))^2 + x_{11}.\vartheta_1((v))^3.\vartheta_{02}((v)).\vartheta_{34}((v)) \\ & + x_{12}.\vartheta_1((v)).\vartheta_{02}((v))^3.\vartheta_{34}((v)) + x_{13}.\vartheta_1((v)).\vartheta_{02}((v)).\vartheta_{34}((v_3))^3. \end{aligned}$$

Mit Hülfe der Substitution halber Perioden ergeben sich hieraus die Werthe:

$$x_1 = \frac{2 \cdot \vartheta_{14}\left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5 \cdot \vartheta_{14}^3 + 2 \cdot \vartheta_4\left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5 \cdot \vartheta_4^3}{\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_{14}^2 \cdot (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)},$$

$$x_2 = \frac{-2 \cdot \vartheta_{03}\left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5 \cdot \vartheta_{03}^3 - 2 \cdot \vartheta_{23}\left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5 \cdot \vartheta_{23}^3}{\vartheta_{23}^2 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)},$$

$$x_3 = \frac{2 \cdot \vartheta_5\left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5 \cdot \vartheta_5^3 - 2 \cdot \vartheta_{34}\left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5 \cdot \vartheta_{34}^3}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_5^2 \cdot (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)},$$

$$x_5 = \frac{2 \cdot \vartheta_{14}\left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5 \cdot \vartheta_4 - 2 \cdot \vartheta_4\left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5 \cdot \vartheta_{14}}{\vartheta_4 \quad \vartheta_{14} \cdot (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)},$$

$$x_6 = \frac{-2 \cdot \vartheta_{03}\left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5 \cdot \vartheta_{23} + 2 \cdot \vartheta_{23}\left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5 \cdot \vartheta_{03}}{\vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23} \cdot (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)},$$

$$x_7 = \frac{2 \cdot \vartheta_{34}\left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5 \cdot \vartheta_5 - 2 \cdot \vartheta_5\left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5 \cdot \vartheta_{34}}{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_5 \cdot (\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4)}.$$

Wir setzen nun genau so wie im Falle $n = 3$

$$a_\alpha = al'_\alpha\left(u_1 + \frac{K}{5}\right)_0 \cdot al'_\alpha(u_2)_0 - al'_\alpha\left(u_2 + \frac{K}{5}\right)_0 \cdot al'_\alpha(u_1)_0,$$

$$a_\alpha^\beta = al'_\alpha\left(u_1 + \frac{K}{5}\right)_0 \cdot al'_\beta(u_2)_0 - al'_\alpha\left(u_2 + \frac{K}{5}\right)_0 \cdot al'_\beta(u_1)_0,$$

$$A_\alpha = \frac{10}{\vartheta_5} \cdot al_\alpha\left(\left(\frac{K}{5}\right)\right)^4 \cdot \vartheta_5\left(\left(\frac{K}{5}\right)\right)^4$$
$$\cdot \left(al_\alpha\left(\left(\frac{K}{5}\right)\right) \cdot \left(\eta_1 \cdot al'_\alpha(u_2)_0 - \eta_2 \cdot al'_\alpha(u_1)_0\right) + \vartheta_5\left(\left(\frac{K}{5}\right)\right) \cdot a_\alpha\right),$$

$$A_\alpha^\beta = \frac{10}{\vartheta_5} \cdot al_\alpha\left(\left(\frac{K}{5}\right)\right)^4 \cdot \vartheta_5\left(\left(\frac{K}{5}\right)\right)^4$$
$$\cdot \left(al_\alpha\left(\left(\frac{K}{5}\right)\right) \cdot \left(\eta_1 \cdot al'_\beta(u_2)_0 - \eta_2 \cdot al'_\beta(u_1)_0\right) + \vartheta_5\left(\left(\frac{K}{5}\right)\right) \cdot a_\alpha^\beta\right).$$

Es müssten diese Grössen zum Unterschiede von den im vorigen Paragraphen gebrauchten mit einem Index versehen werden, indessen glaubt der Verfasser hiervon absehen zu können. Die Grössen A_α und A_α^β enthalten dann die beiden Unbekannten η_1 und η_2 linear in sich, sind aber von diesen abgesehen völlig bekannt.

Mit ihrer Hülfe ergeben sich die Werthe der Constanten:

$$x_{11} = f \cdot \frac{A_1 \cdot \vartheta_5^2 + A_{02} \cdot \vartheta_{34}^2}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4}, \quad x_{12} = f \cdot \frac{A_{13} \cdot \vartheta_4^2 - A_3 \cdot \vartheta_{14}^2}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4},$$

$$x_{13} = -f \cdot \frac{A_{24} \cdot \vartheta_{23}^2 + A_{04} \cdot \vartheta_{03}^2}{\vartheta_5^{\,4} - \vartheta_{34}^4},$$

$$f = \frac{\vartheta_4^{\,2} \cdot \vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_5^{\,4}}{\vartheta_0 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{14}^2 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^{\,2}},$$

während die Grössen x_8, x_9, x_{10} sich aus den Gleichungen ergeben:

$$x_6 \cdot \vartheta_4^{\,4} + x_7 \cdot \text{[illegible]}^{4} + x_8 \cdot \vartheta_4^{\,2} \cdot \vartheta_{14}^2 = \frac{A_{13}^3 \cdot f_1}{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23}},$$

$$x_5 \cdot \vartheta_{23}^4 + x_7 \cdot \vartheta_{03}^4 + x_9 \cdot \vartheta_{03}^2 \cdot \vartheta_{23}^2 = \frac{A_{04}^{24} \cdot f_1}{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}}$$

$$x_5 \cdot \vartheta_{34}^4 + x_6 \cdot \vartheta_5^{\,4} + x_{10} \cdot \vartheta_5^{\,2} \cdot \vartheta_{34}^2 = \frac{A'_{02} \cdot f_1}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_{23}},$$

$$f_1 = \frac{\vartheta_{34}^3 \cdot \vartheta_4^{\,3} \cdot \vartheta_5^{\,5}}{\vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{14}}.$$

Dabei sind dann die beiden unbekannten Grössen η_1 und η_2 aus den Gleichungen bestimmt:

$$(2) \quad \begin{cases} A_1 \cdot \vartheta_5^{\,2} + A_{02} \cdot \vartheta_{34}^2 = A_{24} \cdot \vartheta_{03}^2 - A_{04} \cdot \vartheta_{23}^2, \\ A_3 \cdot \vartheta_{11}^2 - A_{13} \cdot \vartheta_4^{\,2} = A_1 \cdot \vartheta_{34}^2 + A_{02} \cdot \vartheta_5^{\,2}, \\ -A_{24} \cdot \vartheta_{23}^2 - A_{04} \cdot \vartheta_{03}^2 = A_{13} \cdot \vartheta_{14}^2 + A_3 \cdot \vartheta_4^{\,2}, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{(A_{04}^{24} - A_{24}^{04}) \cdot f_1}{\vartheta_5 \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_{14}} = -\dfrac{2 \cdot \vartheta_4 \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_4} + \dfrac{2 \cdot \vartheta_{14} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{14}} \\ \qquad + \dfrac{2 \cdot \vartheta_{34} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{34}} - \dfrac{2 \cdot \vartheta_5 \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_5}, \\ \dfrac{(A'_{02} - A_1^{02}) \cdot f_1}{\vartheta_4 \cdot \vartheta_{14} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03}} = -\dfrac{2 \cdot \vartheta_{03} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{03}} + \dfrac{2 \cdot \vartheta_{23} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{23}} \\ \qquad + \dfrac{2 \cdot \vartheta_4 \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_4} - \dfrac{2 \cdot \vartheta_{14} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{14}}, \\ \dfrac{(A_{13}^3 - A_1^{13}) \cdot f_1}{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_5 \cdot \vartheta_{34}} = -\dfrac{2 \cdot \vartheta_{03} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{03}} + \dfrac{2 \cdot \vartheta_{23} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{23}} \\ \qquad + \dfrac{2 \cdot \vartheta_{34} \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_{34}} - \dfrac{2 \cdot \vartheta_5 \left(\left(\frac{1}{5}\right)\right)^5}{\vartheta_5}. \end{cases}$$

Es sind dieses sechs Gleichungen, welche die beiden Unbekannten η_1, η_2 linear in sich enthalten. Dieselben repräsentiren also zu gleicher Zeit vier Thetarelationen.

§ 4.

Methoden zur Herstellung allgemeiner Thetabeziehungen. Die Fourier'schen Entwickelungen der Potenzen und Producte der Thetafunctionen.

Analog wie die in den vorigen Paragraphen behandelten Functionen können alle Thetafunctionen n^{ter} Ordnung betrachtet werden, die sich aus unseren Thetafunctionen bilden lassen. Ueberdies ist klar, dass auch zwischen mehreren derselben lineare Beziehungen existiren müssen, vorausgesetzt, dass dieselben als Thetafunctionen n^{ter} Ordnung betrachtet, dieselbe Characteristik besitzen. Die Constanten können nach angegebenen Methoden bestimmt werden. Diese Bestimmung wird in vielen Fällen durch folgende Sätze erleichtert:

1) Leistet eine Function von v_1 und v_2 den Bedingungsgleichungen Genüge:

$$(1)\quad \begin{cases} f\left(v_1+\frac{1}{n},\, v_2\right)=f(v_1,v_2), \quad f\left(v_1,\, v_2+\frac{1}{n}\right)=f(v_1,v_2), \\ f(v_1+\tau_{11},\, v_2+\tau_{12}) = e^{-n\pi i(2v_1+\tau_{11})}\cdot f(v_1,v_2), \\ f(v_1+\tau_{12},\, v_2+\tau_{22}) = e^{-n\pi i(2v_2+\tau_{22})}\cdot f(v_1,v_2), \end{cases}$$

so ist sie von einer Constanten abgesehen, immer gleich der transformirten Function:

$$\vartheta_5(nv_1,\, nv_2,\, n\tau_{11},\, n\tau_{12},\, n\tau_{22}).$$

2) Leistet zweitens eine Function den Gleichungen Genüge:

$$(2)\quad \begin{cases} f\left(v_1+\frac{1}{n},\, v_2\right)=\alpha f(v_1,v_2), \quad f\left(v_1,\, v_2+\frac{1}{n}\right)=\beta f(v_1,v_2), \\ f(v_1+\tau_{11},\, v_2+\tau_{12}) = e^{-n\pi i(2v_1+\tau_{11})}\cdot f(v_1,v_2), \\ f(v_1+\tau_{12},\, v_2+\tau_{22}) = e^{-n\pi i(2v_2+\tau_{22})}\cdot f(v_1,v_2), \\ \alpha = e^{\frac{2\pi i p}{n}}, \qquad \beta = e^{\frac{2\pi i q}{n}}, \end{cases}$$

so ist sie von einer Constanten abgesehen immer gleich der Function:

$$e^{2\pi i(v_1 p+v_2 q)}\cdot \vartheta_5(nv_1+p\tau_{11}+q\tau_{12},\, nv_2+p\tau_{12}+q\tau_{22}).$$

Die Beweise der beiden Sätze liegen auf der Hand und sollen nicht weiter ausgeführt werden.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass diese beiden Sätze nur Vertreter zweier Kategorien von Sätzen sind, die aus den soeben aufgestellten mit leichter Mühe abzuleiten sind.

Hieraus nun folgen u. a. die Formeln (3):

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\vartheta_5\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((v))^n = c_1\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\vartheta_5\begin{bmatrix}g_1 & 0\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))^n$$

$$= c_2\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\vartheta_5\begin{bmatrix}0 & g_2\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))^n$$

$$= c_3\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\prod_0^{n-1}{}_{h_2}\vartheta_5\begin{bmatrix}0 & 0\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))$$

$$= c_4\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\prod_0^{n-1}{}_{h_1}\vartheta_5\begin{bmatrix}0 & 0\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))$$

$$= c_5\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\prod_0^{n-1}{}_{g_1}\vartheta_5\begin{bmatrix}g_1 & 0\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))$$

$$= c_6\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\prod_0^{n-1}{}_{g_2}\vartheta_5\begin{bmatrix}0 & g_2\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v)),$$

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\beta^{h_2}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((v))^n = c_7\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\beta^{h_2}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}g_1 & 0\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))^n$$

$$= c_8\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\beta^{h_2}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}0 & g_2\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))^n$$

$$= c_9\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\prod_0^{n-1}{}_{g_1}\alpha^{h_1}\cdot\beta^{h_2}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}g_1 & 0\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))$$

$$= c_{10}\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\prod_0^{n-1}{}_{g_2}\alpha^{h_1}\cdot\beta^{h_2}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}0 & g_2\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v)).$$

Die Constanten c, die in diesen Gleichungen vorkommen, können dadurch bestimmt werden, dass man den Argumenten einen bestimmten Werth beilegt.

Diese Formeln lassen eine interessante Anwendung zu. Sie lehren nämlich die Fouriersche Entwickelung der Potenzen und Producte der gewöhnlichen Thetafunctionen kennen.

In der That es ist:

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\beta^{h_2}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((v))^n$$

$$= c_{pq}\cdot\varepsilon_{pq}\cdot\vartheta_5(nv_1-p\tau_{11}-q\tau_{12},\ nv_2-p\tau_{12}-q\tau_{22},\ n\tau_{11},\ n\tau_{12},\ n\tau_{22}),$$

$$\varepsilon_{pq} = e^{-2\pi i(v_1 p + v_2 q) + \frac{\pi i}{n}(p^2\tau_{11} + 2pq\tau_{12} + q^2\tau_{22})}.$$

Die Constante c_{pq} bestimmen wir, indem wir an Stelle von v_1 und v_2 uns gesetzt denken resp.

$$v_1 + \frac{p\tau_{11} + q\tau_{12}}{n}, \quad v_2 + \frac{p\tau_{12} + q\tau_{22}}{n}.$$

Dann wird:

$$\Theta_5 \cdot c_{pq} = \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \vartheta_5 \begin{bmatrix} p & q \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n, \tag{4}$$

wenn

$$\Theta_5 = \vartheta_5(0, 0, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

gesetzt wird.

Demgemäss erhalten wir die Entwickelung:

$$n^2 \cdot \Theta_5 \cdot \vartheta_5(v_1, v_2)^n = \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \sum_0^{n-1}{}_{p} \sum_0^{n-1}{}_{q} \varepsilon_{pq} \cdot \vartheta_5 \begin{bmatrix} p & q \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \tag{5}$$

$$\cdot\, \vartheta_5(nv_1 - p\tau_{11} - q\tau_{12}, nv_2 - p\tau_{12} - q\tau_{22}, n\tau_{12}, n\tau_{12}, n\tau_{22}).$$

Schon diese Formel kann als Lösung des gestellten Problems gelten, indessen soll sie noch in folgender Weise transformirt werden.

$$n^2 \cdot \Theta_5 \cdot \vartheta_5(v_1, v_2)^n = \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \vartheta(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

$$+ \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_{p} \vartheta_5 \begin{bmatrix} p & 0 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \varphi(p, 0)$$

$$+ \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_{q} \vartheta_5 \begin{bmatrix} 0 & q \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \varphi(0, q)$$

$$+ \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_{p} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_{q} \vartheta_5 \begin{bmatrix} p & q \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \varphi(p, q)$$

$$+ \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \sum_0^{\frac{n-1}{2}}{}_{p} \sum_0^{\frac{n-1}{2}}{}_{q} \vartheta_5 \begin{bmatrix} p & -q \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} ((0))^n \cdot \varphi(p, -q).$$

Hierbei ist gesetzt:

$$\varphi(p, q) = \varepsilon_{pq} \cdot \vartheta_5(nv_1 - p\tau_{11} - q\tau_{12}, nv_2 - p\tau_{12} - q\tau_{22}, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$
$$+ \varepsilon_{-p-q} \cdot \vartheta_5(nv_1 + p\tau_{11} + q\tau_{12}, nv_2 + p\tau_{12} + q\tau_{22}, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}).$$

Die Fourierschen Entwickelungen der Grössen:

$$\varphi(p\ q)$$

aber sind leicht herzustellen. In der That, es ist:

$$\vartheta_5(v_1, v_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2} e^{\pi i (m_1^2 \tau_{11} + 2 m_1 m_2 \tau_{12} + m_2^2 \tau_{22}) + 2\pi i (m_1 v_1 + m_2 v_2)}$$

Setzen wir hierin an Stelle von m_1 und m_2 resp. $n\mu_1 + p$, $n\mu_2 + q$, so folgt:

$$\vartheta_5(v_1, v_2) = \sum_0^{n-1}{}_p \sum_0^{n-1}{}_q \varepsilon_{-p-q} \cdot \vartheta_5\big(n(v_1 + p\tau_{11} + q\tau_{12}), n(v_2 + p\tau_{12} + q\tau_{22}), n^2\tau_{11}, n^2\tau_{12}, n^2\tau_{22}\big).$$

Jetzt werde links und rechts an Stelle der Grössen $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ gesetzt resp. $\frac{\tau_{11}+2\lambda_1}{n}$, $\frac{\tau_{12}+2\lambda_2}{n}$, $\frac{\tau_{22}+2\lambda_3}{n}$, dann folgt leicht:

$$(5) \qquad \vartheta_5\left(v_1, v_2, \frac{\tau_{11}+2\lambda_1}{n}, \frac{\tau_{12}+2\lambda_2}{n}, \frac{\tau_{22}+2\lambda_3}{n}\right)$$

$$= \vartheta_5(nv_1, nv_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}) + \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_p e^{\frac{2\pi i p^2 \lambda_1}{n}} \varphi(p, 0) + \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_q e^{\frac{2\pi i q^2 \lambda_3}{n}} \varphi(0, q)$$

$$+ \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_p \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_q e^{\frac{2\pi i}{n}(p^2\lambda_1 + 2pq\lambda_2 + q^2\lambda_3)} \varphi(p, q) + e^{\frac{2\pi i}{n}(p^2\lambda_1 - 2pq\lambda_2 + q^2\lambda_3)} \cdot \varphi(p, -q).$$

In Bezug auf diese Formel möge auf eine Arbeit von Herrn Wiltheiss im 96ten Bande des Crelle'schen Journals verwiesen werden. In derselben kann an Stelle einer jeden der drei Grössen λ_1, λ_2, λ_3 der Reihe nach $0, 1, \ldots, n-1$ gesetzt werden. Die Functionen auf der linken Seite bilden dann einen Theil der repräsentirenden transformirten Thetafunctionen, deren Fourier'sche Entwickelungen unmittelbar bekannt sind.

Multipliciren wir diese Gleichungen mit $e^{\frac{2\pi i}{n}(p^2\lambda_1 + 2pq\lambda_2 + q^2\lambda_3)}$ und summiren nach den Grössen λ_1, λ_2, λ_3, so erhalten wir umgekehrt die $\varphi(p, q)$-Functionen durch die transformirten ausgedrückt und damit die gesuchten Fourier'schen Entwickelungen. In den Coefficienten treten die Potenzen der Thetafunctionen auf, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen und deren Argumente Null sind, daneben die Grösse Θ_5.

Genau so kann man die Fourier'schen Entwickelungen für die Producte:

$$\vartheta_5((v))^\alpha \cdot \vartheta_{02}((v))^\beta \cdot \vartheta_1((v))^\gamma \cdot \vartheta_{34}((v))^\delta$$

bestimmen, bei denen die Exponenten die bekannten Bedingungen erfüllen. Die Formen bleiben dieselben, die Coefficienten ändern sich in leicht angebbarer Weise.

Es hat die Lösung dieses Problems eine weittragende Bedeutung. Das ursprüngliche Transformationsproblem lautet: Es sollen die transformirten Thetafunctionen als ganze rationale Functionen der ursprünglichen ausgedrückt werden. Hier nun ist das umgekehrte Problem gelöst worden. Es sind die ursprünglichen Thetafunctionen durch die transformirten ausgedrückt und damit in gewisser Weise eine Auflösung der Transformationsgleichungen gegeben worden. Von besonderer Wichtigkeit ist hierbei die Einfachheit und Eleganz der Coefficienten. Aus den Sätzen, die wir zur Ableitung von Thetarelationen gebraucht haben, folgt ferner, dass wenn eine Reihe von Functionen den Gleichungen Genüge leisten:

$$(7)\quad \begin{cases} f\left(v_1 + \frac{1}{n}, v_2\right) = f(v_1, v_2), \quad f(v_1, v_2 + 1) = f(v_1, v_2) \\ f(v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}) = e^{-n\pi i.(2v_1 + \tau_{11})} \cdot f(v_1, v_2), \\ f(v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}) = e^{-n\pi i.(2v_2 + \tau_{22})} \cdot f(v_1, v_2), \end{cases}$$

dann zwischen je $n + 1$ derselben mindestens eine lineare Relation bestehen muss. Es wird also bei derartigen Functionen die Zahl der zu bestimmenden Constanten verringert — und zwar verringert im Vergleich zu den gewöhnlichen Thetafunctionen n^{ter} Ordnung.

Es zeigt sich diese Bemerkung vor allem bei Aufstellung der linearen Beziehungen zwischen den repräsentirenden Thetafunctionen von Bedeutung, ist dagegen für die Gewinnung neuer und einfacher Thetarelationen von keiner hervorragenden Wichtigkeit. Wir wollen auf sie und analoge Bemerkungen unter solchen Umständen nicht näher eingehen.

Zu weiteren Thetarelationen gelangt man durch den Umstand, dass, wenn zwei Thetafunctionen n^{ter} Ordnung, die als solche dieselbe Charakteristik besitzen, für n^2 Theilwerthe der Perioden übereinstimmen, dass sie dann überhaupt übereinstimmen müssen.

Setzen wir:

$$\alpha = e^{-\frac{2\pi i}{n}}, \quad \beta = e^{-\frac{2\pi i}{n}}$$

und nehmen die Ausdrücke

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \alpha^{h_1} \cdot \vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((0))^n \cdot \vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((v))^n$$

und:

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \alpha^{h_1} \cdot \vartheta\begin{bmatrix}1 & 0\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((0))^n \cdot \vartheta\begin{bmatrix}1 & 0\\h_1 & h_2\end{bmatrix}((v))^n,$$

so stimmen dieselben für die n^2 Werthe von v überein:

$$\frac{-\tau_{11} + h_1}{n}, \quad \frac{-\tau_{12} + h_2}{n}.$$

Mithin erhalten wir die Gleichung:

$$(8)\qquad \sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((0))^n\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((v))^n$$
$$=\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}1&0\\h_1&h_2\end{bmatrix}((0))^n\cdot\vartheta\begin{bmatrix}1&0\\h_1&h_2\end{bmatrix}((v))^n.$$

Genau so ergeben sich die Gleichungen:

$$(9)\qquad \begin{cases}\displaystyle\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\beta^{h_2}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((0))^n\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((v))^n\\ \displaystyle=\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\beta^{h_2}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0&1\\h_1&h_2\end{bmatrix}((0))^n\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0&1\\h_1&h_2\end{bmatrix}((v))^n,\\ \displaystyle\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\beta^{h_2}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((0))^n\cdot\vartheta\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((v))^n\\ \displaystyle=\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\beta^{h_2}\cdot\vartheta\begin{bmatrix}1\\h\end{bmatrix}((0))^n\cdot\vartheta\begin{bmatrix}1\\h\end{bmatrix}((v))^n.\end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen können eine Reihe anderer hergeleitet werden. Setzen wir in der ersten derselben z. B. an Stelle von v_1, v_2 der Reihe nach $v_1+\frac{h_1'}{n}$, $v_2+\frac{h_2'}{n}$ und lassen h_1' und h_2' alle Werthe von 0 bis $n-1$ annehmen, so erhalten wir beim Summiren aller Gleichungen:

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((0))^n\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\vartheta_5\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((v))^n$$
$$=\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}1&0\\h_1&h_2\end{bmatrix}((0))^n\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\vartheta_5\begin{bmatrix}1&0\\h_1&h_2\end{bmatrix}((v))^n.$$

An Stelle von v_1 und v_2 setzen wir links und rechts resp. $v_1+\frac{\tau_{11}}{n}$, $v_2+\frac{\tau_{12}}{n}$, so wird:

$$\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((0))^n\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}1&0\\h_1&h_2\end{bmatrix}((v))^n$$
$$=\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}1&0\\h_1&h_2\end{bmatrix}((0))^n\cdot\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}2&0\\h_1&h_2\end{bmatrix}((v))^n.$$

Setzen wir hierin $v=0$, so erhalten wir die Gleichung:

$$(10)\qquad \sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((0))^n=\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}2&0\\h_1&h_2\end{bmatrix}((v))^n.$$

Genau so wird:

$$(11)\qquad \begin{cases}\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\beta^{h_2}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((0))^n=\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\beta^{h_2}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}0&2\\h_1&h_2\end{bmatrix}((0))^n,\\ \sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\beta^{h_2}\cdot\vartheta_5\begin{bmatrix}0\\h\end{bmatrix}((0))^n=\sum_0^{n-1}{}_{h_1}\sum_0^{n-1}{}_{h_2}\alpha^{h_1}\cdot\beta^{h_2}\,\vartheta_5\begin{bmatrix}2\\h\end{bmatrix}((0))^n.\end{cases}$$

Es können diese Gleichungen zur Vereinfachung der Constantenausdrücke in einigen früheren Gleichungen dienen. Durch Substitution von $n$tel Perioden können die Gleichungen in bedeutend allgemeinerer Form dargestellt werden, wie denn auch sie nur als Vertreter grosser Kategorien von Relationen dienen sollen.

§ 5.

Einfacher Beweis der Prym'schen Thetaformeln.

Es ist klar, dass ausser den Gleichungen, die im vorigen Paragraphen aufgestellt worden sind, noch eine Fülle anderer entwickelt werden kann. Es sollen diese nicht einzeln aufgestellt werden, vielmehr sollen lediglich die allgemeinsten Gleichungen, die zwischen den definirten Thetafunctionen bestehen, mit wenigen Schlüssen abgeleitet werden. Diese Gleichungen sind zuerst von den Herren Prym und Krazer in ihrer fundamentalen Arbeit in den Acta mathematica (Band III) aufgestellt worden. Wir setzen dazu:

$$\begin{aligned}
nu_1&=(1-n)v_1+\cdots+v_{2n},\\
nu_2&=v_1+(1-n)v_2+\cdots+v_{2n},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
nu_{2n}&=v_1+\cdots+(1-n)v_{2n},\\
nu_1'&=(1-n)v_1'+\cdots+v_{2n}',\\
nu_2'&=v_1'+(1-n)v_2'+\cdots+v_{2n}',\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
nu_{2n}'&=v_1'+v_2'+\cdots+(1-n)v_{2n}',
\end{aligned}$$

und bilden zunächst das Product:

$$\vartheta(v_1,v_1')\cdot\vartheta(v_2,v_2')\cdots\vartheta(v_{2n},v_{2n}')=\prod_1^{2n}{}_i\,\vartheta(v_i,v_i').$$

Betrachten wir dieses Product als Function von v_i und v_i' und bezeichnen es als solche durch $f(v_i, v_i')$, so leistet es den Gleichungen Genüge:

$$(1)\quad \begin{cases} f(v_i+1, v_i') = f(v_i, v_i'), \quad f(v_i, v_i'+1) = f(v_i, v_i'), \\ f(v_i+\tau_{11}, v_i'+\tau_{12}) = e^{-\pi i(2v_i+\tau_{11})} f(v_i, v_i'), \\ f(v_i+\tau_{12}, v_i'+\tau_{22}) = e^{-\pi i(2v_i'+\tau_{22})} f(v_i, v_i'). \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestimmen es bis auf eine von v_i, v_i' unabhängige Constante.

Bilden wir andrerseits das Product:

$$\prod_1^{2n}{}^{i}\, e^{-\frac{2}{n}\pi i g_1 . h_1} . \vartheta_5\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_i, u_i'),$$

wo die Zahlen g und h beliebige Werthe von 0 bis $n-1$ bedeuten können, und sehen diesen Ausdruck als Function von v_i und v_i' an, so geht er bei Vermehrung von v_i um 1 über in:

$$\prod_1^{2n}{}^{i}\, e^{-\frac{2\pi i}{n} \cdot g_1 \cdot (h_1+1)} . \vartheta_5\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1+1 & h_2 \end{bmatrix}(u_i, u_i').$$

Dabei ist klar, dass wir, ohne der Richtigkeit Abbruch zu thun, annehmen können, dass auch h_1+1 eine der Zahlen von 0 bis $n-1$ bedeutet. Hieraus folgt, dass die Summe:

$$\sum_0^{n-1}{}^{h_1} \prod_1^{2n}{}^{i}\, e^{-\frac{2\pi i}{n} \cdot g_1 \cdot h_1} . \vartheta_5\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_i, u_i')$$

als Function von v_i und v_i' aufgefasst ungeändert bleibt, wenn v_i um 1 vermehrt wird. Genau so folgt, dass die Summe:

$$\sum_0^{n-1}{}^{h_1} \sum_0^{n-1}{}^{h_2} \prod_1^{2n}{}^{i}\, e^{-\frac{2\pi i}{n} \cdot (g_1 \cdot h_1 + g_2 h_2)} . \vartheta_5\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_i, u_i')$$

ungeändert bleibt, wenn ein beliebiges der Argumente v_i, v_i' um die Einheit vermehrt wird. Nehmen wir endlich die vierfache Summe

$$\sum_0^{n-1}{}^{h_1} \sum_0^{n-1}{}^{h_2} \sum_0^{n-1}{}^{g_1} \sum_0^{n-1}{}^{g_2} \prod_1^{2n}{}^{i}\, e^{-\frac{2\pi i}{n} \cdot (g_1 . h_1 + g_2 . h_2)} . \vartheta_5\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_i, u_i'),$$

so ist klar, dass dieselbe als Function von v_i und v_i' aufgefasst den vorhin aufgestellten charakterisirenden Gleichungen Genüge leistet. Da nun i eine beliebige der Grössen $0 \ldots n-1$ bedeutet, so folgt die Gleichung:

$$\prod_0^{2n}{}^{i}\, \vartheta_5(v_i, v_i') = c \cdot \sum_0^{n-1}{}^{h_1} \sum_0^{n-1}{}^{h_2} \sum_0^{n-1}{}^{g_1} \sum_0^{n-1}{}^{g_2} \prod_1^{2n}{}^{i}\, \vartheta_5\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_i, u_i') . e^{-\frac{2\pi i}{n}(h_1 . g_1 + h_2 . g_2)}.$$

Hierbei ist c eine Grösse, die von den Veränderlichen u, u' oder v, v' unabhängig ist und lediglich von den Grössen τ abhängen kann.

Bezeichnen wir nun die linke Seite kurz durch F, so folgt unmittelbar, dass sie den Differentialgleichungen Genüge leistet:

$$(2)\quad \begin{cases} \sum_1^{2n}{}_i \dfrac{\partial^2 F}{\partial v_i^2} = 4\pi i \cdot \dfrac{\partial F}{\partial \tau_{11}}, \quad \sum_1^{2n}{}_i \dfrac{\partial^2 F}{\partial v_i'^2} = 4\pi i \cdot \dfrac{\partial F}{\partial \tau_{22}}, \\ \sum_1^{2n}{}_i \dfrac{\partial^2 F}{\partial v_i \cdot \partial v_i'} = 2\pi i \cdot \dfrac{\partial F}{\partial \tau_{12}}. \end{cases}$$

Genau denselben Gleichungen leistet aber die vierfache Summe auf der rechten Seite Genüge. Hieraus folgt, dass die Constante auch von den Grössen τ unabhängig sein muss. Dann aber finden wir sie am einfachsten, wenn für die einzelnen Thetafunctionen ihre Fourier'schen Entwickelungen eingesetzt werden. Hierbei ergiebt sich, wie unmittelbar klar:

$$1 = c \cdot n^2$$

oder also:

$$(3)\quad n^2 \prod_1^{2n}{}_i \vartheta_5(v_i, v_i') = \sum_0^{n-1}{}_{h_1} \sum_0^{n-1}{}_{h_2} \sum_0^{n-1}{}_{g_1} \sum_0^{n-1}{}_{g_2} \prod_1^{2n}{}_i \vartheta_5 \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (u_i, u_i') . e^{-\frac{2\pi i}{n}(h_1 . g_1 + h_2 . g_2)}.$$

Es ist dieses die Gleichung Θ_2 der Herren Prym und Krazer — für den Fall zweier Veränderlichen specialisirt. Genau so lässt sich die Gleichung Θ_1 ableiten. Damit sind die Prym'schen Fundamentalformeln entwickelt. —

Rostock im September 1885.

Bemerkung zu dem Aufsatze: „Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad.“

(Bd. XIV dieser Annalen, p. 537—544).

Von

Joseph Gierster in Bamberg.

Die in der Ueberschrift bezeichnete Arbeit*) hatte den Zweck, die Modulargleichungen des Geschlechtes $p = 0$ zwischen J und J' für zusammengesetzte Transformationsgrade aufzustellen. Dieselbe schloss sich an die Klein'sche Abhandlung:**) „Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades“ an. Wie in dieser, so wurde auch in jener für einen gegebenen Transformationsgrad n J als rationale Function

$$(1) \qquad J = \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}$$

einer Hülfsgrösse τ dargestellt, während der Uebergang von J zu J' durch eine lineare Transformation von τ, nämlich

$$(2) \qquad \tau' = \frac{c}{\tau}$$

erfolgte. Der Grad von $\varphi(\tau)$ war N, der von $\psi(\tau)$ $N - n$.

Ferner wurde dann auch der Zusammenhang dieser Hülfsgrössen τ mit dem Multiplicator

$$M = \frac{1}{n} \frac{q^{\frac{1}{6n}} \prod \left(1 - q^{\frac{2\nu}{n}}\right)^2}{q^{\frac{1}{6}} \prod (1 - q^{2\nu})^2}, \qquad q = e^{i\pi\omega}$$

zu entwickeln gesucht. Dabei haben sich leider Unrichtigkeiten eingestellt. Auf sie kommt Herr Kiepert in seiner Abhandlung: „Ueber Theilung und Transformation der elliptischen Functionen“ zu sprechen***). Die Quelle derselben liegt in der Gleichung (pag. 539, Zeile 17)

---

*) Die Angaben von Seitenzahlen beziehen sich auf diese Arbeit.

**) Math. Annalen Bd. XIV, pag. 111.

***) Vergl. den vorliegenden Band der Math. Annalen, p. 369 ff., insbesondere pag. 371 daselbst.

(3) $$\psi(\tau') = k \cdot \tau^{-N+n-1}\,\psi(\tau),$$
welche, wie man sich aus Tabelle III pag. 541 überzeugt, nur gilt, wenn n eine Primzahl oder das Quadrat einer solchen ist. Setzt man (3) als bestehend voraus, so hat man einfach

(4) $$\tau^{n-1} = C \cdot M^{12}.$$

In der That kommt aus (1) sogleich

$$\frac{dJ}{d\tau} = \frac{\varphi'(\tau)\cdot\psi(\tau) - \varphi(\tau)\cdot\psi'(\tau)}{\psi^2(\tau)}.$$

Der Zähler dieses Ausdruckes (die Functionaldeterminante von $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$) enthält aber jeden $x$fachen Factor $(\tau-\alpha)^x$ $(x>1)$ eines Ausdruckes $\varphi(\tau)+\lambda\psi(\tau)$ genau $x-1$ fach, und da $p=0$ ist, so ist der genannte Zähler bis auf einen constanten Factor gleich dem Producte $\Pi(\tau-\alpha)^{x-1}$. Nach pag. 538 kennt man aber diese $x$fachen Factoren sämmtlich. Es treten ausser den vielfachen Factoren von $\psi(\tau)$ nur noch bei $J=0$ und $J=1$ solche auf. Bei $J=0$ hat man $\frac{1}{3}(N-\varepsilon_0)$ 3fache Factoren von $\varphi(\tau)$, bei $J=1$ aber $\frac{1}{2}(N-\varepsilon_1)$ Doppelfactoren von $\varphi(\tau)-\psi(\tau)$. Bezeichnet man also die Producte der einfachen Factoren von $\varphi(\tau)$ bez. $\varphi(\tau)-\psi(\tau)$ mit $e_0(\tau)$ und $e_1(\tau)$ und setzt $\psi(\tau)=\Pi(\tau-\alpha)^x$, so hat man

(5) $$\frac{dJ}{d\tau} = \text{Const.}\left(\frac{J\psi(\tau)}{e_0(\tau)}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{(J-1)\cdot\psi(\tau)}{e_1(\tau)}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\psi(\tau)^{-2}\cdot\Pi(\tau-\alpha)^{x-1}$$
$$= C\cdot\frac{J^{\frac{2}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\psi(\tau)^{\frac{1}{6}}}{e_0(\tau)^{\frac{2}{3}}\,e_1(\tau)^{\frac{1}{2}}\,\Pi(\tau-\alpha)}.$$

Ferner hat man

$$\frac{dJ'}{d\tau'} = C\cdot\frac{J'^{\frac{2}{3}}(J'-1)^{\frac{1}{2}}\psi(\tau')^{\frac{1}{6}}}{e_0(\tau')^{\frac{2}{3}}\,e_1(\tau')^{\frac{1}{2}}\,\Pi(\tau'-\alpha)};\qquad \frac{d\tau'}{d\tau} = -\frac{c}{\tau^2}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

(6) $$M^2 = \frac{1}{n}\cdot\frac{dJ'}{dJ}\cdot\frac{J^{\frac{2}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}}}{J'^{\frac{2}{3}}(J'-1)^{\frac{1}{2}}}$$

ein und berücksichtigt die Relationen*) (pag. 538)

(7) $$\Pi(\tau'-\alpha) = \text{Const.}\,\tau^{-\Sigma\varphi(t)}\,\Pi(\tau-\alpha);\quad e_0(\tau') = \text{Const.}\,\tau^{-\varepsilon_0}e_0(\tau);$$
$$e_1(\tau') = \text{Const.}\,\tau^{-\varepsilon_1}e_1(\tau),\quad \frac{2\varepsilon_0}{3}+\frac{\varepsilon_1}{2}-2+\sum\varphi(t) = \frac{N}{6},$$
so erhält man

(8) $$M^{12} = C\cdot\tau^N\cdot\frac{\psi(\tau')}{\psi(\tau)}.$$

---

*) Denn es ist für $J=\infty$ auch $J'=\infty$ und umgekehrt, und für die Wurzeln von $e_0(\tau)$ bez. $e_1(\tau)$ ist $J=J'=0$ bez. $J=J'=1$.

Für Primzahlen und Primzahlquadrate gilt Gl. (3) und damit auch (4). Für die übrigen zusammengesetzten Transformationsgrade hat man

$$\psi(\tau) = \tau \Pi'(\tau - \alpha)^{\frac{d}{t}}; \quad \psi(\tau') = \text{Const.}\, \tau^{-N+n}\, \Pi'(\tau - \alpha)^{\frac{a}{t}},$$

wenn $ad = n$ und t der grösste Theiler von a und d ist. Daher kommt dann

$$CM^{12} = \tau^{n-1}\Pi'(\tau - \alpha)^{\frac{a-d}{t}} = \Pi(\tau - \alpha)^{\frac{a-d}{t}}. \tag{9}$$

Der Accent bedeutet hiebei, dass in dem betreffenden Producte der Factor τ, der zur Zerlegung $n = n \cdot 1$ gehört, auszuschliessen ist.

Die Constanten C bestimmen sich für jeden gegebenen Fall aus (2) in Verbindung mit

$$MM' = \frac{1}{n}, \tag{10}$$

wo M' sich ebenso durch τ' ausdrückt, wie M durch τ. Man erhält dann die nachstehenden Formeln. Ich habe dieselben schon früher aufgestellt und an Herrn Professor Klein mitgetheilt.

$$n = 6\ ,\ \tau = \tau_6\ ,\ \tau^5 \cdot \frac{2\tau + 9}{\tau + 4} = 2^8 \cdot 3^{12} M^{12};$$

$$n = 8\ ,\ \tau = \tau_8\ ,\ \tau^7 \cdot \frac{\tau - 4}{\tau - 2} = 2^{29} M^{12};$$

$$n = 10,\ \tau = \tau_{10},\ \tau^3 \cdot \frac{2\tau - 5}{\tau - 2} = 2^2 \cdot 5^4 M^4;$$

$$n = 12,\ \tau = \tau_{12},\ \tau^{11} \cdot \left(\frac{\tau - 6}{\tau - 2}\right)^2 \cdot \frac{\tau - 4}{\tau - 3} = 2^{24} \cdot 3^{12} M^{12};$$

$$n = 16,\ \tau = \tau_{16},\ \tau^5 \cdot \frac{\tau - 4}{\tau - 2} = 2^{16} M^4;$$

$$n = 18,\ \tau = \tau_{18},\ \tau^{17} \cdot \left(\frac{\tau + 3}{\tau + 2}\right)^7 \cdot \frac{\tau^2 + 6\tau + 12}{\tau^2 + 3\tau + 3} = 2^{12} \cdot 3^{24} M^{12}.$$

Bamberg, am 28. Dezember 1885.

Quelques remarques sur une certaine question de minimum.

Par

C. Possé à St. Petersbourg.

La question dont il s'agit dans cette note est intimement liée à la théorie des fractions continues algèbriques et ne présente qu'une simple application des résultats connus de cette théorie. Dans le cas le plus simple cette question a été resolue par Mr. Stieltjes dans sa „Note sur la densité de la terre" inserée dans le Bulletin astronomique de M. Tisserand (Octobre 1884) par des considérations particulières et entièrement différentes de celles sur les quelles nous allons nous fonder.

Soit $f(x)$ une fonction de x toujours décroissante dans les limites 0 et 1 de x, c'est à dire telle que sa dérivée $f'(x)$ reste toujours négative dans les mêmes limites. Supposons que la valeur $f(1)$ de cette fonction pour $x = 1$, ainsi que les valeurs des intégrales

$$a_2 = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx,\quad a_4 = \int_0^1 x^4 f(x)\,dx, \ldots, a_{2n} = \int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx$$

soient données. Il s'agit de trouver la limite inférieure précise de la valeur $f(0)$.

Remarquant que

$$f(0) - f(1) = -\int_0^1 f'(x)\,dx,$$

$$a_2 = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3} f(1) - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\,dx,$$

$$a_4 = \int_0^1 x^4 f(x)\,dx = \frac{1}{5} f(1) - \frac{1}{5}\int_0^1 x^5 f'(x)\,dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{2n} = \int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx = \frac{1}{2n+1} f(1) - \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n+1} f'(x)\,dx$$

nous voyons qu'on peut considerer comme données les valeurs des intégrales

$$\sigma_3 \quad = -\int_0^1 x^3 f'(x)\,dx = 3a_2 - f(1),$$

$$\sigma_5 \quad = -\int_0^1 x^5 f'(x)\,dx = 5a_4 - f(1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_{2n+1} = -\int_0^1 x^{2n+1} f'(x)\,dx = (2n+1)a_{2n} - f(1)$$

et comme inconnue la limite inférieure de la valeur de l'integrale

$$-\int_0^1 f'(x)\,dx.$$

Cette question se réduit aisement à une autre dont la solution est connue.

Considérons l'intégrale

$$F(z) = -\int_0^1 \frac{x^3 f'(x)\,dx}{z - x^2};$$

en la développant suivant les puissances descendentes de z, on aura

$$F(z) = -\int_0^1 \frac{x^3 f'(x)\,dx}{z - x^2} = \frac{\sigma_3}{z} + \frac{\sigma_5}{z^2} + \cdots + \frac{\sigma_{2n+1}}{z^n} + \cdots.$$

Posant $x^2 = u$, on aura

$$F(z) = -\int_0^1 \frac{\frac{1}{2} u f'(\sqrt{u})\,du}{z - u}$$

où faisant $\Theta(u) = -\frac{1}{2} u f'(\sqrt{u})$, $\Theta(u)$ restant positive entre 0 et 1,

$$F(z) = \int_0^1 \frac{\Theta(u)\,du}{z - u} = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{z^n} + \cdots -$$

où

$$\alpha_i = \int_0^1 u^i \Theta(u)\,du.$$

En comparant les deux developpements de $F(z)$, nous aurons

$$\sigma_3 = \alpha_0,\ \sigma_5 = \alpha_1,\ \ldots,\ \sigma_{2n+1} = \alpha_{n-1}.$$

D'ailleurs

$$f(0) - f(1) = -\int_0^1 f'(x)\,dx = -\int_0^1 \frac{1}{2} f'(\sqrt{u})\frac{du}{\sqrt{u}} = \int_0^1 \frac{\Theta(u)\,du}{\sqrt{u^3}}.$$

On voit ainsi que la question se ramène à la recherche de la limite inférieure de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^3}}\,\Theta(u)\,du$$

étant données les valeurs de

$$\alpha_i = \int_0^1 u^i\Theta(u)\,du$$

pour

$$i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Quant à cette dernière question elle est complétement résolue dans tous les cas par M. Markoff dans son ouvrage „Sur quelques applications des fractions continues algébriques" publié en russe à St. Petersbourg 1884. Quelques uns des résultats contenus dans ce travail ont été aussi publiés par l'auteur dans sa note plus récente „Sur la méthode de Gauss" (Math. Annalen Bd. XXV).

Pour le cas de n pair $= 2m$ on a le résultat suivant: soient donnés

$$a_0 = \int_0^1 \Theta(u)\,du,\ \alpha_1 = \int_0^1 u\Theta(u)\,du,\ \ldots,\ \alpha_{2m-1} = \int_0^1 u^{2m-1}\Theta(u)\,du;$$

considerons la m^{me} fraction convergente dans le developpement de $\int_0^1 \frac{\Theta(u)\,du}{z-u}$ en fraction continue; soit $\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ cette fraction convergente et $z_1, z_2, \ldots, z_m$ les racines de $\varphi(z)$.

En désignant par $\Omega(u)$ une fonction quelconque dont la dérivée d'ordre $2m$ reste positive entre les limites 0 et 1 de u, on aura

$$\int_0^1 \Omega(u)\,\Theta(u)\,du \geqq \sum_{i=1}^{i=m} \Omega(z_i)\,\frac{\psi(z_i)}{\varphi'(z_i)}.$$

(Voir Math. Ann. Bd. XXV, p. 429).

Pour appliquer cette formule à notre question il faut poser

$$\Omega(u) = \frac{1}{\sqrt{u^3}}.$$

Dans le cas le plus simple, $m = 1$, on aura

$$\varphi(z) = z - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad \psi(z) = \alpha_0,$$

$$f(0) - f(1) = \int_0^1 \frac{\Theta(u)\,du}{\sqrt{u^3}} \geqq \sqrt{\frac{\alpha_0^5}{\alpha_1^3}},$$

ou

$$f(0) \geqq f(1) + \sqrt{\frac{\sigma_3^5}{\sigma_5^3}}$$

ou enfin

$$f(0) \geqq f(1) + \sqrt{\frac{[3a_2 - f(1)]^5}{[5a_4 - f(1)]^3}}.$$

C'est le résultat de M. Stieltjes.

Occasionellement je remarquerai que les formules

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^2}\, f(x)\, dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^{k=n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) f\left(\cos\frac{k\pi}{n+1}\right) + \text{corr.}$$

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot f(x)\, dx = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{k=n} \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}\, f\left(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + \text{corr.},$$

que donne M. Stieltjes dans sa note du Novembre 1884 (Bulletin astronomique de M. Tisserand) et dans lesquelles la correction est nulle tant que $f(x)$ est une fonction entière dont le degrè ne surpasse pas $2n - 1$, ont été déduites par moi dans ma note „Sur les quadratures" inserée dans les Nouvelles Annales des Mathematiques en 1875.

St. Petersbourg, 8. Septembre 1885.

Verbesserungen.

Band	XXIII,	Seite	425	Zeile	13	v. u. lies u statt a.
„	„	„	427	„	3	„ „ „ (14) „ (1).
„	„	„	432	„	9	„ „ setze — statt des zweiten $=$.
„	XXVI	„	216	„	9	„ „ lies *drei* statt *fünf*.
„	„	„	217	„	7	v. o. „ $u_\varkappa$ statt $a_\varkappa$.
„	„	„	564	„	6	v. u. lies auf der *vorletzten* statt letzten.

[illegible]

[illegible]